

# PHÂN TÍCH TĨNH VÀ DAO ĐỘNG RIÊNG TẤM BẰNG VẬT LIỆU CÓ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN (FGM) THEO LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẬC CAO ĐƠN GIẢN

Dương Thành Huân<sup>1\*</sup>, Lê Minh Lư<sup>1</sup>, Trần Minh Tú<sup>2</sup>, Vũ Văn Thắm<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Khoa Cơ Điện, Học viện Nông nghiệp Việt Nam*

<sup>2</sup>*Khoa Xây dựng dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng*

Email\*: [tpnt2002@yahoo.com](mailto:tpnt2002@yahoo.com)

Ngày gửi bài: 22.12.2014

Ngày chấp nhận: 30.07.2015

## TÓM TẮT

Vật liệu có cơ tính biến thiên (Functionally Graded Materials - FGM) là loại vật liệu không đồng nhất, đẳng hướng có tính chất cơ học thay đổi trơn, liên tục theo chiều dày của tấm. Bài báo sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao đơn giản (Simple higher Order Shear Deformation Theory - S-HSDT) để phân tích tĩnh và dao động riêng của tấm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên. Mô đun đàn hồi kéo (nén) của vật liệu được giả thiết biến thiên theo qui luật hàm mũ, hệ số Poisson là hằng số theo tọa độ chiều dày. Hệ phương trình cân bằng động của tấm được xác định theo nguyên lý Hamilton. Ảnh hưởng của chỉ số tỉ lệ thể tích, các tham số kích thước tấm đến độ võng, ứng suất và tần số dao động riêng được khảo sát. Kết quả số được so sánh với kết quả của các tác giả đã công bố nhằm kiểm chứng mô hình tính mà bài báo đã xây dựng.

Từ khóa: Dao động riêng, lý thuyết biến dạng cắt, phân tích tĩnh, tấm có cơ tính biến thiên.

## Static and Vibration Analysis of Functionally Graded Plates Using The Simple Higher Order Shear Deformation Theory (S-HSDT)

### ABSTRACT

This paper used the simple higher order shear deformation theory (S-HSDT) to analyse the static and free vibration of simply supported (diaphragm), elastic functionally graded (FG), rectangular, plates. Functionally graded materials (FGMs), although heterogeneous are idealized as continua with their mechanical properties changing smoothly with respect to the spatial coordinates. Poisson's ratio is assumed to be constant, but their Young's moduli and densities vary continuously in the thickness direction according to the volume fraction of constituents, which is mathematically modelled as power law function. The equations of motion are obtained using Hamilton's principle employing S-HSDT. Navier's solution is used to solve the equations of motion. The effect of variation of material properties in terms of gradation index, the effects of aspect ratios, thickness-to-side ratio on the bending, the stresses and the natural frequencies of FG plates are studied in this article. The numerical results are also compared with results available in the literature to validate theoretical model of the paper.

Keywords: Static analysis, vibration analysis, power-law functionally graded plate, shear deformation plate theory.

### 1. MỞ ĐẦU

Vật liệu có cơ tính biến thiên là hỗn hợp của hai vật liệu thành phần với tỉ lệ nhất định để đạt được một chức năng mong muốn tùy theo mục

đích sử dụng. Các tính chất của vật liệu có cơ tính biến thiên biến đổi trơn từ bề mặt này sang bề mặt khác nên tránh được sự tập trung ứng suất thường gặp ở các kết cấu bằng vật liệu composite lớp. Kết cấu bằng vật liệu có cơ tính biến thiên

được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực: cơ khí, xây dựng dân dụng, hàng không, công nghiệp hạt nhân, ô tô,... Để tính toán và thiết kế các loại kết cấu tấm và vỏ làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên, nhiều mô hình tính toán đã được đề xuất và phát triển. Các lý thuyết này có thể chia làm ba nhóm chính: lý thuyết tấm cổ điển (CPT), lý thuyết tấm bậc nhất (FSDT) và lý thuyết tấm bậc cao (HSDT).

