RESEARCH ON LAW OF LARGE NUMBERS FOR SEQUENCES OF *M*-BLOCKWISE DEPENDENT, COMPACTLY UNIFORMLY INTEGRABLE FUZZY RANDOM VARIABLES

NGHIÊN CỨU LUẬT MẠNH SỐ LỚN CHO DÃY CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN MỜ *M*-PHỤ THUỘC THEO KHỐI COMPACT KHẢ TÍCH ĐỀU

Hoàng Thị Duyên
Trường Đại học Quảng Bình

ABSTRACT: *In this paper, we use the embedding method, and approximation method to establish a new result of a strong law of large numbers for sequences of blockwise M-dependent, compactly uniformly integrable fuzzy random variables in separable Banach space.*

Keyword: *random sets, fuzzy random variables, blockwise M-dependent, expectation.*

TÓM TẮT: *Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng phương pháp xấp xỉ và phương pháp nhúng để thiết lập kết quả mới về luật mạnh số lớn cho dạy các biến ngẫu nhiên mờ M-phụ thuộc theo khối với điều kiện compact khả tích đều trong không gian Banach thực khả ly.*

Từ khóa: *Biến ngẫu nhiên đa trị, Biến ngẫu nhiên mờ, M-phụ thuộc theo khối, kỳ vọng.*

1. GIỚI THIỆU

Trong suốt bài báo này, chúng tôi xét $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là không gian xác suất đầy đủ, $\mathbb{E}$ là không gian Banach thực khả ly với chuẩn $\|.\|$ và $\mathbb{E}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathbb{E}$. Ta gọi $c(\mathbb{E})$ (tương ứng, $cc(\mathbb{E}), ck(\mathbb{E}), k(\mathbb{E})$) là họ gồm các tập con đóng (tương ứng, lồi đóng, compact lồi, compact) khác rỗng của $\mathbb{E}$ và $\mathcal{B}(\mathbb{E})$ là σ-đại số Borel trên $\mathbb{E}$.

Với $A \subset \mathbf{E}$, hàm khoảng cách $d(\cdot, A)$ của C, và hàm giá $\delta^*(\cdot, C)$ của C được định nghĩa bởi

$$d(x, C) = \inf\{\|x - y\| : y \in C\}, x \in \mathbf{E},$$

$$\delta^*(x^*, C) = \sup\{< x^*, c >: c \in C\}, \quad x^* \in \mathbf{E}^*.$$

Trên $c(\mathbb{E})$ ta trang bị các phép toán sau:

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\},$$

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\},$$

với $A, B \in c(\mathbb{E})$ và $\lambda \in \mathbb{R}$. Ta thấy rằng, nếu $A, B \in k(\mathbb{E})$ thì $A + B \in k(\mathbb{E})$. Khoảng cách Hausdorff của A và B trong $k(\mathbb{E})$ được định nghĩa bởi

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{x\in A} d(x, B), \sup_{x\in B} d(x, B)\}.$$

Theo [1], không gian $(k(\mathbb{E}), d_H)$ là không gian Polish. Với $A \in k(\mathbb{E})$, ta gọi $|A| = \sup_{x\in A} \|x\|$ là độ lớn của tập A. Dưới đây chúng tôi phát biểu các tính chất của khoảng cách Hausdorff được sử dụng trong bài báo này. (xem trong [1, 4]): Với mỗi $A_1, A_2, B_1, B_2 \in k(\mathbb{E})$ và $\alpha > 0$, ta có các tính chất sau đây:

a) $d_H(A_1 + A_2, B_1 + B_2) \leq d_H(A_1, B_1) + d_H(A_2, B_2)$.

b) $d_H(\alpha A_1, \alpha B_2) = \alpha d_H(A_1, B_1)$.

c) Nếu $A_1 \subset B_1 \subset B_2$ thì

$$d_H(A_1, B_1) \leq d_H(A_1, B_2).$$

Ta định nghĩa trên $c(\mathbb{E})$ một σ-đại số sinh bởi các tập $U^- = \{F \in c(\mathbb{E}) : F \cap U \neq \varnothing\}$,
với U là tập con mở của $\mathbb{E}$, gọi là σ-đại số Effros và được kí hiệu là $\mathcal{B}_{c(\mathbb{E})}$.

