CÁC TÍNH CHẤT PHI CỔ ĐIỂN CỦA TRẠNG THÁI HAI MODE KẾT HỢP THÊM HAI PHOTON TÍCH $SU(1,1)$

NGUYỄN NGỌC LÂM [1]
TRƯƠNG MINH ĐỨC [1], *TRẦN QUANG ĐẠT* [2]
[1] *Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế*
Email: tmduc2009@gmail.com
[2] *Phân hiệu trường Đại học GTVT tại TP HCM*
Email: quangdatsp08@gmail.com

Tóm tắt: Bài báo này trình bày kết quả khảo sát các tính chất phi cổ điển của trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)$. Đầu tiên, chúng tôi kiểm tra tính chất nén tổng, nén hiệu và nén bậc cao hai mode. Kết quả cho thấy trạng thái này chỉ thể hiện tính chất nén tổng mà không có tính chất nén hiệu. Sau đó, chúng tôi khảo sát tính chất phản kết chùm hai mode và sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz. Như một sự kéo theo từ tính chất nén tổng, trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)$ cũng có tính chất phản kết chùm và vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz. Cuối cùng, trong việc kiểm tra tính chất đan rối theo hai tiêu chuẩn Hillery-Zubairy và Mancini, một kết quả mong đợi khi trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)$ đều đan rối theo các tiêu chuẩn này.
Từ khóa: Nén tổng, nén hiệu, nén bậc cao, phản kết chùm, đan rối, thêm photon tích, trạng thái $SU(1,1)$.

1 GIỚI THIỆU

Các nhiệm vụ lượng tử hiện nay đòi hỏi phải sử dụng tới những tính chất phi cổ điển như nén, phản kết chùm và đan rối [1]. Những tính chất này không hề tồn tại sẵn trong các trạng thái tự nhiên mà có trong một số trạng thái lượng tử của trường. Chúng được xem là những trạng thái phi cổ điển. Do đó việc nghiên cứu những trạng thái phi cổ điển mới cùng với cách tạo ra chúng trong thực tiễn đóng vai trò hết sức quan trọng. Một trong số các thao tác sử dụng để tạo ra các trạng thái phi cổ điển mới được nghiên cứu trong thời gian gần đây là phép thêm hoặc hủy photon từ một trạng thái cổ điển hoặc phi cổ điển đã có [2]. Vấn đề này thực ra đã được Agarwal và Tara đã đề xuất khi nghiên cứu trạng thái kết hợp thêm photon vào năm 1991 [3]. Theo đó, thao tác thêm photon đã làm cho trạng thái mới xuất hiện các tính chất phi cổ điển. Phát triển cho trạng thái hai mode, trong bài báo này chúng tôi đánh giá hiệu ứng thêm photon trong trạng thái hai mode kết hợp

Tạp chí Khoa học và Giáo dục, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế
ISSN 1859-1612, Số 01(45)/2018: tr. 57-67
Ngày nhận bài: 06/10/2017; Hoàn thành phản biện: 11/10/2017; Ngày nhận đăng: 23/10/2017

thêm hai photon tích $SU(1,1)$ đối với các tính chất phi cổ điển như nén, phản kết chùm và đan rối. Trạng thái này được chúng tôi mở rộng từ trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ [4] bằng cách thêm hai photon dạng tích, mỗi mode được thêm một photon. Trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ được biết đến là một trong những trạng thái non-Gaussian đặc trưng có thể cho đóng góp rất lớn vào các nhiệm vụ lượng tử như viễn tải lượng tử, mã đậm lượng tử, chia sẻ bí mật lượng tử, viễn tạo trạng thái và đồng viễn tạo trạng thái. Với hy vọng cải thiện các tính chất phi cổ điển trong trạng thái này để có thể thực hiện cho hiệu quả cao hơn trong các quá trình lượng tử, chúng tôi tiến hành một thao tác non-Gaussian (tức thêm photon) lên nó. Trong không gian Fock, trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)$ được viết như sau

$$|\Psi\rangle_{ab} = \mathcal{N}\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger(1-|\xi|^2)^{\frac{1+q}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right]^{\frac{1}{2}}\xi^n|n+q,n\rangle_{ab}, \tag{1}$$

trong đó $\mathcal{N} = \left[(1-|\xi|^2)^{1+q}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+q)!}{n!q!}|\xi|^{2n}(n+q+1)(n+1)\right]^{-\frac{1}{2}}$ là hệ số chuẩn hóa, $\hat{a}^\dagger(\hat{a})$ và $\hat{b}^\dagger(\hat{b})$ là toán tử sinh (hủy) photon của mode a và mode b, $\xi = -\tanh re^{-i\varphi}$ với r,φ thực, $|n\rangle$ là trạng thái Fock và q là một số nguyên dương.

