CÁC TÍNH CHẤT PHI CỔ ĐIỂN CỦA TRẠNG THÁI THÊM VÀ BỚT MỘT PHOTON LÊN HAI MODE KẾT HỢP CHẴN

TRẦN THỊ THU [1], *TRƯƠNG MINH ĐỨC* [1], *HỒ SỸ CHƯƠNG* [2]
[1] *Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế, Email: tmduc2009@gmail.com*
[2] *Trường Đại học Đồng Nai, Email: hosichuong@gmail.com*

Tóm tắt: Bài báo này trình bày việc khảo sát các tính chất phi cổ điển của trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp chẵn. Bằng việc sử dụng điều kiện nén tổng và nén hiệu hai mode, kết quả thu được cho thấy trạng thái này là một trạng thái thể hiện tính nén tổng nhưng không nén hiệu. Sau đó chúng tôi đã khảo sát tính chất phản kết chùm hai mode và sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz của trạng thái này. Kết quả cho thấy trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp chẵn có tính chất phản kết chùm và hoàn toàn vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz. Chúng tôi cũng đã khảo sát các điều kiện đan rối Hillery–Zubairy và đan rối Nha-Kim và thu được kết quả cho thấy trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp chẵn đan rối hoàn toàn theo cả hai tiêu chuẩn đan rối Hillery–Zubairy và Nha-Kim.
Từ khóa: Nén tổng hai mode, nén hiệu hai mode, phản kết chùm, sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, tiêu chuẩn đan rối Hillery–Zubairy và đan rối Nha-Kim.

1 GIỚI THIỆU

Trong những năm gần đây, các lĩnh vực thông tin lượng tử, viễn tải lượng tử và máy tính lượng tử thu hút sự quan tâm rất lớn của các nhà khoa học và đang có những bước phát triển mạnh mẽ. Cùng với đó, việc nghiên cứu các trạng thái có tính phi cổ điển, đặc biệt là tính đan rối đóng vai trò quan trọng trong quá trình tạo ra các nguồn tài nguyên rối. Vào năm 1991, Agarwal và Tara đã đề xuất ý tưởng về trạng thái kết hợp thêm photon [1] và chứng minh được nó là một trạng thái phi cổ điển, thể hiện tính nén, tính phản kết chùm và tuân theo thống kê sub-Poisson. Việc thêm và bớt photon vào một trạng thái vật lý là một phương pháp quan trọng để tạo ra một trạng thái phi cổ điển mới. Bài báo này trình bày các nghiên cứu của chúng tôi về các tính chất phi cổ điển đối với trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp chẵn sau

$$|\Psi\rangle_{ab} = N_{\alpha\beta}\left(\hat{a}^{\dagger} + \hat{b}\right)\left(|\alpha\rangle_a|\beta\rangle_b + |\beta\rangle_a|\alpha\rangle_b\right), \tag{1}$$

trong đó $N_{\alpha\beta} = [2|\alpha|^2+2+2\alpha^*\beta^*+2\alpha\beta+2|\beta|^2+(2\alpha^*\beta+2+2\alpha^*\beta^*+2\alpha\beta+2\beta^*\alpha)\times \exp\left(-|\alpha-\beta|^2\right)]^{-\frac{1}{2}}$ là hệ số chuẩn hóa, $\hat{a}^{\dagger}$ là toán tử sinh đối với mode a và $\hat{b}$ là toán

Tạp chí Khoa học và Giáo dục, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế
ISSN 1859-1612, Số 01(45)/2018: tr. 93-103
Ngày nhận bài:06/10/2017; Hoàn thành phản biện: 11/10/2017; Ngày nhận đăng: 23/10/2017

tử hủy đối với mode b.