Ánh xạ đa trị $X : \Omega \rightrightarrows \mathbb{E}$ nhận giá trị trong $c(\mathbb{E})$ được gọi là biến ngẫu nhiên đa trị nếu X là ánh xạ $\mathcal{F}$-đo được, nghĩa là với mỗi $B \in \mathcal{B}(\mathbb{E})$,

$X^-(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \cap B \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}$.

Với X là biến ngẫu nhiên đa trị, ta kí hiệu $\mathcal{F}_X = \{X^{-1}(U) \colon U \in \mathcal{B}_{c(\mathbb{E})}\}$, trong đó $X^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in U\}$. Khi đó $\mathcal{F}_X$ là σ-đại số con bé nhất của $\mathcal{F}$ mà X đo được. Phân phối của X là một độ đo xác suất P_X trên $\mathcal{B}_{c(\mathbb{E})}$ và được xác định bởi

$$P_X(U) = P\{X^{-1}(U) : U \in \mathcal{B}_{c(\mathbb{E})}\}.$$

Với $1 \leq p < \infty$, ta kí hiệu $L^p_{\mathbb{E}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là không gian Banach gồm các biến ngẫu nhiên $f : \Omega \to \mathbb{E}$ sao cho $\|f\|_p = E\left(\|f\|^p\right)^{1/p} < \infty$. Nếu $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ thì ta viết gọn $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là L^p. Ta đặt

$S^1_X = \{f \in L^1_{\mathbb{E}}(\Omega, \mathcal{F}, P) : f(\omega) \in X(\omega) \text{ h.c.c.}\}$.

Kỳ vọng EX của biến ngẫu nhiên đa trị X trên Ω được định nghĩa như sau:

$$EX = \{Ef \colon f \in S^1_X\},$$

trong đó, Ef là tích phân Bochner thông thường của f. Biến ngẫu nhiên đa trị X được gọi là khả tích nếu tập $S^1_X \neq \varnothing$. Ngoài ra, biến ngẫu nhiên đa trị X được gọi là bị chặn khả tích nếu biến ngẫu nhiên $|X|(\omega) = \sup\{|x| : x \in X(\omega)\}$ khả tích.

Kí hiệu $\overline{B}^c_{\mathbb{E}^*}$ là hình cầu đơn vị đóng của không gian $\mathbb{E}^*_{c^*}$ liên kết với tô pô của sự hội tụ compact và $C(\overline{B}^c_{\mathbb{E}^*})$ là không gian Banach thực khả ly gồm tất cả các hàm liên tục φ xác định trên $\overline{B}^c_{\mathbb{E}^*}$ liên kết với chuẩn của sự hội tụ đều $\|\varphi\|_\infty = \sup\limits_{x^* \in \overline{B}^c_{\mathbb{E}^*}} |\varphi(x^*)|$. Đồng thời, ta cũng gọi $L^1_{C(\overline{B}^c_{\mathbb{E}^*})}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là không gian gồm tất cả các biến ngẫu nhiên khả tích nhận giá trị trong không gian $C(\overline{B}^c_{\mathbb{E}^*})$.

Giả sử M là số nguyên không âm. Một họ hữu hạn các biến ngẫu nhiên đa trị $\{X_1, ..., X_n\}$ được gọi là M-phụ thuộc nếu hoặc $n \leq M$ hoặc $n > M$ và các biến ngẫu nhiên đa trị $\{X_1, ..., X_k\}$ độc lập với các biến ngẫu nhiên đa trị $\{X_l, ..., X_n\}$ khi $l - k > M$. Một dãy các biến ngẫu nhiên đa trị $\{X_n : n \geq 1\}$ được gọi là M-phụ thuộc nếu với mỗi $n \geq 1$, các biến ngẫu nhiên đa trị $\{X_1, ..., X_n\}$ là M-phụ thuộc. Dãy các biến ngẫu nhiên $\{X_n : n \geq 1\}$ được gọi là M-phụ thuộc theo khối nếu với mỗi $p \geq 1$, họ $\{X_i : i \in (2^{p-1}, 2^p]\}$ là M-phụ thuộc. Nếu $M = 0$ thì khái niệm 0-phụ thuộc theo khối được gọi là độc lập theo khối.

