

## CHƯƠNG 3 - NHỮNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH THỦY TRIỀU VÀ MỤC NƯỚC

### 3.1. LÝ THUYẾT PHÂN TÍCH ĐIỀU HÈA THỦY TRIỀU

Như đó thấy, những lý thuyết về thủy triều đó giải thích được những nét cơ bản nhất trong hiện tượng thủy triều ở đại dương. Mặc dù những lý thuyết này không cung cấp những công thức tính toán chính xác để dự tính thủy triều thực tế, nhưng những tư tưởng của chúng đó chỉ ra những cách hữu hiệu để giải quyết vấn đề dự tính thủy triều. Laplace đó sử dụng cùng thức độ cao thủy triều tĩnh học của Newton (1.11), đưa thêm vào những hiệu chỉnh về biên độ và pha để nhận công thức bán thực nghiệm dự tính thủy triều như sau

$$\bar{\zeta} = \frac{3}{2} \frac{kM\rho^2}{gr^3} \left\{ \frac{(1-3\sin^2\delta)(1-3\sin^2\varphi)}{6} + \frac{P_1}{2} \sin 2\varphi \sin 2\delta \cos(A-\phi_1) + \frac{P_2}{2} \sin 2\varphi \sin 2\delta \cos(2A-\phi_2) \right\},$$

trong đó  $P_1, P_2, \phi_1, \phi_2$  - những hiệu chỉnh được xác định từ quan trắc

thực tế. Nếu ở trạm nào đó ngự trị thành phần triều bán nhật và ở đó có chuỗi số liệu quan trắc thờ cú thể tính những trị số chính xác của các hiệu chỉnh trên và sau đó dùng công thức bán thực nghiệm để dự tính thủy triều trong tương lai. Tư tưởng trên đây của Laplace được Thomson và Darwin phát triển tiếp thành *phương pháp phân tích điều hòa thủy triều*. Thực chất của phương pháp này là biểu thức hàm thế vị của thủy triều tĩnh học của Newton (1.6), trong đó các đại lượng  $Z$  - góc thiên đỉnh của Mặt Trăng và  $r$  - khoảng cách từ tâm Trái Đất đến Mặt Trăng, là những hàm phụ thuộc phức tạp vào thời gian thông qua một số đặc trưng thiên văn, được khai triển thành dạng tổng của chuỗi những hàm điều hòa đơn giản dạng

$$\sum C \cos V,$$

trong đó  $C$  - biên độ;  $V$  - pha dao động; ở đây  $C$  và  $V$  về phía mênh lại phụ thuộc vào một số đặc trưng thiên văn, nhưng có thể coi là thực tế không đổi trong một khoảng thời gian nào đó và có thể tính trước được như những giá trị trung bình của chúng trong khoảng thời gian đó. Mỗi một dao động đơn  $C \cos V$ , gọi là *phần triều*, được xem như một thủy triều độc lập gây bởi tác động của một tinh tú giả định quay theo quỹ đạo tròn trong mặt phẳng xích đạo, mỗi tinh tú ấy có tốc độ góc  $q$  của riêng nó. Mức độ chi tiết của khai triển nhằm đáp ứng yêu cầu sao cho biên độ  $C$  và pha  $V$  của mỗi phần triều có thể xem là những đại lượng thực tế không biến đổi trong một khoảng thời gian nào đó, thí dụ một ngày, một năm. Tuy theo phương pháp khai triển mà số lượng các hàm điều hòa đơn giản có thể khác nhau. Trong công thức khai triển đầy đủ gồm cả thế vị của Mặt Trăng và thế vị Mặt Trời người ta thường đánh số thứ tự của mỗi số hạng khai triển [2] và những số hạng nào có trị số của biên độ  $C$  lớn đáng kể, tức có tỷ trọng tương đối lớn trong tổng, thờ được đặt tên, ký hiệu bằng một vài chữ cái hay chữ cái cộng với chữ số. Thờ dụ trong bảng 3.1 (theo [4]) dẫn một số số hạng khai triển quan trọng nhất được

gọi là những phân triều chính. Từ bảng 3.1 thấy rằng biên độ và pha của các hàm điều hòa đơn phụ thuộc vào các tham số thiên văn, những tham số thiên văn này là những đại lượng phụ thuộc thời gian nhưng có thể tính trước như là trị số trung bình trong một khoảng thời gian nào đó.

$$z_t = A_0 + \sum_{i=1}^r f_i H_i \cos(V_i + u_i - k_i), \quad (3.1)$$

Theo lý thuyết phân tích điều hòa hiện đại, độ cao thủy triều thực tại trạm quan trắc trên số không độ sâu vào thời điểm  $t$  cũng có thể biểu diễn bằng tổng của các phân triều qua biểu thức tổng quát như sau:

trong đó  $A_0$  – độ cao của mực trung bình trên số khụng trạm (hoặc số khụng độ sâu);  $f_i$  – những hệ số phụ thuộc các yếu tố thiên văn, gọi là những hệ số suy biến;  $H_i$  – những giá trị trung bình của biên độ phân triều;  $V_i + u_i$  – những phân pha thiên văn của các phân triều biểu diễn các góc giờ của những tinh tú giả định tại thời điểm  $t$ ;  $k_i$  – những góc vị đặc trưng cho hiệu giữa pha phân triều và pha của lực tạo triều.

Thấy rằng trong công thức (3.1) đối với phân biên độ của mỗi phân triều người ta bổ sung đại lượng  $H$  đặc trưng cho biên độ trung bình và đối với đối số của mỗi phân triều đó bổ sung đại lượng  $k$  đặc trưng hiệu pha giữa lực tạo triều và thủy triều thực tại điểm quan trắc cụ thể.