Lý thuyết tấm cổ điển bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng cắt ngang và cho kết quả phù hợp với tấm mỏng theo Javaheri và Eslami (2002), Zhang và Zhou (2008), Mohammadi et al. (2010), Bodaghi và Saidi (2011). Với tấm có độ dày trung bình lý thuyết này cho kết quả về độ võng thấp hơn, nhưng lực tới hạn về ổn định và tần số dao động riêng cao hơn. Lý thuyết tấm bậc nhất kể đến ảnh hưởng của biến dạng cắt ngang nhưng cần phải sử dụng hệ số hiệu chỉnh cắt để thỏa mãn điều kiện ứng suất cắt ngang bằng không tại mặt trên và dưới của tấm theo Della Croce and Venini (2004), Ganapathi et al. (2006), Zhao và Liew (2009), Lee et al. (2010), Hosseini-Hashemi et al. (2010), Hosseini-Hashemi et al. (2011). Việc xác định hệ số hiệu chỉnh cắt một cách chính xác là khó khăn, do vậy các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao đã được đề xuất trên cơ sở các giả thiết trường chuyển vị màng biến thiên bậc hai, bậc ba, bậc cao theo chiều dày. Trong số các lý thuyết tấm bậc cao, lý thuyết tấm bậc cao với năm ẩn số chuyển vị được biết đến với tên gọi: lý thuyết Reddy theo Reddy (2000), lý thuyết biến dạng cắt dạng hàm sin theo Zenkour (2005a, 2005b, 2006), lý thuyết biến dạng cắt dạng hàm hyperbol theo Benyoucef et al. (2010), Atmane et al. (2010), lý thuyết biến dạng cắt dạng hàm e-mũ theo Karama et al. (2003), Mantari et al. (2012). Một số lý thuyết biến dạng cắt bậc cao đòi hỏi khối lượng tính toán lớn với 9 ẩn chuyển vị theo Pradyumna và Bandyopadhyay (2008), Neves et al. (2012a, 2012b, 2012c), với 11 ẩn chuyển vị theo Reddy (2011) hay 13 ẩn chuyển vị theo Taha et al., (2010).

Mục đích của bài báo là xây dựng lý thuyết tấm bậc cao đơn giản (S-HSDT) cho tấm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên với bốn ẩn số chuyển vị và thỏa mãn điều kiện ứng suất cắt ngang bằng

không tại mặt trên và dưới của tấm. Trường chuyển vị được giả thiết là hằng số đối với độ võng và là hàm bậc ba với các chuyển vị màng. Độ võng được chia làm hai thành phần: uốn và cắt do vậy làm giảm số ẩn chuyển vị cũng như số phương trình chuyển động cần thiết và có thể sử dụng trong tính toán một cách đơn giản hơn.

## 2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

### 2.1. Vật liệu có cơ tính biến thiên

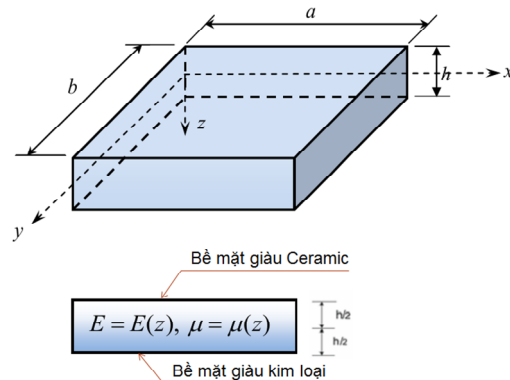
Đối với vật liệu có cơ tính biến thiên, hai thành phần tạo thành từ sự kết hợp của kim loại và ceramic, tỷ lệ thể tích của các thành phần vật liệu được giả thiết biến đổi theo qui luật xác định. Qui luật phân bố của hàm tỉ lệ thể tích là cơ sở để phân loại vật liệu FGM. Phần lớn các nhà nghiên cứu sử dụng hàm lũy thừa, hàm e - mũ hoặc hàm Sigmoid để mô tả biến thiên của hàm tỉ lệ thể tích. Hàm tỉ lệ thể tích dạng hàm lũy thừa viết dưới dạng sau:

$$g(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^p \quad \text{với } p \text{ là chỉ số tỉ lệ thể tích} \quad (1)$$