2 TÍNH CHẤT NÉN CỦA TRẠNG THÁI THÊM VÀ BỚT MỘT PHOTON LÊN HAI MODE KẾT HỢP CHẴN

2.1 Nén tổng hai mode

Nén tổng hai mode được Hillery [2] đưa ra vào năm 1989. Một trạng thái được gọi là nén tổng nếu thỏa mãn bất đẳng thức $\left\langle\left(\Delta\hat{V}_\varphi\right)^2\right\rangle < \frac{1}{4}\left(\hat{n}_a + \hat{n}_b + 1\right)$, hay

$$S = \left\langle\left(\Delta\hat{V}_\varphi\right)^2\right\rangle - \frac{1}{4}\left(\hat{n}_a + \hat{n}_b + 1\right) < 0, \tag{2}$$

trong đó $\langle(\Delta\hat{V}_\varphi)^2\rangle = \left\langle V_\varphi^2\right\rangle - \langle V_\varphi\rangle^2$, $\hat{V}_\varphi = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\varphi}\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger + e^{-i\varphi}\hat{a}\hat{b}\right)$, $\hat{n}_a = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ và $\hat{n}_b = \hat{b}^\dagger\hat{b}$. Đối với trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp chẵn, ta có

$$\begin{aligned}
S &= \left\langle\hat{V}_\varphi^2\right\rangle - \left\langle\hat{V}_\varphi\right\rangle^2 - \tfrac{1}{4}\left(\hat{n}_a + \hat{n}_b + 1\right)\\
&= \tfrac{1}{4}|N_{\alpha\beta}|^2\{\left(2|\alpha|^4 + 5|\alpha|^2 + 2\right) + \left(4|\alpha|^4 + 8|\alpha|^2 + 3\right)|\beta|^2 + \left(2|\beta|^4 + 5|\beta|^2 + 2\right)\\
&+ \left(4|\beta|^4 + 8|\beta|^2 + 3\right)|\alpha|^2 + 2\left(4|\alpha|^2 + 4\right)\left(|\beta|^2 + 1\right)\mathrm{Re}[\alpha\beta] + 2\left(2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2 + 6\right)\\
&\times\mathrm{Re}[e^{-2i\varphi}\alpha^2\beta^2] + 2\left(2|\alpha|^2|\beta|^2 + 2|\beta|^2 + 2|\alpha|^2\right)\mathrm{Re}[e^{-2i\varphi}\alpha\beta] + 4\mathrm{Re}[e^{-2i\varphi}\alpha^3\beta^3]\\
&+[2\mathrm{Re}[(\alpha^{*2}\beta^2 + 4\alpha^*\beta + 2)(\beta^*\alpha + 1)] + 2\mathrm{Re}[(\alpha^{*2}\beta^2 + 3\alpha^*\beta + 1)\beta^*\alpha]\\
&+2\mathrm{Re}[\alpha\beta]\left(2|\alpha|^2|\beta|^2 + 6\mathrm{Re}[\beta^*\alpha] + 4\right) + 2\mathrm{Re}[\beta^*\alpha]|\alpha|^2|\beta|^2 + 2|\alpha|^2\mathrm{Re}[(\alpha^*\beta + 1)\beta^{*2}]\\
&+2|\beta|^2\mathrm{Re}[(\alpha^*\beta + 1)\alpha^2] + 2\mathrm{Re}[(\alpha^*\beta + 1)(\beta^{*2}\alpha^2 + \beta^*\alpha)] + 2\left(2\mathrm{Re}[\alpha^*\beta] + 6\right)\\
&\times\mathrm{Re}[e^{-2i\varphi}\alpha^2\beta^2] + 2|\alpha|^2\mathrm{Re}[e^{2i\varphi}(\alpha^*\beta + 2)\beta^{*2}] + 2\mathrm{Re}[e^{2i\varphi}(\beta^*\alpha + 2)\alpha^{*2}]|\beta|^2\\
&+2\mathrm{Re}[e^{2i\varphi}\beta^{*2}\alpha^{*3}\beta] + 2\mathrm{Re}[e^{2i\varphi}\alpha^{*2}\beta^{*3}\alpha] + 4\mathrm{Re}[e^{2i\varphi}\beta^{*3}\alpha^{*3}]]\exp\left\{-|\alpha - \beta|^2\right\}\}\\
&-\{\tfrac{1}{2}|N_{\alpha\beta}|^2\{2\left(2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2 + 4\right)\mathrm{Re}[e^{-i\varphi}\alpha\beta] + 2\left(2|\alpha|^2|\beta|^2 + |\alpha|^2 + |\beta|^2\right)\mathrm{Re}[e^{i\varphi}]\\
&+4\mathrm{Re}[e^{-i\varphi}\alpha^2\beta^2] + [\{2\left(2\mathrm{Re}[\alpha^*\beta] + 4\right)\mathrm{Re}[e^{-i\varphi}\alpha\beta] + 2\left(2|\alpha|^2|\beta|^2 + 2\mathrm{Re}[\alpha\beta^*]\right)\mathrm{Re}[e^{i\varphi}]\\
&+4\mathrm{Re}[e^{i\varphi}\alpha^{*2}\beta^{*2}] + |\alpha|^2 2\mathrm{Re}[e^{i\varphi}\beta^{*2}] + |\beta|^2 2\mathrm{Re}[e^{-i\varphi}\alpha^2]]\exp\left\{-|\alpha - \beta|^2\right\}\}]\}^2\\
&-\tfrac{1}{4}|N_{\alpha\beta}|^2\{2|\alpha|^4 + 2|\beta|^4 + 4 + \left(3|\alpha|^2 + 6\right)|\beta|^2 + \left(|\beta|^2 + 6\right)|\alpha|^2\\
&+\left(2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2 + 4\right)2\mathrm{Re}[\alpha\beta] + [4\mathrm{Re}[\alpha^{*2}\beta^2] + 4 + 2\mathrm{Re}[(\alpha^*\beta + 6)\beta^*\alpha]\\
&+2\mathrm{Re}[(\alpha^*\beta + \beta^*\alpha + 4)\alpha\beta] + |\alpha|^2 2\mathrm{Re}[\beta^2] + |\beta|^2 2\mathrm{Re}[\alpha^2] + 2|\alpha|^2|\beta|^2]\\
&\times\exp\left\{-|\alpha - \beta|^2\right\}\},
\end{aligned} \tag{3}$$