Một dãy $\{X_n : n \geq 1\}$ các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong $\mathbf{E}$ được gọi là compact khả tích đều theo nghĩa Cesàro nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại tập con compact K của $\mathbf{E}$ sao cho

$$\sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(\|X_i\| I_{[X_i \notin K]}) < \varepsilon.$$

Nghiên cứu về khái niệm compact

khả tích đều và các tính chất của chúng có thể tìm thấy trong các nghiên cứu của Wang và Rao [7], Quảng và Duyên [5]. Theo Zadeh [8], tập mờ là ánh xạ $u : \mathbb{E} \to [0,1]$ sao cho:

(i) u là ánh xạ nửa liên tục trên;

(ii) $\{x \in \mathbb{E} : u(x) = 1\} \neq \varnothing$;

(iii) u là hàm lồi mờ, nghĩa là, với mọi $\lambda \in [0,1]$ và với mọi $x, y \in \mathbb{E}$, ta có $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$.

Với mỗi tập mờ u trong $\mathbb{E}$, tập α-mức liên kết với u được định nghĩa bởi

$$u_\alpha = \{x \in \mathbb{E} : u(x) \geq \alpha\},\ \alpha \in (0,1].$$

Ta còn định nghĩa

$$u_{\alpha^+} = \mathrm{cl}\{x \in \mathbb{E} : u(x) > \alpha\},\quad \alpha \in [0,1).$$

Cho u và v là hai tập mờ trong $\mathbb{E}$ và $\lambda \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa các phép toán sau đây:

$$(u+v)(x) = \sup_{y+z=x} \min\{u(y), v(z)\}$$

$$\lambda u(x) = \begin{cases} u(\lambda^{-1}x) \text{ nếu } \lambda \neq 0 \\ 0 \text{ nếu } \lambda = 0. \end{cases}$$

Theo [4], $u+v$ và λu là các tập mờ trong $\mathbb{E}$. Hơn nữa với mỗi $\alpha \in (0,1]$ ta có

$$[u+v]_\alpha = [u]_\alpha + [v]_\alpha$$

và với mỗi $\lambda \in (0,1]$, ta có

$$[\lambda u]_\alpha = \lambda [u]_\alpha.$$

Theo [2], biến ngẫu nhiên mờ là ánh xạ $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{E})$-đo được $X : \Omega \times \mathbb{E} \to [0,1]$ sao cho với mỗi $\omega \in \Omega$, ánh xạ $X(\omega, \cdot) : \mathbb{E} \to [0,1]$ xác định bởi

$$X(\omega, \cdot)(x) = X(\omega, x)$$

là tập mờ. Với mỗi biến ngẫu nhiên mờ $X : \Omega \times \mathbb{E} \to [0,1]$, tập α-mức liên kết với X được định nghĩa bởi

$$X_\alpha = \{x \in \mathbb{E} : X(\omega, x) \geq \alpha\},$$

$\omega \in \Omega$, $\alpha \in (0,1]$. Ta còn định nghĩa

$$X_{\alpha^+} = \mathrm{cl}\{x \in \mathbb{E} : X(\omega, x) > \alpha\},$$

$\omega \in \Omega$, $\alpha \in [0,1)$. Khi đó, ánh xạ đa trị $X_\alpha : \Omega \rightrightarrows \mathbb{E}$ là biến ngẫu nhiên đa trị nhận giá trị trong không gian $cc(\mathbb{E})$ với mỗi $\alpha \in (0,1]$. Tương tự, ánh xạ đa trị $X_\alpha^+ : \Omega \rightrightarrows \mathbb{E}$ là biến ngẫu nhiên đa trị với mỗi $\alpha \in [0,1)$.