2 TÍNH CHẤT NÉN CỦA TRẠNG THÁI HAI MODE KẾT HỢP THÊM HAI PHOTON TÍCH $SU(1,1)$

Nén là một tính chất phi cổ điển quan trọng có ứng dụng rất nhiều trong các kỹ thuật chính xác cao hiện nay. Tính chất này được sử dụng như một công cụ làm giảm nhiễu, nâng cao tính chính xác của tín hiệu nhận được. Việc nghiên cứu cách thức cải thiện độ nén có vai trò quan trọng trong lý thuyết về quang lượng tử.

2.1 Nén tổng hai mode

Nén tổng hai mode được Hillery đưa ra vào năm 1989 [5]. Cho một toán tử trực giao hai mode

$$\hat{V}_\phi = \frac{1}{2}(e^{i\phi}\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger + e^{-i\phi}\hat{a}\hat{b}), \tag{2}$$

trong đó ϕ là góc hợp bởi $\hat{V}_\phi$ và trục thực của mặt phẳng phức. Một trạng thái được gọi là nén tổng nếu thỏa mãn bất đẳng thức $\langle(\Delta\hat{V}_\phi)^2\rangle < \frac{1}{4}(\hat{n}_a+\hat{n}_b+1)$, hay

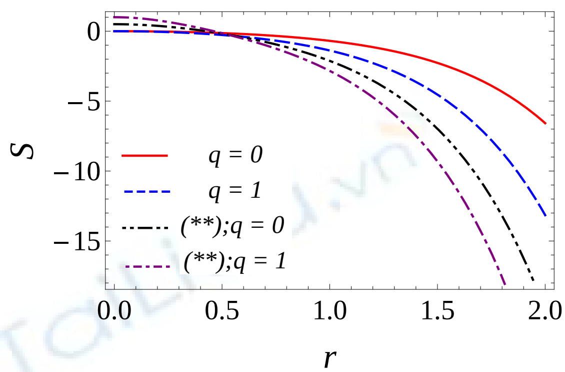
$$S = \langle(\Delta\hat{V}_\phi)^2\rangle - \frac{1}{4}(\hat{n}_a+\hat{n}_b+1) < 0, \tag{3}$$

trong đó $\langle(\Delta\hat{V}_\phi)^2\rangle = \langle\hat{V}_\phi^2\rangle - \langle\hat{V}_\phi\rangle^2$, $\hat{n}_a = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ và $\hat{n}_b = \hat{b}^\dagger\hat{b}$ là các toán tử số hạt. Đối với trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)$, chúng tôi có

$$\begin{aligned} S =&\frac{1}{4}\Bigg(2\mathcal{N}^2(1-\tanh^2 r)^{1+q}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+q)!}{m!q!}\tanh^{2m} r(m+q+1) \\ &\times\Big(\cos[2(\phi+\varphi)]\tanh^2 r(m+3)(m+q+2)(m+q+3) + (m+q+1)(m+1)^2\Big) \end{aligned}$$

$$- \left(2\mathcal{N}^2(1-\tanh^2 r)^{1+q}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+q)!}{m!q!}\tanh^{2m} r(m+q+1)\right.$$
$$\left.\times\cos(\phi+\varphi)(-\tanh r)(m+q+2)(m+2)\right)^2\Bigg). \tag{4}$$

Kết quả khảo sát của tham số nén tổng cho thấy rằng, trong khoảng giá trị $r > 0.5$ trạng



Hình 1: Sự phụ thuộc của tham số nén tổng hai mode S vào r đối với trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ và trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)^{(**)}$, cho $q = 0$, 1 và $\cos(\phi+\varphi) = 0$.

thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)$ xuất hiện nén tổng. Khi r và q tăng lên thì mức độ nén tổng tăng lên (xem hình 1). Tuy nhiên ở giá trị bé của r ($r < 0.5$) thì hiệu ứng nén tổng biến mất. Chúng tôi cũng so sánh tham số nén tổng của trạng thái này với trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$. Rõ ràng phép thêm photon đã làm cải thiện tích chất nén tổng (cũng xem hình 1).