Trong bài báo này hệ số Poisson  $\nu$  được giả thiết là hằng số, mô đun đàn hồi  $E$  và khối lượng riêng  $\rho$  của vật liệu FGM được giả thiết biến thiên theo quy luật hàm lũy thừa và có dạng sau (Reddy, 2000):

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^p \quad (2)$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^p \quad (3)$$



**Hình 1. Mô hình kết cấu tấm làm từ vật liệu FGM**

**2.2. Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao đơn giản Reddy**

**2.2.1. Các giả thiết**

Theo Reddy trường chuyển vị bậc cao không đầy đủ được giả thiết như sau (Reddy JN., 2000):

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) + z^2u_0^*(x, y) + z^3\theta_x^*(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) + z^2v_0^*(x, y) + z^3\theta_y^*(x, y) \quad (4) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned}$$

Trong đó:  $u_0, v_0, w_0$  là các thành phần chuyển vị của điểm bất kỳ có tọa độ (x,y) trên mặt trung bình.

$u_0^*, v_0^*, \theta_x^*, \theta_y^*$  là các số hạng bậc cao trong khai triển Taylor hàm chuyển vị theo tọa độ chiều dày.

Các thành phần biến dạng cắt ngang xác định từ quan hệ chuyển vị - biến dạng:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x + 2zu_0^* + 3z^2\theta_x^* + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_y + 2zv_0^* + 3z^2\theta_y^* + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

Với tấm chịu uốn bởi tải trọng vuông góc với mặt trung bình, ứng suất cắt ngang tại mặt trên và dưới của tấm bằng không, dẫn tới:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz}(x, y, \pm h/2) &= \gamma_{yz}(x, y, \pm h/2) = 0; \\ \text{từ đó ta có: } u_0^* &= v_0^* = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Từ (4), (5), (6) ta tính được:

$$u = u_0 + z \left[ \theta_x - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \phi_x \right]; v = v_0 + z \left[ \theta_y - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \phi_y \right]; w = w_0 \quad (7)$$

(Với:  $\phi_x = \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}$  và  $\phi_y = \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}$ )

Trong đó:  $\theta_x, \theta_y$  là góc xoay của pháp tuyến quanh trục y, x tương ứng.

$\phi_x, \phi_y$  là góc vặn xoắn của pháp tuyến quanh trục y, x tương ứng.

**2.2.1. Biểu thức chuyển vị**

Với quan niệm góc xoay  $\theta_x, \theta_y$  là do momen uốn gây ra, góc vặn xoắn  $\phi_x, \phi_y$  là do ảnh hưởng của lực cắt, trường chuyển vị được giả thiết như sau (Thai et al., 2010):

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (8)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (9)$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (10)$$

Trong đó:  $u_0, v_0, w_0$  là các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung bình theo các phương x, y, z.

$w_b, w_s$  là độ võng do momen uốn và do lực cắt gây ra.