Những đối số thiên văn của các phân triều chứa hai số hạng: số hạng  $V_i$ , mà góc giờ của nó biến thiên hoàn toàn tỷ lệ thuận thời gian với tốc độ bằng tốc độ góc của phân triều  $q_i$ , và số hạng  $u_i$ , mà giá trị biến thiên tuần hoàn phụ thuộc vào kinh độ tiết điểm lên của quỹ đạo Mặt Trăng  $N$ . Do đó

$$V_i = V_{0i} + q_i t, \quad (3.2)$$

trong đó  $V_{0i}$  ứng với thời điểm đầu quan trắc, tức thời điểm  $t = 0$ , và phương trình (3.1) có thể biểu diễn dưới dạng sau:

$$z_t = A_0 + \sum f_i H_i \cos[q_i t + (V_0 + u)_i - k_i]. \quad (3.3)$$

Những góc vị  $k_i$  có thể được tính theo thời gian địa phương trung bình hay thời gian mặt trời trung bình. Người ta thường ký hiệu:  $K$  – góc vị theo thời gian địa phương trung bình;  $K'$  – góc vị theo thời gian mặt trời trung bình. Các đại lượng này liên hệ với nhau bằng công thức:

$$K' = K + p dS^\circ, \quad (3.4)$$

trong đó  $dS^\circ = \lambda^\circ - S^\circ$ ;  $\lambda^\circ$  – kinh độ trạm quan trắc tính bằng độ (kinh độ tính từ Greenwich, phía tây với dấu cộng, phía đông với dấu trừ);  $S^\circ$  – kinh độ tính bằng độ của kinh tuyến trung tâm của múi giờ quan trắc được thực hiện;  $p$  – số chu kỳ của phân triều chứa trong một ngày đêm (với nhật triều  $p = 1$ , bán nhật triều  $p = 2$ , triều một phần tư ngày  $p = 4$  v.v...).

Tùy thuộc thời gian thực hiện quan trắc, biểu thức độ cao mực nước thủy triều (3.3) có thể viết dưới dạng:

a) Khi quan trắc theo thời gian địa phương trung bình:

$$z_t = A_0 + \sum f_i H_i \cos \left[ q_i t + \text{Gr.}(V_0 + u)_i + \left[ \frac{q_i}{15} - p_i \right] \lambda^\circ - K_i \right],$$

b) Khi quan trắc theo thời gian mặt trời trung bình:

$$z_t = A_0 + \sum f_i H_i \cos \left[ q_i t + \text{Gr.}(V_0 + u)_i + \left[ \frac{q_i}{15} - p_i \right] S^\circ - p_i dS^\circ - K_i \right],$$

hay

$$z_t = A_0 + \sum f_i H_i \cos \left[ q_i t + \text{Gr.}(V_0 + u)_i + \left[ \frac{q_i}{15} - p_i \right] S^\circ - K'_i \right],$$

trong đó  $\text{Gr.}(V_0 + u)$  – góc giờ của tinh tú giả định vào thời điểm đầu quan trắc trên kinh tuyến Greenwich.

Nếu không đưa vào những hiệu chỉnh cho kinh độ địa phương hay múi giờ, tức quy ước chấp nhận rằng các quan trắc được tiến hành theo thời gian Greenwich trung bình, thì góc vị nhận được trong trường hợp này của các phân triều được quy ước gọi là các góc vị đặc biệt và ký hiệu bằng chữ còi  $g^\circ$ . Trong mọi trường hợp sử dụng các góc vị đặc biệt nhất thiết ta phải chỉ rõ thời gian mà góc vị đó tương ứng (kinh độ của kinh tuyến tính bằng độ).

Biểu thức của độ cao mực nước (3.3) trong trường hợp này có thể biểu diễn thành

$$z_t = A_0 + \sum f_i H_i \cos[q_i t + (V_0 + u)_i - g_i^\circ]. \quad (3.5)$$

Ngày nay thường phổ biến việc dự tính thủy triều với việc sử dụng những góc vị đặc biệt, vờ khi đó không cần thiết phải dẫn đại lượng  $Gr.(V_0 + u)_i$  tới kinh tuyến địa phương hoặc kinh tuyến múi giờ. Tiếp sau đây trong mọi trường hợp chúng ta sẽ sử dụng phương án này để biểu diễn độ cao thủy triều. Khi cần thiết có thể tính chuyển các góc vị đặc biệt sang các góc vị theo giờ địa phương hoặc múi giờ theo những công thức sau:

a) Khi quan trắc theo thời gian địa phương trung bình:

$$K = g^\circ - \left[ p - \frac{q}{15} \right] \lambda^\circ,$$

b) Khi quan trắc theo thời gian mỳi giờ trung bình:

$$K = g^\circ - p d S^\circ - \left[ p - \frac{q}{15} \right] S^\circ,$$

$$K' = g^\circ - \left[ p - \frac{p}{15} \right] S^\circ.$$

Tốc độ góc của các phân triều không đổi và được xác định bằng lý thuyết, những phần thườn văn của biên độ và pha của các phân triều được

tính tự thuộc vào vị trí của Mặt Trăng và Mặt Trời. Các biên độ  $H$  và góc vị  $g$ , gọi là những hằng số điều hũa, chỉ phụ thuộc vào những điều kiện địa phương của địa điểm quan trắc và được xác định từ kết quả quan trắc thủy triều. Việc xác định những đại lượng này từ trong hệ các phương trình (3.5) chính là nhiệm vụ của *phân tích điều hũa thủy triều*. Số lượng các phương trình là do độ dài quan trắc quy định.