trong đó, $|N_{\alpha\beta}|^2 = [2|\alpha|^2 + 2 + 2\alpha^*\beta^* + 2\alpha\beta + 2|\beta|^2 + (2\alpha^*\beta + 2 + 2\alpha^*\beta^* + 2\alpha\beta + 2\beta^*\alpha)\times$

$\exp\left(-|\alpha - \beta|^2\right)]^{-1}$.

Ta đặt $\alpha = r_a\exp(i\varphi_a)$ và $\beta = r_b\exp(i\varphi_b)$ và $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$ rồi khảo sát tính nén tổng hai mode theo biên độ r_b và pha dao động φ_b với điều kiện khảo sát là $r_a = r_b, \varphi_a = 2\varphi_b, 0 \le r_b \le 5$ và $\varphi_b = \pi/2$. Kết quả ở hình 1a cho thấy trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp chẵn có tính nén tổng.

2.2 Nén hiệu hai mode

Nén hiệu hai mode cũng được Hillery đưa ra [2]. Một trạng thái gọi là nén hiệu hai mode nếu thỏa mãn bất đẳng thức $\left\langle \left(\Delta\hat{W}_\varphi\right)^2 \right\rangle < \frac{1}{4}|\hat{n}_a - \hat{n}_b|$ [3], hay

$$D = \left\langle \left(\Delta\hat{W}_\varphi\right)^2 \right\rangle - \frac{1}{4}|\hat{n}_a - \hat{n}_b| < 0, \tag{4}$$