**2.2.2. Các thành phần biến dạng**

Trường biến dạng được suy ra từ trường chuyển vị bằng cách sử dụng quan hệ chuyển vị - biến dạng:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \quad (11)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - \frac{8z^3}{3h^2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}; \quad (12)$$

$$\gamma_{xz} = \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \frac{\partial w_s}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \frac{\partial w_s}{\partial y}$$

**2.2.3. Quan hệ ứng suất - biến dạng**

Quan hệ tuyến tính giữa ứng suất - biến dạng của tấm FGM đẳng hướng với mô đun đàn hồi E biến thiên dạng hàm mũ theo chiều dày tấm ở trạng thái ứng suất khối có thể được viết dưới dạng sau:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Các thành phần trong ma trận độ cứng [Q] ở trên được xác định bởi:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)} = Q_{22}; \quad Q_{12} = \frac{\nu(z)E(z)}{1-\nu^2(z)} = Q_{21}; \\ Q_{44} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} = Q_{55} = Q_{66} \end{aligned}$$

Phân tích tĩnh và dao động riêng tấm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao đơn giản

### 2.2.3. Các thành phần nội lực

Các thành phần nội lực trong tấm được xác định bởi các biểu thức sau:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz; \quad \begin{Bmatrix} M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz; \\ \begin{Bmatrix} M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \frac{4z^3}{h^2} dz; \end{aligned} \quad (14)$$

$$Q_{yz} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \sigma_{yz} dz;$$

$$Q_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \sigma_{xz} dz$$

Biểu diễn các thành phần nội lực (14) theo chuyển vị ta được (15), (16), trong đó, các hệ số  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ,  $F_{ij}$ ,  $G_{ij}$ ,  $H_{ij}$  xem chi tiết phụ lục.

### 2.3. Phương trình chuyển động theo các thành phần chuyển vị

Dựa theo nguyên lý Hamilton ta có hệ phương trình (17) sau:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & F_{11} & F_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 & B_{12} & B_{11} & 0 & F_{12} & F_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & F_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & G_{11} & G_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 & D_{12} & D_{11} & 0 & G_{12} & G_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & G_{66} \\ F_{11} & F_{12} & 0 & G_{11} & G_{12} & 0 & H_{11} & H_{12} & 0 \\ F_{12} & F_{11} & 0 & G_{12} & G_{11} & 0 & H_{12} & H_{11} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} & 0 & 0 & G_{66} & 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$\delta u: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - cI_3 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x}$$

$$\delta v: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_x}{\partial y} = I_0 \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - cI_3 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y}$$

$$\delta w_b: \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - cI_4 \nabla^2 \ddot{w}_s$$

$$\delta w_s: \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + cI_3 \left( \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - cI_4 \nabla^2 \ddot{w}_b - c^2 I_6 \nabla^2 \ddot{w}_s \quad (17)$$

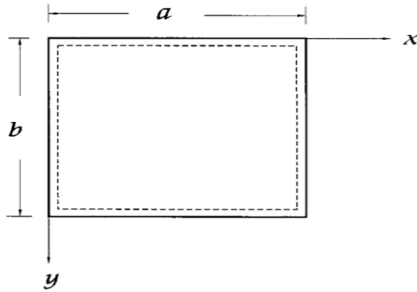
trong đó các thành phần  $I_i$  được tính theo công thức sau:

$$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho (1, z, z^2, z^3, z^4, z^5) dz \quad (18)$$

Hệ phương trình trên áp dụng cho bài toán động, đối với bài toán tĩnh thì các thành phần của vế bên phải bằng không.

### 2.4. Lời giải Navier cho tấm chữ nhật FGM, tựa khớp trên chu vi

Xét tấm chữ nhật FGM với chiều dài  $a$  và chiều rộng  $b$  tựa khớp trên chu vi như hình 2.



Hình 2. Tấm chữ nhật cạnh  $a, b$ , bốn biên tựa khớp.

Theo Navier, hàm chuyển vị được giả định dưới dạng chuỗi lượng giác kép như sau (Thai et al., 2013):

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} e^{i\omega t} \cos \alpha x \sin \beta y \\ v(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \cos \beta y \end{aligned} \quad (19)$$

$$w_b(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y$$

$$w_s(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y$$

với  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\alpha = \frac{m\pi}{a}$ ,  $\beta = \frac{n\pi}{b}$ , ( $U_{mn}$ ,  $V_{mn}$ ,

$W_{bmn}$ ,  $W_{smn}$ ) là các ẩn số,  $\omega$  là tần số góc.