Với X, Y là các biến ngẫu nhiên mờ xác định trên $\Omega \times \mathbb{E}$ và $\lambda \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa

$$(X+Y)(\omega, x) = X(\omega, x) + Y(\omega, x),$$

$$(\lambda X)(\omega, x) = \lambda X(\omega, x).$$

Khi đó với mỗi $\alpha \in (0,1]$, ta có:

$$[X+Y]_\alpha = X_\alpha + Y_\alpha,\ [\lambda X]_\alpha = \lambda X_\alpha.$$

Kỳ vọng mờ của biến ngẫu nhiên nhận giá trị tập mờ $X : \Omega \times \mathbb{E} \to [0,1]$ là một tập mờ $\widetilde{E}X : \mathbb{E} \to [0,1]$ sao cho

$$[\widetilde{E}X]_\alpha = EX_\alpha \text{ với mọi } \alpha \in (0,1].$$

2. KẾT QUẢ CHÍNH

Định lý dưới đây thiết lập luật mạnh số lớn cho dãy các biến ngẫu nhiên compact khả tích đều trong không gian Banach thực khả ly. Trước tiên, chúng ta cần các bổ đề dưới đây.

Bổ đề 1. [6, Định lý 3.1] *Giả sử $\{X_n : n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu kỳ vọng 0* *và M-phụ thuộc theo khối sao cho*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(|X_n|^2)}{n^2} < \infty.$$

Khi đó, ta thu được luật mạnh số lớn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \ h.c.c.$$

Luật mạnh số lớn cho dãy các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach thực khả ly, compact khả tích đều đã được thiết lập dưới đây.

Bổ đề 2. [3, Định lý 3.1] *Giả sử $\{X_n : n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên nhận giá trị $\mathbb{E}$. Nếu $\{X_n : n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên compact khả tích đều theo nghĩa Cesàro, M-phụ thuộc theo khối, và nếu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\|X_n\|^2)}{n^2} < \infty$$

thì ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i) = 0 \ h.c.c.$$

Áp dụng các kết quả trên, kết hợp với phương pháp đánh giá xấp xỉ theo khoảng cách Hausdorff và phương pháp nhúng trong [5, Định lý 3.2], chúng tôi thiết lập một mở rộng của [5, Định lý 5.3] cho trường hợp M-phụ thuộc theo khối.

Định lý 3. *Cho $\{X^n : n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên mờ xác định trên $\Omega \times \mathbb{E}$ thỏa các điều kiện sau:*

(i) $X^n_{0^+}(\omega) \subset \mathbb{E}$ là tập compact với mọi $\omega \in \Omega$ và với mọi $n \geq 1$;

(ii) $g = \sup_{n\geq 1} \left|X^n_{0+}\right| \in L^2$;

(iii) $\{X^n_\alpha : n \geq 1\}$ và $\left\{X^n_{\alpha+} : n \geq 1\right\}$ là các dãy M-phụ thuộc theo khối với mỗi $\alpha \in (0, 1]$;

(iv) $\{\delta^*(\cdot, X^n_\alpha) : n \geq 1\}$ là dãy compact khả tích đều theo nghĩa Cesàro trong không gian $L^1_{C(\overline{B}^c_{\mathbb{E}^*})}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ với mỗi $\alpha \in [0, 1)$;

(v) Với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại phân hoạch $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_r = 1$ của $[0, 1]$ sao cho với mọi $n \geq 1$, ta có $\max_{1\leq k\leq m} Ed_H(X^n_{\alpha^+_{k-1}}, X^n_{\alpha_k}) < \varepsilon$. Khi đó $\lim_{n\to\infty} \sup_{\alpha\in(0,1]} d_H(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^i_\alpha, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX^i_\alpha) = 0$ h.c.c..

Chứng minh. Giả sử $\varepsilon > 0$ tùy ý. Khi đó tồn tại $k = 1, ..., m$ (phụ thuộc α) sao cho $\alpha_{k-1} < \alpha \leq \alpha_k$. Áp dụng bất đẳng thức tam giác và tính chất của khoảng cách Hausdorff, với mỗi $n \geq 1$ và với mỗi $k = 1, ..., m$ ta nhận được

$$\begin{aligned}
& d_H(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^i_\alpha, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX^i_\alpha) \\
& \leq d_H(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^i_\alpha, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^i_{\alpha_k}) \\
& + d_H(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^i_{\alpha_k}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX^i_{\alpha_k}) \\
& + d_H(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX^i_{\alpha_k}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX^i_\alpha) \\
& \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_H(X^i_\alpha, X^i_{\alpha_k}) \\
& + d_H(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^i_{\alpha_k}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX^i_{\alpha_k}) \\
& + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Ed_H(X^i_{\alpha_k}, X^i_\alpha).
\end{aligned}$$