2.2 Nén hiệu hai mode

Nén hiệu hai mode cũng được Hillery đưa ra trong [5]. Một trạng thái gọi là nén hiệu hai mode nếu thỏa mãn bất đẳng thức $\langle(\Delta\hat{W}_\phi)^2\rangle < \frac{1}{4}|\hat{n}_a - \hat{n}_b|$, hay

$$D = \langle(\Delta\hat{W}_\phi)^2\rangle - \frac{1}{4}|\hat{n}_a - \hat{n}_b| < 0, \tag{5}$$

trong đó $\hat{W}_\phi = (e^{i\phi}\hat{a}\hat{b}^\dagger + e^{-i\phi}\hat{a}^\dagger\hat{b})/2$, với ϕ là góc hợp bởi $\hat{V}_\phi$ và trục thực của mặt phẳng phức. Đối với trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)$, ta có

$$D = \frac{1}{4}\left(\langle e^{2i\phi}\hat{a}^2\hat{b}^{\dagger 2} + e^{-2i\phi}\hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}^2 + 2\hat{n}_a\hat{n}_b + 2\hat{n}_b\rangle - (\langle e^{i\phi}\hat{a}\hat{b}^\dagger + e^{-i\phi}\hat{a}^\dagger\hat{b}\rangle)^2\right). \tag{6}$$

Một số giá trị trung bình lượng tử trong trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)$ của các số hạng ở phương trình (6) là

$$_{ba}\langle\Psi|e^{2i\phi}\hat{a}^2\hat{b}^{\dagger 2}|\Psi\rangle_{ab} = {}_{ba}\langle\Psi|e^{-2i\phi}\hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}^2|\Psi\rangle_{ab} = 0,$$
$$_{ba}\langle\Psi|e^{i\phi}\hat{a}\hat{b}^\dagger|\Psi\rangle_{ab} = {}_{ba}\langle\Psi|e^{-i\phi}\hat{a}^\dagger\hat{b}|\Psi\rangle_{ab} = 0,$$

do đó giá trị của tham số nén hiệu D thu được là

$$D = \frac{1}{2}\Big(\langle \hat{n}_a \hat{n}_b + \hat{n}_b \rangle\Big). \qquad (7)$$

Phương trình (7) cho thấy tham số nén hiệu $D > 0$ nên trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)$ không có nén hiệu.

2.3 Nén bậc cao hai mode

Định nghĩa nén bậc cao trong một trường điện từ hai mode a và b đã được giới thiệu bởi Nguyen Ba An [6] với tham số nén hai mode $S_{ab}(N,\phi)$ có dạng

$$S_{ab}(N,\phi) = \frac{1}{4}\{\Re[\langle(\hat{a}+\hat{b})^{2N}\rangle e^{2i\phi}] + \langle(\hat{a}^\dagger+\hat{b}^\dagger)^N(\hat{a}+\hat{b})^N\rangle - 2\Re^2[\langle(\hat{a}+\hat{b})^N e^{i\phi}\rangle]\}, \qquad (8)$$

trong đó $\Re(z)$ ký hiệu cho phép toán lấy phần thực của số phức z, N là một số nguyên dương. Một trạng thái hai mode có nén bậc N theo hướng ϕ nếu $S_{ab}(N,\phi) < 0$. Từ đó, tham số nén bậc cao đối với trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)$ trong trường hợp N chẵn được tính là