Hàm tải trọng cũng được giả thiết dưới dạng chuỗi lượng giác kép như sau:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (20)$$

trong đó:  $q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ .

Khi tải trọng phân bố đều:  $q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2}$

Điều kiện biên:  $x = 0: u_0 = v_0 = w_0 = 0, M_x = 0;$   $x = a: v_0 = w_0 = 0, M_x = 0.$

$y = 0: u_0 = v_0 = w_0 = 0, M_y = 0$   $y = b: v_0 = w_0 = 0, M_y = 0.$

Thế phương trình (19) vào hệ phương trình chuyển động theo chuyển vị (17) ta có:

$$\{[S] - \omega^2 [M]\}\{Q\} = \{q\} \quad (21)$$

Trong đó: các ma trận, vectơ  $[S]$ ;  $[M]$ ;  $\{Q\}$ ;  $\{q\}$  xem chi tiết phụ lục.

❖ Khi cho tần số góc  $\omega = 0$  ta nhận được phương trình cho bài toán tĩnh:

$$[S]\{Q\} = \{q\} \quad (22)$$

Giải phương trình (22) ta nhận được các hệ số  $U_{mn}$ ,  $V_{mn}$ ,  $W_{bmn}$ ,  $W_{smn}$ , từ đó xác định được các thành phần chuyển vị theo (19) và các thành phần ứng suất cho bài toán tĩnh.

❖ Khi cho tải trọng bằng 0, nhận được phương trình cho bài toán dao động riêng:

$$\{[S] - \omega^2 [M]\}\{Q\} = 0 \quad (23)$$

Đặt  $\omega = \sqrt{\lambda}$  hay  $\lambda = \omega^2$ , bằng phần mềm Matlab, giải bài toán tìm trị riêng của phương trình (23)  $[S] - \lambda [M] = 0$ , ta nhận được tần số dao động riêng của tấm với vật liệu cơ tính biến thiên FGM.

## 3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

### 3.1. Phân tích tĩnh

**Ví dụ 1: Kiểm chứng kết quả số của thuật toán và chương trình tính tự viết trong môi trường Matlab**

Xét tấm P - FGM vuông ( $a/b = 1$ ) chịu tải trọng phân bố đều, liên kết gối tựa đơn giản trên chu vi với chiều dày tấm  $h = 0,01$  (m), tỉ số  $a/h = 10$ , vật liệu FGM (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) với tính chất các vật liệu thành phần:

- Kim loại (Al):  $E_m = 70$  (GPa);  $\rho_m = 2.702$  (kg/m<sup>3</sup>)

Phân tích tĩnh và dao động riêng tấm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao đơn giản

- Ceramic ( $Al_2O_3$ ):  $E_c = 380$  (GPa);  
 $\rho_c = 3.800$  (kg/m<sup>3</sup>);

Độ võng không thứ nguyên tại tâm của tấm ( $a/2; b/2$ ) và các thành phần ứng suất của tấm được tính với  $m = n = 19$  và được so sánh với kết quả giải tích tĩnh theo lý thuyết biến dạng cắt tổng quát của Zenkour (2006) - chuyển vị biến thiên theo quy luật hàm sin và kết quả tính theo lý thuyết bậc nhất đơn giản của Thai và Kim (2013) thể hiện trên bảng 1.