Với mỗi $k = 1, ..., m$, vì $\alpha_{k-1} < \alpha \leq \alpha_k$, nên $X^i_{\alpha_k} \subset X^i_\alpha \subset X^i_{\alpha^+_{k-1}}$. Do đó

$$d_H(X^i_{\alpha_k}, X^i_{\alpha}) \le d_H(X^i_{\alpha_k}, X^i_{\alpha^+_{k-1}})$$

với mọi $k = 1, ..., m$. Từ đây ta có

$$d_H(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^i_{\alpha}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX^i_{\alpha})$$
$$\le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_H(X^i_{\alpha^+_{k-1}}, X^i_{\alpha_k})$$
$$+ d_H(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^i_{\alpha_k}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX^i_{\alpha_k})$$
$$+ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Ed_H(X^i_{\alpha_k}, X^i_{\alpha^+_{k-1}})$$
$$\le \max_{1\le k\le m} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[d_H(X^i_{\alpha^+_{k-1}}, X^i_{\alpha_k})$$
$$- Ed_H(X^i_{\alpha^+_{k-1}}, X^i_{\alpha_k})]$$
$$+ d_H(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^i_{\alpha_k}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX^i_{\alpha_k})$$
$$+ 2\max_{1\le k\le m}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Ed_H(X^i_{\alpha_k}, X^i_{\alpha^+_{k-1}})$$
$$:= I + II + III.$$

Xét I, với mọi $k = 1, \ldots, m$ và với mọi $i \ge 1$, vì

$$d_H(X^i_{\alpha^+_{k-1}}, X^i_{\alpha_k}) \le 2|X^n_{0^+}|$$

nên ta thu được

$$E[d_H(X^i_{\alpha^+_{k-1}}, X^i_{\alpha_k})^2] \le 2^2E|X^i_{0^+}|^2 \le 2^2E[g^2].$$

Do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E[d_H(X^n_{\alpha^+_{k-1}}, X^n_{\alpha_k})^2]}{n^2} < 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E[g^2]}{n^2} < \infty.$$

Chú ý rằng, dãy các biến ngẫu nhiên $\{d_H(X^i_{\alpha^+_{k-1}}, X^i_{\alpha_k}) - Ed_H(X^i_{\alpha^+_{k-1}}, X^i_{\alpha_k}) : i \ge 1\}$ thỏa các điều kiện của Bổ đề 1 nên suy ra $I \to 0$ h.c.c. khi $n \to \infty$.

Xét II. Theo iv), dãy các biến ngẫu nhiên $\{\delta^*(\cdot, X^i_{\alpha_k}) : i \ge 1\}$ là dãy compact khả tích đều theo nghĩa Cesàro. Ngoài ra, vì dãy $\{X^i_{\alpha_k} : i \ge 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên đa trị M-phụ thuộc theo khối nên dãy $\{\delta^*(\cdot, X^i_{\alpha_k}) : i \ge 1\}$ cũng là dãy các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong $\mathbb{E}$ và M-phụ thuộc theo khối. Hơn nữa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E(\|\delta^*(\cdot, X_n)\|^2)}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{E(|X_n|^2)}{n^2} < \infty.$$

Như vậy dãy $\{\delta^*(\cdot, X^i_{\alpha_k}) : i \ge 1\}$ thỏa các điều kiện của Bổ đề 2 nên ta thu được luật mạnh số lớn

$$\lim_{n\to\infty} d_H(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^i_{\alpha_k}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX^i_{\alpha_k}) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\delta^*(\cdot, X^i_{\alpha_k}) - E[\delta^*(\cdot, X^i_{\alpha_k})]\right]\|$$
$$= 0$$

h.c.c. với mọi $k = 1, ..., m$. Từ điều kiện v) ta cũng có

$$III = 2\max_{1\le k\le m}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Ed_H(X^i_{\alpha_k}, X^i_{\alpha^+_{k-1}}) < 2\varepsilon$$