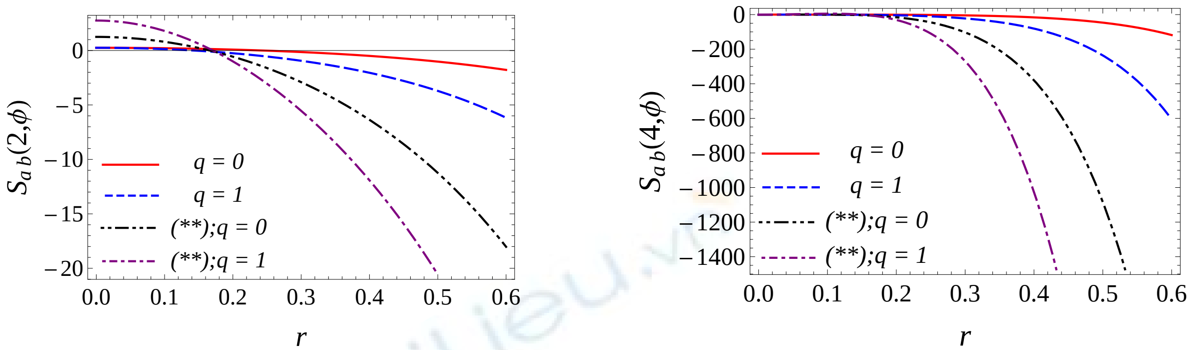
$$\begin{aligned} S_{ab}(N,\,\phi) =& \frac{(2N)!}{4(N!)^2}\mathcal{N}^2(1-|\xi|^2)^{1+q}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+q)!}{m!q!}\cos[2(\phi-\frac{N}{2}\varphi)] \\ & \times\, \tanh^{2m}r(-\tanh^N r)(m+N+q+1)(m+N+1)\prod_{j=1}^{N}(m+q+j)) \\ & + \mathcal{N}^2(1-\tanh^2 r)^{1+q}\sum_{n=0}^{N}\Big(\frac{N!}{2n!(N-n)!}\Big)^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+q)!}{m!q!}\tanh^{2m}r \\ & \times (m+q+1)(m+1)\prod_{j=1}^{n}(m+q+2-j)\prod_{j=1}^{N-n}(m+2-j) \\ & - \Bigg(\frac{(N)!}{\sqrt{2}\Big(\frac{N}{2}!\Big)^2}\mathcal{N}^2(1-|\xi|^2)^{1+q}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+q)!}{m!q!}\cos(\phi-\frac{N}{2}\varphi)\tanh^{2m}r \\ & \times (-\tanh^{N/2}r)(m+N/2+q+1)(m+N/2+1)\prod_{j=1}^{N/2}(m+q+j)\Bigg)^2. \end{aligned} \qquad (9)$$

Tuy nhiên trong trường hợp N lẻ thì

$$\begin{aligned} S_{ab}(N,\,\phi) =& \frac{(2N)!}{4(N!)^2}\mathcal{N}^2(1-|\xi|^2)^{1+q}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+q)!}{m!q!}\cos[2(\phi-\frac{N}{2}\varphi)] \\ & \times\, \tanh^{2m}r(-\tanh^N r)(m+N+q+1)(m+N+1)\prod_{j=1}^{N}(m+q+j)) \\ & + \mathcal{N}^2(1-\tanh^2 r)^{1+q}\sum_{n=0}^{N}\Big(\frac{N!}{2n!(N-n)!}\Big)^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+q)!}{m!q!}\tanh^{2m}r \end{aligned}$$

$$\times (m+q+1)(m+1)\prod_{j=1}^{n}(m+q+2-j)\prod_{j=1}^{N-n}(m+2-j). \tag{10}$$

Kết quả khảo sát tham số nén bậc cao cho thấy có sự tương đồng với nén tổng đã được



Hình 2: Sự phụ thuộc của tham số nén bậc cao hai mode $S_{ab}(N,\phi)$ vào r đối với trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ và trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)^{(**)}$, cho $q=0,\,1$; $N=2,\,4$ và $\cos(\phi+\varphi)=0$.

khảo sát trước đó. Có điều khác biệt là giá trị biên của r đối với nén bậc cao dịch về phía giá trị r nhỏ hơn và do đó kéo theo mức độ nén bậc cao là "sâu" hơn so với nén tổng hai mode (xem hình 2). Như vậy, vai trò của thêm photon đối với tính chất nén trong trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)$ là quan trọng trong việc cải thiện tích chất phi cổ điển này. Chúng tôi kỳ vọng thao tác thêm photon này cũng có thể cải thiện một số tính chất phi cổ điển khác.