Khi những hằng số điều hũa thủy triều  $H$  và  $g$  đó được xác định đối với từng phân triều cho một địa điểm hay một cảng cụ thể, thì việc *dự tính thủy triều* chính là tính độ cao mực nước thủy triều cho từng giờ  $t$  của ngày bất kỳ trong tương lai theo biểu thức độ cao mực nước thủy triều (3.5). Khi tính theo biểu thức (3.5) những giá trị của các đại lượng thiên văn như  $f$ ,  $V_0$  và  $u$ , là những hàm đã biết của thời gian, có thể tra bảng hoặc tính trước theo các công thức đã biết (xem mục 3.4). Rừ ràng độ chính xác của dự tính thủy triều phụ thuộc vào hai yếu tố, đó là những hằng số điều hũa đã được tính chính xác không và số lượng các phân triều có mặt trong công thức tổng quát của mực nước (3.5) có đầy đủ không. Cả hai yếu tố này phụ thuộc vào độ dài chuỗi quan trắc mực nước đó để từ đó phân tích ra các hằng số điều hũa thủy triều.

Những hằng số điều hũa thủy triều  $H_i$  và  $g_i$  chính xác nhất có thể được xác định từ hệ các phương trình (3.5) bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất. Việc sử dụng phương pháp này đòi hỏi một khối lượng lớn các tính toán phức tạp, vờ vậy trước đây người ta hay sử dụng các phương pháp tổ hợp sóng như phương pháp Darwin và phương pháp Doodson. Những phương pháp này cho phép xác định gần đúng các hằng số điều hũa thủy triều, nhưng đủ đáp ứng yêu cầu thực tiễn về dự báo mực nước và nhiều tính toán khác. Phương pháp Darwin đòi hỏi chuỗi quan trắc độ dài nửa tháng hoặc một tháng để phân tích ra các hằng số điều hũa của 8 hoặc 11 sóng, phương pháp Doodson phân tích được bốn sóng trên cơ sở chuỗi quan trắc độ dài một ngày đêm. Ngày nay những

phương pháp này vẫn cũn được ứng dụng, nhất là đối với những quan trắc đưng triều. Trong cộc mục tiếp sau sẽ giới thiệu nguyên lý của những phương pháp này. Do quy trình tóh toán phõn tóh thủy triều thường phức tạp, nên trong thực tiễn phân tích điều hũa, người ta đó xõy dựng những sơ đồ chuyên dụng tiện ích cho các tính toán.

**Bảng 3.1. Hệ số và đối số của một số phân triều chính (trích từ [4])**

Ký hiệu sóng	Tên phân triều	Hệ số gồm phần chung bằng $\frac{3}{2} \frac{M}{E} \left[ \frac{a}{c} \right]^3 a$ nhân với phần riêng của từng phân triều	Giá trị trung bình của hệ số
$M_2$	Mặt Trăng chính	$\left[ \frac{1}{2} - \frac{5}{4} e^2 \right] \cos^4 \frac{I}{2}$	0,4543
$N_2$	Mặt Trăng đường elliptic lớn	$\frac{7}{4} e^2 \cos^4 \frac{I}{2}$	0,0880
$S_2$	Mặt Trời chính	$\left[ \frac{1}{2} - \frac{5}{4} e_1^2 \right] G \cos \frac{\omega}{2}$	0,2120
$K_1$	Mặt Trăng – Mặt Trời độ thiên	Xem chỳ thớch 1	0,0576
$O_1$	Mặt Trăng chính	$\left[ \frac{1}{2} - \frac{5}{4} e_1^2 \right] \sin I \cos^2 \frac{I}{2}$	0,1886
$Q_1$	Mặt Trăng đường elliptic lớn	$\frac{7}{4} e \sin I \cos^2 \frac{I}{2}$	0,0365
$P_1$	Mặt Trời chính	$\left[ \frac{1}{2} - \frac{5}{4} e_1^2 \right] G \sin \omega \cos^2 \frac{\omega}{2}$	0,0880
$K_2$	Mặt Trăng – Mặt Trời độ thiên	Xem chú thích 2	0,2655

Ký hiệu sóng	Đối số V gồm phần (v) và (u)		Tốc độ góc trong 1 giờ $q$
	(v)	(u)	
$M_2$	$2t + 2h - 2s$	$+2\xi - 2\nu$	$28,98410^\circ$
$N_2$	$2t + 2h - 3s + p$	$+2\xi - 2\nu$	$28,43973^\circ$
$S_2$	$2t$	-	$30,00000^\circ$
$K_1$	$2t + 2h$	$2\nu''$	$30,08214^\circ$
$O_1$	$t + h - 2s - 90^\circ$	$+2\xi - \nu$	$13,94304^\circ$
$Q_1$	$t + h - 3s + p - 90^\circ$	$+2\xi - \nu$	$13,39867^\circ$
$P_1$	$t - h - 90^\circ$	-	$14,95893^\circ$
$K_2$	$t - h + 90^\circ$	$-\nu'$	$15,04107^\circ$

Chú thích 1:

$$K_2 = [(1/4 + 3/8e^2) \sin^4 I + (1/4 + 3/8e_1^2) G^2 \sin^4 \omega + 2(1/4 + 3/8e^2)^2 (1/4 + 3/8e_1^2) G \sin^2 I \sin^2 \omega \cos 2\nu]^{1/2}$$