với mọi $n \ge 1$. Kết hợp các lập luận ở trên ta thu được

$$d_H(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^i_{\alpha}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX^i_{\alpha})$$
$$\le I + II + 2\varepsilon \text{ h.c.c.}$$

$$d_H(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^i_{\alpha}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX^i_{\alpha})$$
$$\le I + II + 2\varepsilon \text{ h.c.c.}$$

với mọi $n \geq 1$. Vì I, II và ε không phụ thuộc vào α nên ta có bất đẳng thức

$$\sup_{\alpha\in(0,1]} d_H\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_\alpha^i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_\alpha^i\Big) \leq I + II + 2\varepsilon \text{ h.c.c.}$$

với mọi $n \geq 1$. Trong bất đẳng thức trên, cho $n \to \infty$ ta nhận được

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\alpha\in(0,1]} d_H\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_\alpha^i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_\alpha^i\Big) \leq 2\varepsilon$$

h.c.c. Vì $\varepsilon > 0$ tùy ý nên ta suy ra ngay kết luận của định lý. Định lý đã được chứng minh. □

Nhận xét. Định lý trên vẫn đúng nếu chúng ta thay giả thiết M-phụ thuộc theo khối bởi M-phụ thuộc theo khối tương ứng với các khối $\{\Delta_k = [q^{k-1}, q^k) : k \geq 1\}$.

Thật vậy, áp dụng [3 , Định lý 3.1] với các khối $\{\Delta_k : k \geq 1\}$, ta có $\varphi(n) = O(1)$. Từ đây ta thu được khẳng định.

4. KẾT LUẬN

Trên đây, chúng tôi đã thiết lập luật mạnh số lớn cho dãy các biến ngẫu nhiên mờ M-phụ thuộc theo khối tương ứng với khoảng cách Hausdorff trong trường hợp dãy các biến ngẫu nhiên là compact khả tích đều. Trong thời gian tới chúng tôi dự định nghiên cứu các kết quả trên cho trường hợp M-phụ thuộc theo khối tương ứng với các khối bất kì. Các kết quả ở trên là mới, góp phần làm phong phú thêm cho hướng nghiên cứu về luật mạnh số lớn cho biến ngẫu nhiên mờ nói riêng và các định lý giới hạn trong xác suất nói chung.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] C. Castaing and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes in Math. 580, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[2] C. Castaing, C. Godet-Thobie, T. D. Hoang, P. Raynaud de Fitte (2015), On the integration of fuzzy level sets, in: Advances in Mathematical Economics (S. Kusuoka and T. Maruyama, eds.), 19, Springer, Tokyo, 1-32.

[3] C. Castaing, H. T. Duyen, N. V. Quang (2023), Strong laws of large numbers for double arrays of blockwise M-dependent random sets, Vietnam Journal of Mathematics 51, 379-396.

[4] S. Li, Y. Ogura (2006), Strong laws of large numbers for independent fuzzy set-valued random variables, Fuzzy Sets and Systems, 157 (19), 2569-2578.

[5] N. V. Quang, H. T. Duyen (2017), Convergence of weighted sums and strong law of large numbers for convex compact integrable random sets and fuzzy random sets, Journal of Convex Analysis, 24 (1), 213-238.

[6] U. Stadtm¨uller and L. V. Thanh, On the strong limit theorems for double arrays of blockwise M-dependent random variables, *Acta. Math. Sin. Engl. Ser.* , 10 (2011), 1923-1934.

[7] X. C. Wang and M. B. Rao, ome results on the convergence of weighted sums of random elements in separable Banach spaces, *Studia Math.* 86 (1987), 131-153.

[8] L. H. Zadeh: Fuzzy sets, Inform. Control 8 (1966) 338-353.

Liên hệ:
TS. Hoàng Thị Duyên
Khoa Sư phạm, Trường Đại học Quảng Bình
Địa chỉ: 18 Nguyễn Văn Linh, Đồng Hới, Quảng Bình
Email: duyenht@quangbinhuni.edu.vn

Ngày nhận bài: 14/5/2024
Ngày gửi phản biện: 16/5/2024
Ngày duyệt đăng: 26/02/2025