3 TÍNH CHẤT PHẢN KẾT CHÙM VÀ SỰ VI PHẠM BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY-SCHWARZ CỦA TRẠNG THÁI HAI MODE KẾT HỢP THÊM HAI PHOTON TÍCH $SU(1,1)$

3.1 Tính chất phản kết chùm của trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)$

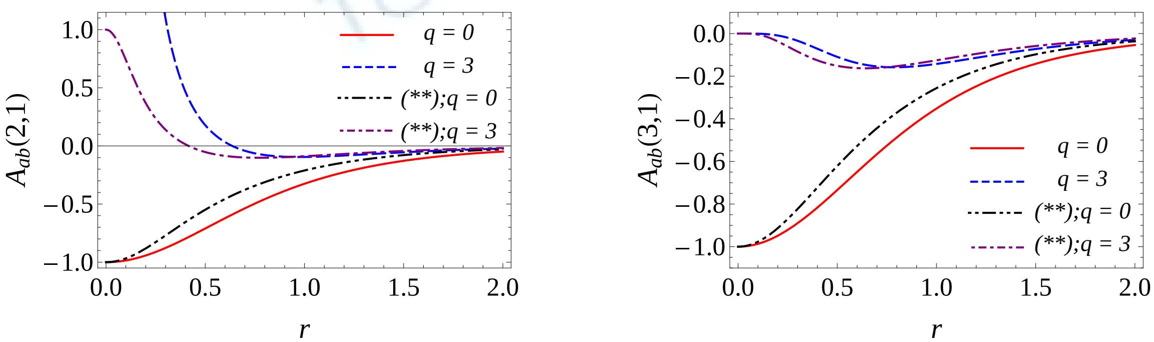
Phản kết chùm là một tính chất phi cổ điển có ứng dụng rất lớn trong việc tạo ra các trạng thái đơn photon. Để phát hiện sự tồn tại của phản kết chùm trong các trạng thái đa mode người ta có thể sử dụng các tiêu chuẩn phản kết chùm đơn mode và hai mode. Ở đây chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn Lee [7, 8] để khảo sát tính chất phản kết chùm của trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)$. Theo Lee

$$A_{ab}(l,p)=\frac{\langle \hat{n}_a^{(l+1)}\hat{n}_b^{(p-1)}\rangle+\langle \hat{n}_a^{(p-1)}\hat{n}_b^{(l+1)}\rangle}{\langle \hat{n}_a^{(l)}\hat{n}_b^{(p)}\rangle+\langle \hat{n}_a^{(p)}\hat{n}_b^{(l)}\rangle}-1, \tag{11}$$

trong đó $\langle \hat{n}_x^{(i)}\rangle=\langle \hat{n}_x(\hat{n}_x-1)...(\hat{n}_x-i+1)\rangle=\langle \hat{x}^{\dagger i}\hat{x}^i\rangle$, các số nguyên l và p thỏa mãn điều kiện $l\geq p\geq 1$. Tính chất phản kết chùm hai mode tồn tại nếu $A_{ab}(l,p)<0$. Ta có hệ số phản kết chùm hai mode đối với trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)$ là

$$\begin{aligned}A_{ab}(l,p) &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+q)!}{m!q!}\tanh^{2m} r(m+q+1)(m+1)\\&\times\left(\prod_{j=1}^{l+1}(m+q+2-j)\prod_{j=1}^{p-1}(m+2-j)+\prod_{j=1}^{p-1}(m+q+2-j)\prod_{j=1}^{l+1}(m+2-j)\right)\\&\times\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+q)!}{m!q!}\tanh^{2m} r(m+q+1)(m+1)\left(\prod_{j=1}^{l}(m+q+2-j)\right.\right.\\&\left.\left.\times\prod_{j=1}^{p}(m+2-j)+\prod_{j=1}^{p}(m+q+2-j)\prod_{j=1}^{l}(m+2-j)\right)\right)^{-1}-1. \qquad (12)\end{aligned}$$

Nhìn chung, trạng thái được khảo sát đều thể hiện tính chất phản kết chùm ở các bậc



Hình 3: Sự phụ thuộc của hệ số phản kết chùm hai mode $A_{ab}(l,p)$ vào r đối với đối với trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ và trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)^{(**)}$, cho $q=0$, 3 và $l=2$, 3; $p=1$.