Chú thích 2:

$$K_1 = [(1/4 + 3/8e^2)^2 \sin^2 2I + (1/4 + 3/8e_1^2) G^2 \sin^2 \omega + 2(1/4 + 3/8e^2)^2 (1/4 + 3/8e_1^2) G \sin 2I \sin 2\omega \cos \nu]^{1/2}$$

$$\text{Các ký hiệu trong bảng: } G = \frac{S}{M} \left[ \frac{c}{c_1} \right]^2$$

$M$  – khối lượng Mặt Trăng,  $E$  – khối lượng Trái Đất,  $S$  – khối lượng Mặt Trời,  $\rho$  – bán kính trung bõnh Trõi Đất,  $a$  – khoảng cõch trung bõnh từ Trõi Đất đến Mặt Trăng,  $c_1$  – khoảng cõch trung bõnh từ Trõi Đất đến Mặt Trời,  $e$  – độ lệch tâm quỹ đạo Mặt Trăng,  $e_1$  – độ lệch tâm quỹ đạo Trái Đất,  $\omega$  – gúc nghiêng mặt phẳng hoàng đạo so với mặt phẳng xích đạo,  $I$  – gúc nghiêng của quỹ đạo Mặt Trăng so với mặt phẳng xích đạo,  $\xi$  – kinh độ giao điểm quỹ đạo

Mặt Trăng với mặt phẳng xích đạo,  $\nu$  – kinh độ tiết điểm lên của quỹ đạo Mặt Trăng,  $h$  – kinh độ trung bình của Mặt Trời;  $s$  – kinh độ trung bình của Mặt Trăng;  $p$  – kinh độ trung bình cận điểm quỹ đạo Mặt Trăng.

### 3.2. PHÂN TÍCH ĐIỀU HÈA THỦY TRIỀU BẰNG PHƯƠNG PHÁP DARWIN

Nếu quy ước sử dụng các góc vị đặc biệt, công thức độ cao thủy triều (3.5) được viết gọn lại dưới dạng

$$z_t = A_0 + \sum f_i H_i \cos[q_i t + (V_0 + u)_i - g_i]. \quad (3.6)$$

Nếu dùng các ký hiệu

$$R = fH; \quad -\zeta = (V_0 + u) - g,$$

ta viết lại (3.6) dưới dạng

$$z_t = A_0 + \sum R_i \cos(q_i t - \zeta_i). \quad (3.7)$$

Như vậy nếu có chuỗi quan trắc mực nước  $z_t$  nhiệm vụ của phân tích điều hòa là xác định  $R$  và  $\zeta$  trong công thức (3.8) và sau đó tính  $H$  và  $g$  theo các biểu thức (3.7), cụ thể là

$$H = \frac{R}{f}; \quad g = \zeta + (V_0 + u). \quad (3.8)$$

Mỗi phần tử (sóng thành phần) trong dao động thủy triều có thể biểu thị như sau:

$$R \cos(qt - \zeta) = R \cos qt \cos \zeta + R \sin qt \sin \zeta.$$

Nếu quy ước

$$R \cos \zeta = A; \quad R \sin \zeta = B, \quad (3.9)$$

ta có

$$R \cos(qt - \zeta) = A \cos qt + B \sin qt, \quad (3.10)$$

trong đó  $A$  và  $B$  là những đại lượng chưa biết có chứa  $R$  và  $\zeta$ .

Việc tìm những đại lượng chưa biết  $\zeta$  và  $R$  quy về xác định các đại lượng  $A$  và  $B$  cho tất cả các sóng triều. Khi đó biết  $A$  và  $B$ , tìm  $\zeta$  và  $R$  theo các công thức:

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{B}{A}; \quad \sqrt{R = A^2 + B^2} = A \operatorname{sec} \zeta = B \operatorname{cosec} \zeta. \quad (3.11)$$

Nếu xem xét chu kỳ của các sóng thủy triều có thể nhận thấy rằng chỉ có một số ít các sóng, thí dụ như  $M_2, M_4, M_6, K_1, K_2, \dots$  có chu kỳ là bội số của nhau. Mặt khác có những *nhóm sóng* có chu kỳ rất gần nhau và hầu như trùng với các chu kỳ một ngày, nửa ngày, một phần tư ngày. Việc tách những sóng riêng rẽ ra khỏi các nhóm này là một việc khá khó khăn. Darwin đó đề xuất một phương pháp lọc sóng đặc biệt cho phép loại trừ tất cả những sóng khác có chu kỳ gần với chu kỳ của sóng cần quan tâm từ đường cong biến trởnh mực nước.

Người ta giải thích nguyên lý của phương pháp Darwin phân tích thủy triều như sau [2]:

Quy ước gọi khoảng thời gian bằng  $1/24$  ngày sóng là một *giờ sóng*. Khi đó *ngày sóng* đối với các sóng triều toàn nhật sẽ bằng chu kỳ của chúng, đối với các sóng triều bán nhật sẽ bằng chu kỳ nhân đôi, đối với các sóng một phần tư ngày sẽ bằng chu kỳ nhân bốn... Với chu kỳ các sóng triều khác nhau, nờn giờ sóng cũng giống nhau. Thờ dụ, sóng triều  $S_2$  có chu kỳ bằng 12 giờ, ngày sóng của nó sẽ là 24 giờ, cữn giờ sóng của nó sẽ là 1 giờ trung bõnh. Súng  $M_2$  có chu kỳ bằng 12,42 giờ, ngày sóng sẽ bằng 24,84 giờ và giờ sóng sẽ là 1,035 giờ trung bõnh.