Giá trị độ võng và ứng suất không thứ nguyên trong các ví dụ dưới đây tính theo Thai và Kim (2013), có dạng như sau:

$$\bar{w} = \frac{10.E_c.h^3}{q_0.a^4} . w\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right);$$

$$\bar{\sigma}_{xx}(z) = \frac{h}{q_0.a} . \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; z\right);$$

$$\bar{\sigma}_{yy}(z) = \frac{h}{q_0.a} . \sigma_{yy}\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; z\right);$$

$$\bar{\sigma}_{xy}(z) = \frac{h}{q_0.a} . \sigma_{xy}(0; 0; z);$$

$$\bar{\sigma}_{xz}(z) = \frac{h}{q_0.a} . \sigma_{xz}\left(0; \frac{b}{2}; z\right);$$

$$\bar{\sigma}_{yz}(z) = \frac{h}{q_0.a} . \sigma_{yz}\left(\frac{a}{2}; 0; z\right);$$

Qua so sánh độ võng không thứ nguyên tại tâm tấm chữ nhật FGM và các thành phần ứng suất với các chỉ số thể tích  $p = 0; 1; 10$  của bài báo với kết quả giải tích tĩnh theo Zenkour. (2006), Thai và Kim (2013) trên bảng 1 cho thấy các kết quả là tương đồng, như vậy nghiệm giải tích cũng như chương trình tính mà bài báo đã xây dựng là tin cậy.

**Ví dụ 2: Khảo sát ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích p đến độ võng**

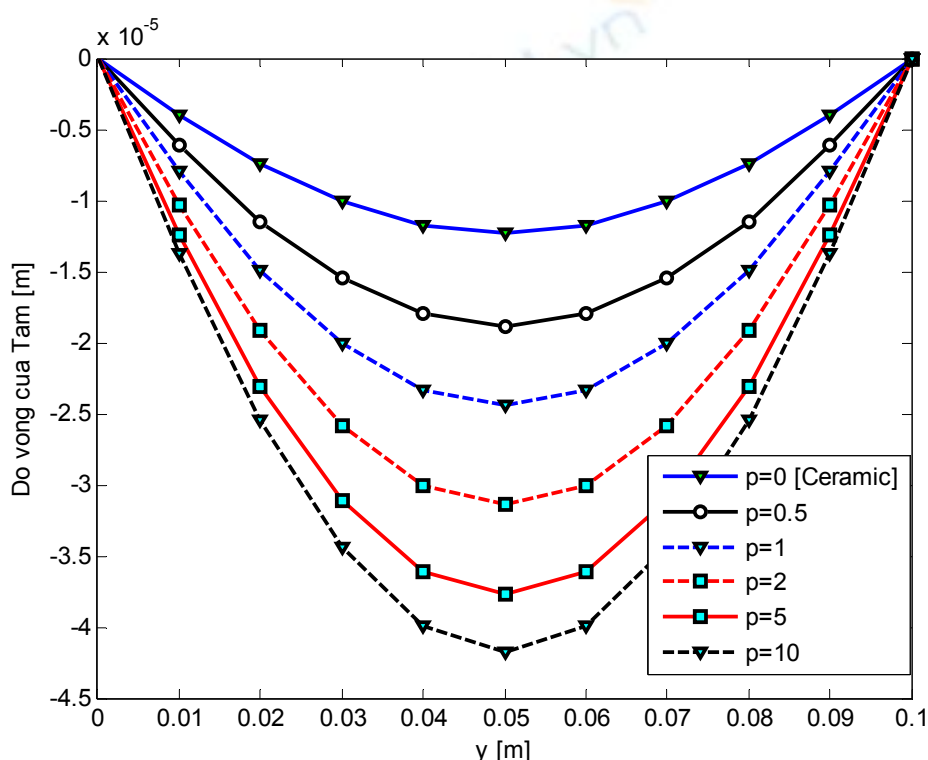
Xét tấm vuông có tỉ số  $b/a = 1$ ,  $a/h = 10$ . Độ võng tại tâm của tấm FGM với các chỉ số tỷ lệ thể tích  $p = 0; 0,5; 1; 2; 5; 10$  cho trên bảng 2. Đồ thị độ võng của tấm tại mặt cắt  $x = a/2$  với các giá trị  $p$  khác nhau biểu diễn trên hình 3.