khác nhau khi r lớn. Theo khía cạnh q, nếu $q=0$ hệ số phản kết chùm nhận giá trị âm hoàn toàn với mọi giá trị r, p, và l (xem hình 3). Khi tham số q nhận giá trị cao hơn, tính phản kết chùm giảm và thậm chí xuất hiện không kết chùm khi r nhỏ. Theo khía cạnh thêm photon, một điều khá thú vị khi việc thêm photon lại làm giảm tính chất kết chùm. Điều này trái ngược với tính chất nén trước đây. Việc lựa chọn các bậc l, p cũng ảnh hưởng đến hệ số phản kết chùm. Khi chênh lệch giữa hai tham số này lớn, tham số phản kết chùm thể hiện giá trị âm hoàn toàn với mọi $r \neq 0$.

3.2 Sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

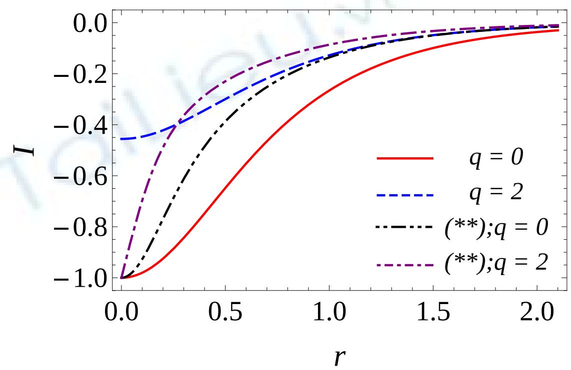
Sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy – Schwarz cũng được đánh giá là một tính chất phi cổ điển. Nếu một trạng thái hai mode vi phạm bất đẳng thức này thì

$$I=\frac{\left(\langle\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^{2}\rangle\langle\hat{b}^{\dagger 2}\hat{b}^{2}\rangle\right)^{1/2}}{|\langle\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\rangle|}-1<0. \qquad (13)$$

Biểu thức của I đối với trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)$ là

$$I = \Bigg(\Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+q)!}{m!q!} \tanh^{2m} r (m+q+1)^2 (m+1)$$
$$\times (m+q)\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+q)!}{m!q!} \tanh^{2m} r (m+q+1)(m+1)^2 m\Big)\Bigg)^{1/2}$$
$$\times \Big|\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+q)!}{m!q!} \tanh^{2m} r (m+q+1)^2 (m+1)^2\Big|^{-1} - 1. \tag{14}$$

Hình 4 cho thấy rằng trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)$ luôn



Hình 4: Sự phụ thuộc của tham số I vào r đối với trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ và trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)^{(**)}$, cho $q = 0,\, 2$.

vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz. Với giá trị của r và q càng nhỏ thì mức độ vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz càng mạnh. Việc thêm photon đã làm giảm mức độ vi phạm bất đẳng thức này. Như vậy, điều này cũng tương đồng với mức độ phản kết chùm mà chúng tôi đã thảo luận ở trên.

4 TÍNH CHẤT ĐAN RỐI CỦA TRẠNG THÁI HAO MODE KẾT HỢP THÊM HAI PHOTON TÍCH SU(1,1)

Rối là một tính chất phi cổ điển đa mode mà không thể tìm thấy được trong vật lý cổ điển. Mặc dù đã được nghiên cứu vào các thập niên 30 của thế kỷ trước nhưng những ứng dụng của nó thực sự mới được đề cập trong thời gian gần đây. Việc ứng dụng tính chất này trong các nhiệm vụ lượng tử thường đòi hỏi các trạng thái phi cổ điển có mức độ đan rối cao. Thao tác thêm hay hủy photon để cải thiện độ rối là cách thức dễ thực hiện và đang được nghiên cứu sâu hơn. Chúng tôi kỳ vọng rằng, việc thêm photon trong trạng thái được nghiên cứu cũng có đóng góp đáng kể trong việc cải thiện tính chất đan rối nói chung. Để đánh giá tính chất đan rối trong trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon tích $SU(1,1)$, chúng tôi sử dụng hai tiêu chuẩn được nghiên cứu khá phổ biến là tiêu chuẩn Hillery-Zubairy và tiêu chuẩn Mancini.