Có thể viết lại phương trởnh độ cao mực nước (3.8) dưới dạng:

$$z_t = A_0 + R_{M_2} \cos(q_{M_2} t - \zeta_{M_2}) + R_{S_2} \cos(q_{S_2} t - \zeta_{S_2}) + \dots$$

hoặc

$$z_t = A_0 + R_q \cos(qt - \zeta_q) + R_{2q} \cos(2qt - \zeta_{2q}) + \dots$$

Bây giờ giả sử tốc độ góc của sóng triều mà ta cần xét là  $q$ . Số hạng đầu của chuỗi trên đây ứng với sóng này. Số hạng thứ hai là những sóng có tốc độ góc là bội số của  $q$ , thứ tự  $m q$ , và số hạng thứ ba là sóng với tốc độ góc khác  $q$  và khụng là bội số của  $q$ , ta ký hiệu tốc độ góc đó bằng  $q'$ . Khi đó độ cao mực nước thủy triều ứng với thời điểm  $t$  biểu diễn bằng tổng

$$R_q \cos(qt - \zeta_q) + R_{mq} \cos(mqt - \zeta_{mq}) + R_{q'} \cos(q't - \zeta_{q'}).$$

Nếu từ đường cong độ cao mực nước trong  $n$  ngày sụng, bắt đầu từ giờ  $t$  tùy ý nào đó thuộc ngày sụng thứ nhất, ta lấy cộc tung độ ứng với những thời điểm

$$t, \quad t + \frac{360}{q}, \quad t + 2\frac{360}{q}, \quad \dots, \quad t + (n-1)\frac{360}{q}$$

cách nhau đúng một chu kỳ sụng, thờ trị số của cộc tung độ ấy được biểu thị tuần tự như sau:

$$R_q \cos(qt - \zeta_q) + R_{mq} \cos(mqt - \zeta_{mq}) + R_{q'} \cos(q't - \zeta_{q'}),$$

$$R_q \cos(qt - \zeta_q) + R_{mq} \cos(mqt - \zeta_{mq}) + R_{q'} \cos(q't + q' \frac{360}{q} - \zeta_{q'}),$$

$$R_q \cos(qt - \zeta_q) + R_{mq} \cos(mqt - \zeta_{mq}) + R_{q'} \cos(q't + 2q' \frac{360}{q} - \zeta_{q'}),$$

.....

Cộng các tung độ này, ta sẽ được

$$nR_q \cos(qt - \zeta_q) + nR_{mq} \cos(mqt - \zeta_{mq}) + \sum_{n=0}^{n=n-1} R_{q'} \cos\left[q't + n \frac{360}{q} q' - \zeta_{q'}\right]$$

hay

$$nR_q \cos(qt - \zeta_q) + nR_{mq} \cos(mqt - \zeta_{mq}) + R_{q'} \cos(q't - \zeta_{q'}) \sum_{n=0}^{n=n-1} \cos nq' \frac{360}{q} - R_{q'} \sin(q't - \zeta_{q'}) \sum_{n=0}^{n=n-1} \sin nq' \frac{360}{q}.$$

Những biểu thức trong dấu  $\sum$  ở hai số hạng cuối cùng về phải là tổng của các cosin và sin của các cung trong cấp số cộng, và được biết rằng các tổng này sẽ bằng không nếu  $\frac{nq'}{q}$  bằng số nguyên. Do đó, nếu ta

chọn số  $n$  ngày sụng sao cho  $\frac{nq'}{q}$  là số nguyên, thì hai số hạng cuối

cùng này sẽ bằng không. Trung bình của tất cả các tung độ đã lấy bằng tổng hai số hạng đầu chia cho  $n$

$$R_q \cos(qt - \zeta_q) + R_{mq} \cos(mqt - \zeta_{mq}),$$

sẽ là tung độ trung bình của sóng triều đang xét với tốc độ góc  $q$  gộp với các tung độ của các sóng với tốc độ góc là bội số của  $q$ . Tập hợp những sóng này gọi là *loạt sóng* (thí dụ loạt  $M$ , loạt  $S$  v.v...).

Bằng cách cộng các độ cao mực nước như trên ta đã loại trừ được một sóng triều có tốc độ góc khác với  $q$ , nhưng trong biểu thức của độ cao thủy triều  $z$  có một chuỗi các sóng triều khác nhau, có tốc độ khác với tốc độ  $q$ , vậy là ứng với mỗi  $q'$  sẽ có một giá trị  $n$  riêng biệt, được xác định bằng điều kiện  $\frac{nq'}{q}$  là số nguyên. Vì vậy, không thể chọn được

$n$  sao cho trong tung độ trung bình loại trừ ảnh hưởng của tất cả các sóng. Trong thực hành, người ta hạn chế ở việc loại trừ sóng nào có biên độ lớn nhất. Về điều này có thể nhận định dựa theo trị số của các hệ số các sóng triều riêng biệt. Như vậy thu được tung độ của sóng triều cần tìm có cộng thêm với các tung độ của những sóng triều với tốc độ góc là bội số, hoặc như người ta nói, tung độ của *loạt sóng triều* tại thời điểm  $t$ .

Chia ngày sóng của từng sóng triều cho 24, người ta nhận được một đại lượng gọi là giờ sóng:

$$\frac{360}{24q} = \frac{15}{q}.$$

Trong tính toán thủy triều người ta coi gốc thời gian của ngày trung bình và ngày sóng bất kỳ là nửa đêm trung bình của ngày quan trắc đầu tiên; vào thời điểm này  $t = 0$  giờ. Bây giờ cho  $t$  những giá trị

$$0; \frac{15}{q}, \frac{2.15}{q}, \dots, \frac{23.15}{q},$$

ta có thể lấy từ đường cong những tung độ ứng với từng giờ sóng trong vòng  $n$  ngày sóng.