**Bảng 1. Độ võng và các thành phần ứng suất lớn nhất không thứ nguyên của tấm vuông P- FGM liên kết khớp trên chu vi**

Mô hình	Chỉ số tỉ lệ thể tích p	Tỉ số b/a = 1					
		Tỉ số a/h = 10					
		$\bar{w}(a/2; b/2)$	$\bar{\sigma}_{xx}(h/2)$	$\bar{\sigma}_{yy}(h/3)$	$\bar{\sigma}_{xy}(-h/3)$	$\bar{\sigma}_{yz}(h/6)$	$\bar{\sigma}_{xz}(0)$
SSDT (Zenkour, 2006)	0	0.4665	2.8932	1.9103	1.2850	0.4429	0.5115
FSDT (Thai HT, 2013)		0.4666	2.8732	1.9155	1.2990	0.4004	0.4004
<b>Bài báo</b>		<b>0.4666</b>	<b>2.8913</b>	<b>1.9107</b>	<b>1.2858</b>	<b>0.3914</b>	<b>0.4953</b>
SSDT (Zenkour, 2006)	1	0.9287	4.4745	2.1692	1.1143	0.5441	0.5114
FSDT (Thai HT, 2013)		0.9288	4.4407	2.1767	1.1218	0.4923	0.4004
<b>Bài báo</b>		<b>0.9288</b>	<b>4.4713</b>	<b>2.1698</b>	<b>1.1146</b>	<b>0.5012</b>	<b>4.4953</b>
SSDT (Zenkour, 2006)	10	1.5876	7.3689	1.2820	1.0694	0.4227	0.4552
FSDT (Thai HT, 2013)		1.5697	7.2963	1.2953	1.0853	0.3074	0.2867
<b>Bài báo</b>		<b>1.5872</b>	<b>7.3625</b>	<b>1.2832</b>	<b>1.0705</b>	<b>0.3708</b>	<b>0.4377</b>

**Bảng 2. Độ võng  $w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$  và độ võng không thứ nguyên  $\bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$  tại tâm của tấm FGM  $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$**

Độ võng [m]	Tỉ số $a/h$	Tỉ số $a/b=1$					
		Chỉ số tỉ lệ thể tích ( $\rho$ )					
		0	0.5	1	2	5	10
$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$	10	-1.2E-05	-1.9E-05	-2.4E-05	-3.1E-05	-3.8E-05	-4.2E-05
$\bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$		0.4666	0.7154	0.9288	1.194	1.4349	1.5872



**Hình 3. Biểu đồ độ võng của tấm tại mặt cắt  $x = a/2$  với các chỉ số tỉ lệ thể tích  $p$  thay đổi**

Từ bảng 2 và hình 3 ta có thể thấy rằng khi chỉ số thể tích  $p$  tăng lên thì độ cứng của tấm giảm do đó làm cho độ võng của tấm tăng lên.

**Ví dụ 3: Khảo sát ảnh hưởng của tỉ số  $a/h$  đến độ võng**

Xét tấm vuông ( $b/a=1$ ), với các tỷ số  $a/h = 5; 10; 15; 20; 25; 30; 40; 50$ . Độ võng không thứ nguyên tại tâm tấm FGM với  $p = 0; 2; 5; 10$  cho

trên bảng 3. Đồ thị độ võng không thứ nguyên tại tâm của tấm biến thiên theo tỉ số  $a/h$  biểu diễn trên hình 4.

Từ bảng 3 và hình 4 ta có thể thấy rằng khi tỉ số  $a/h$  tăng thì độ võng không thứ nguyên của tấm FGM giảm. Khi chỉ số thể tích  $p$  tăng lên thì độ cứng của tấm giảm làm cho độ võng không thứ nguyên tại tâm tấm FGM tăng lên.