Bây giờ ta xét cách chọn số ngày  $n$  khi xác định tung độ của các sóng triều chính nhằm mục đích loại trừ ảnh hưởng của các sóng khác.

Sau một chu kỳ ( $\frac{360^\circ}{q}$  giờ) sóng cần tìm dịch chuyển về pha  $q \frac{360^\circ}{q}$ , còn sóng bị loại dịch chuyển pha  $q' \frac{360^\circ}{q}$ , do đó, trong thời gian này các sóng dịch chuyển tương đối so với nhau một khoảng  $(q - q') \frac{360^\circ}{q}$ . Khi khoảng dịch chuyển đạt  $360^\circ$ , sóng có tốc độ góc  $q'$  đi qua tất cả các vị trí có thể có so với sóng có tốc độ góc  $q$ . Nếu điều này diễn ra trong  $n$  ngày (hay chu kỳ) của sóng có tốc độ góc  $q$ , thì

$$n(q - q') \frac{360^\circ}{q} = 360^\circ,$$

từ đó

$$n = \frac{q}{q - q'} . \quad (3.12)$$

Đại lượng  $n$  nhận được theo công thức này sẽ cho số chu kỳ sóng tối thiểu cần tìm của sóng với tốc độ  $q$ , nhưng để loại trừ tốt hơn sự ảnh hưởng của các sóng khác (tốc độ  $q''$ ,  $q'''$ ...) người ta cần lấy  $n$  lớn hơn nếu có thể, chỉ cần là bội của giá trị  $n$  nhỏ nhất. Vì vậy nếu ký hiệu  $m$  là số nguyên bất kỳ, nhận được

$$n = \frac{q}{q - q'} m ,$$

hay đối với các sóng triều toàn nhật

$$(q - q') n = q m$$

và đối với các sóng triều bán nhật

$$(q - q') n = \frac{q m}{2} .$$

Cũng có thể lý giải phương pháp trên đây của Darwin theo cách hình học như sau. Giả sử độ cao mực nước thủy triều  $z_t$  chỉ gồm hai sóng triều ( $M_2$  và  $S_2$ ) có chu kỳ gần bằng nhau và có biên độ  $H$  và  $g$  khác nhau, ta viết

$$z_t = z_t^{M_2} + z_t^{S_2} = H_{M_2} \cos(q_{M_2} t - g_{M_2}) + H_{S_2} \cos(q_{S_2} t - g_{S_2}) .$$

Do sự chênh lệch về chu kỳ dao động, hiệu pha giữa hai sóng triều bất kỳ sẽ tăng dần từ ngày triều này sang ngày triều khác. Nếu ở ngày thứ nhất hiệu pha giữa sóng  $S_2$  và  $M_2$  là  $\varphi_1$  (xem hình 3.1), thì ở ngày thứ hai hiệu đó sẽ bằng  $\varphi_2$ , ngày thứ ba -  $\varphi_3$ ... Sau một số ngày nhất định hiệu pha đạt  $360^\circ$ , tức hai sóng lại trùng nhau về pha. Khi khoảng dịch chuyển đạt  $360^\circ$ , sóng có tốc độ góc  $S_2$  đi qua tất cả các vị trí có thể có so với sóng có tốc độ góc  $M_2$ .

Ta sẽ sử dụng những khái niệm trên đây để tách từ độ cao mực nước tổng cộng

$$z_t = z_t^{M_2} + z_t^{S_2} = H_{M_2} \cos(q_{M_2} t - g_{M_2}) + H_{S_2} \cos(q_{S_2} t - g_{S_2})$$

những sóng triều

$$z_t^{M_2} = H_{M_2} \cos(q_{M_2} t - g_{M_2}),$$

$$z_t^{S_2} = H_{S_2} \cos(q_{S_2} t - g_{S_2}).$$

Muốn vậy phải cộng các độ cao từng giờ  $z_t$  lấy ở cùng một giờ sóng  $M_2$  ở mỗi ngày sóng trong  $n$  ngày. Trên hình 3.1 thấy rằng các tung độ của sóng triều  $M_2$  tại cùng một giờ sóng ở tất cả các ngày đều như nhau. Trong khi tại chính những giờ đó tung độ của sóng triều  $S_2$  khác nhau cả về trị số lẫn dấu. Dễ nhận thấy rằng tổng của tất cả các tung độ của sóng triều  $S_2$  trong  $n$  ngày sóng sẽ bằng không.

Như vậy đối với một giờ bất kỳ của sóng  $M_2$  đẳng thức

$$\sum_1^n z_t = \sum_1^n z_t^{M_2} + \sum_1^n z_t^{S_2}$$

sẽ trở thành

$$\sum_1^n z_t = \sum_1^n z_t^{M_2} = n z_t^{M_2}$$

vì  $\sum_1^n z_t^{S_2} = 0$  và tung độ sóng triều  $M_2$  không đổi. Từ đó ta có công thức tính độ cao mực nước của sóng triều  $M_2$ :

$$z_t^{M_2} = \frac{1}{n} \sum_1^n z_t.$$

Công thức trên đúng cho bất kỳ giờ sóng nào của sóng triều  $M_2$ ,

vậy nó cho phép tách 24 tung độ của sóng triều  $M_2$  ra khỏi tung độ tổng cộng của đường cong mực nước tổng cộng quan trắc  $z_t$ .

Nếu thực hiện cộng các tung độ  $z_t$  theo các ngày sóng của sóng triều  $S_2$  thì sóng triều  $M_2$  sẽ bị loại và ta cũng được 24 trị số tung độ của sóng triều  $S_2$ .

Kết quả là cho mỗi sóng triều ta có 24 phương trình dạng:

$$z_t^{M_2} = H_{M_2} \cos(q_{M_2} t - g_{M_2}).$$

Biến đổi cosin hiệu hai góc và quy ước ký hiệu

$$H_{M_2} \cos g_{M_2} = A_{M_2}; \quad H_{M_2} \sin g_{M_2} = B_{M_2},$$

ta có 24 phương trình (cho từng giờ nguyên từ 0 đến 23 giờ) dạng

$$z_t^{M_2} = A_{M_2} \cos q_{M_2} t + B_{M_2} \sin q_{M_2} t.$$

để xác định hai ẩn số  $A$  và  $B$  theo phương pháp bình phương nhỏ nhất:

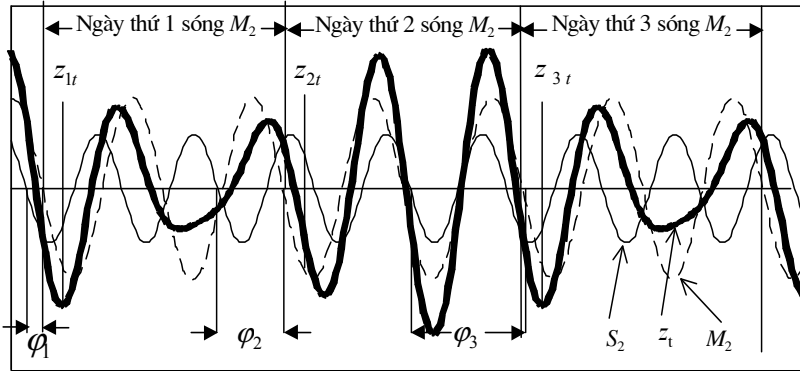
$$\begin{aligned} A_{M_2} &= \frac{1}{12} \sum_0^{23} z_t^{M_2} \cos q_{M_2} t, \\ B_{M_2} &= \frac{1}{12} \sum_0^{23} z_t^{M_2} \sin q_{M_2} t. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Để xác định  $A$  và  $B$  cho mỗi sóng triều có thể chỉ cần hai phương trình cũng đủ nếu như tung độ tách ra hoàn toàn “tinh khiết”. Tuy nhiên, độ cao thủy triều tổng cộng không phải chỉ gồm hai, mà nhiều sóng triều. Khi thực hiện cộng các tung độ của đường cong mực nước theo phương pháp Darwin, rõ ràng ta chỉ loại trừ một cách hoàn toàn được một sóng triều, các sóng triều khác chưa loại hết, ảnh hưởng đến sóng triều cần tách ra, mục đích sử dụng các công thức dạng (3.13) của phương pháp bình phương nhỏ nhất là để giảm bớt sai số khi phân tích sóng triều.

Bằng cách tương tự ta xác định các hệ số  $A$  và  $B$  cho những sóng



triều khác. Theo nguyên tắc trên, người ta xây dựng những *biểu mẫu chuyên dụng* tiện lợi trong khi phân tích thủy triều.



Hình 3.1. Giải thích phương pháp phân tích thủy triều của Darwin

Bảng 3.2. Số ngày triều cần thiết để áp dụng sơ đồ Darwin

Sóng triều				Số ngày cần quan trắc	
Được tính		Bị loại		Chuỗi nửa tháng	Chuỗi một tháng
Ký hiệu	$q$ (°/giờ)	Ký hiệu	$q$ (°/giờ)		
$S_2$	30,000000	$M_2$	28,984104	15	30
$M_2$	28,984104	$S_2$	30,000000	14	29
$K_2$	30,082137	$M_2$	28,984104	14	27
$N_2$	28,439730	$M_2$	28,984104	–	26
$O_1$	13,943036	$K_1$	15,041069	13	25
$P_1$	14,958931	$O_1$	13,943036	15	29
$Q_1$	13,398661	$K_1$	15,041069	13	25
$K_1$	15,041069	$O_1$	13,943036	14	27
$MS_4$	58,984104	$M_4$	57,968208	–	29

Các công thức (3.12) xác định số ngày triều tối thiểu cần thiết  $n$  phải quan trắc để thực hiện phân tích thủy triều theo sơ đồ Darwin. Trong bảng 3.2 dẫn số ngày triều tối thiểu phải quan trắc ứng với một số cặp sóng triều chính. Số ngày triều tối thiểu cần thiết là 15 ngày, tức cần chuỗi nửa tháng. Muốn xác định độc lập các hằng số điều hòa của các cặp sóng triều  $N_2 - K_2$ ,  $P_1 - Q_1$  người ta lấy chuỗi quan trắc triều dài gấp đôi, bằng 30 ngày.

### 3.3. PHÂN TÍCH ĐIỀU HÒA BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀNG HẢI

Doodson và Warburg, những người đề xuất phương pháp phân tích này, cho rằng những đặc điểm chính của thủy triều được quy định bởi bốn sóng chính  $M_2, S_2, K_1, O_1$ . Những hằng số điều hòa của chúng chịu ảnh hưởng của các điều kiện địa lý mạnh hơn so với những sóng khác. Những sóng  $N_2, P_1, K_2, Q_1$  ít chịu ảnh hưởng của các điều kiện địa phương và chúng có thể được xác định một cách gần đúng theo bốn sóng chính nhờ những hệ thức rút ra từ lý thuyết phân tích điều hòa thủy triều. Do đó, nếu gộp các sóng  $N_2, P_1, K_2, Q_1$  vào các sóng  $M_2, S_2, K_1, O_1$  thì công thức độ cao mực nước thủy triều (3.6) sẽ có dạng

$$\begin{aligned}
 z = & A_0 + H_{S_2} B_S C_S \cos[q_{S_2} t - (b_S + c_S + g_{S_2})] + \\
 & + H_{M_2} B_M C_M \cos[q_{M_2} t - (b_M + c_M + g_{M_2})] + \\
 & + H_{K_1} B_K C_K \cos[q_{K_1} t - (b_K + c_K + g_{K_1})] + \\
 & + H_{O_1} B_O C_O \cos[q_{O_1} t - (b_O + c_O + g_{O_1})].
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Trong công thức trên những hiệu chỉnh  $B, C$  và  $b, c$  thực chất là những hệ số hiệu chỉnh cho biên độ (gọi là hệ số suy biến) và những phần pha thiên văn để tính tới sự cộng gộp các sóng  $N_2, P_1, K_2, Q_1$  vào các sóng chính  $M_2, S_2, K_1, O_1$ . Hiệu chỉnh  $B, b$  phụ thuộc vào năm và ngày quan trắc;  $C$  phụ thuộc vào thị sai ngang của Mặt Trăng và  $c$  phụ thuộc

vào thời điểm thượng đỉnh Mặt Trăng tại kinh tuyến Greenwich. Doodson đã lập những bảng chuyên dụng để tra những hiệu chỉnh này trong khi phân tích điều hòa và dự tính thủy triều theo phương pháp của mình.

Để tính các hằng số điều hòa công thức (3.14) được rút gọn hơn nữa bằng cách gộp bốn sóng vào thành hai: sóng chu kỳ nửa ngày  $q_2$  và sóng chu kỳ ngày  $q_1$ . Được biết khi gộp các sóng có cùng chu kỳ nhưng khác biên độ và pha ta cần đưa vào những hiệu chỉnh cho biên độ và pha. Giả sử cần gộp hai sóng  $M \cos(nt - m)$  và  $S \cos(nt - s)$  thành một sóng, ta viết:

$$M \cos(nt - m) + S \cos(nt - s) = ES \cos[nt - (s + e)]$$

trong đó  $E$  và  $e$  là những hiệu chỉnh tuần tự cho biên độ và pha. Biến đổi tiếp hệ thức này để xác định các hiệu chỉnh  $E$  và  $e$ :

$$S \left[ \cos(nt - s) + \frac{M}{S} \cos(nt - m - s + s) \right] = ES \cos[nt - (s + e)].$$

Nếu dùng ký hiệu

$$nt' = nt - s; \quad D = \frac{M}{S}; \quad d = m - s,$$

ta có

$$S [\cos nt' + D \cos(nt' - d)] = ES \cos(nt' - e)$$

hay

$$\begin{aligned} \cos nt' + D \cos(nt' - d) &= E \cos(nt' - e) \Rightarrow \\ \cos nt' + D \cos nt' \cos d + D \sin nt' \sin d &= \\ = E \cos nt' \cos e + E \sin nt' \sin e &\Rightarrow \\ \cos nt' (1 + D \cos d - E \cos e) &= \sin nt' (E \sin e - D \sin d). \end{aligned}$$

Muốn đẳng thức này luôn thực hiện cần điều kiện:

$$\left. \begin{aligned} 1 + D \cos d - E \cos e &= 0 \\ E \sin e - D \sin d &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 1 + D \cos d &= E \cos e \\ D \sin d &= E \sin e \end{aligned} \right\}.$$

Từ đó ta có các biểu thức để xác định các hiệu chỉnh pha và biên độ của sóng gộp:

$$\begin{aligned} \operatorname{tge} &= \frac{D \sin d}{1 + D \cos d}; \\ E &= \sqrt{(1 + D \cos d)^2 + (D \sin d)^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Áp dụng phương pháp gộp sóng như vậy, công thức (3.14) có thể viết thành

$$\begin{aligned} z &= A_0 + H_{S_2} B_S C_S E_2 \cos[q_2 t - (b_S + c_S + e_2 + g_{S_2})] + \\ &H_{K_1} B_K C_K E_1 \cos[q_{K_1} t - (b_K + c_K + e_1 + g_{K_1})]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

trong đó  $E_2, e_2$  - các hiệu chỉnh cho sóng gộp chu kỳ nửa ngày và  $E_1, e_1$  - các hiệu chỉnh cho sóng gộp chu kỳ ngày, được xác định theo các công thức (3.15) theo các đại lượng tương đối  $D$  và  $d$ . Cụ thể:

- Đối với sóng chu kỳ nửa ngày:

$$D_2 = \frac{H_{M_2} B_M C_M}{H_{S_2} B_S C_S}; \quad d_2 = (b_M + c_M + g_{M_2}) - (b_S + c_S + g_{S_2}); \quad (3.17)$$

- Đối với sóng chu kỳ ngày:

$$D_1 = \frac{H_{O_1} B_O C_O}{H_{K_1} B_K C_K}; \quad d_1 = (b_O + c_O + g_{O_1}) - (b_K + c_K + g_{K_1}); \quad (3.18)$$

Như vậy nếu biết tương quan biên độ và hiệu pha của hai cặp sóng chu kỳ bán nhật và toàn nhật (3.17), (3.18) thì có thể xác định các hiệu chỉnh  $E$  và  $e$  theo các biểu thức (3.15) và độ cao mực nước thủy triều được biểu diễn qua hai sóng  $S_2$  và  $K_1$  bằng phương trình (3.16). Ta tiếp