trong đó $\langle(\Delta\hat{W}_\varphi)^2\rangle = \left\langle \hat{W}_\varphi^2 \right\rangle - \left\langle \hat{W}_\varphi \right\rangle^2$, $\hat{W}_\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}\hat{a}\hat{b}^+ + e^{-i\varphi}\hat{a}^+\hat{b}\right)$, $\hat{n}_a = \hat{a}^+\hat{a}$ và $\hat{n}_b = \hat{b}^+\hat{b}$. Đối với trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp chẵn, ta có

$$\begin{aligned}
&D = \tfrac{1}{4}|N_{\alpha\beta}|^2\{\big(|\alpha|^2+3\big)\,2\mathrm{Re}[e^{2i\varphi}\alpha^2\beta^{*2}] + \big(|\beta|^2+3\big)\,2\mathrm{Re}[e^{2i\varphi}\alpha^{*2}\beta^2] + \big(|\beta|^2+2\big)\\
&\times 2\mathrm{Re}[e^{2i\varphi}\alpha^{*3}\beta] + \big(|\alpha|^2+2\big)\,2\mathrm{Re}[e^{2i\varphi}\alpha\beta^{*3}] + 2\mathrm{Re}[e^{2i\varphi}\alpha^3\beta^*]|\beta|^2 + 2\mathrm{Re}[e^{2i\varphi}\beta^3\alpha^*]|\alpha|^2\\
&+2\mathrm{Re}[e^{2i\varphi}\beta^2\alpha^{*2}]|\alpha|^2 + 2\mathrm{Re}[e^{2i\varphi}\alpha^2\beta^{*2}]|\beta|^2 + 4|\alpha|^4|\beta|^2 + 4|\beta|^4|\alpha|^2 + 16|\beta|^2|\alpha|^2\\
&+2|\alpha|^4 + 6|\alpha|^2 + 6|\beta|^2 + 2|\beta|^4 + 2\left(4|\beta|^2|\alpha|^2 + 4|\beta|^2 + 4|\alpha|^2 + 2\right)2\mathrm{Re}[\alpha\beta]\\
&+[2\mathrm{Re}[(\alpha^*\beta+3)\left(e^{2i\varphi}|\beta|^4 + e^{-2i\varphi}|\alpha|^4\right)]\\
&+2\mathrm{Re}[(\alpha^*\beta+2)\left(e^{2i\varphi}\beta^{*2}|\beta|^2 + e^{-2i\varphi}\alpha^2|\alpha|^2\right)] + 2\mathrm{Re}[e^{2i\varphi}\beta^*\alpha]|\beta|^4 + 2\mathrm{Re}[e^{2i\varphi}\alpha^*\beta]|\alpha|^4\\
&+2\mathrm{Re}[e^{2i\varphi}\alpha\beta]\left(|\alpha|^4 + |\beta|^4\right) + 2\mathrm{Re}[\left(2\alpha^{*2}\beta^2 + 7\alpha^*\beta + 6\right)\beta^*\alpha] + 2\mathrm{Re}[\beta^{*2}\alpha^2] + 2\\
&+4\left(|\beta|^2|\alpha|^2 + 2\mathrm{Re}[\alpha^*\beta] + 1\right)\mathrm{Re}[\alpha\beta] + |\beta|^2|\alpha|^2\,(2\mathrm{Re}[\alpha^*\beta] + 2)\\
&+2\mathrm{Re}[(\alpha^*\beta+1)\,\beta^{*2}\alpha^2] + 2|\alpha|^2\mathrm{Re}[(\beta^*\alpha+2)\,\beta^2] + 2|\beta|^2\mathrm{Re}[(\alpha^*\beta+2)\,\alpha^2]]\\
&\times\exp\left\{-|\alpha-\beta|^2\right\}\} - (\tfrac{1}{2}|N_{\alpha\beta}|^2\{2\left(|\alpha|^2+2\right)\mathrm{Re}[e^{i\varphi}\alpha\beta^*] + 2\left(|\alpha|^2+1\right)\mathrm{Re}[e^{i\varphi}\beta^{*2}]\\
&+2\left(|\beta|^2+2\right)\mathrm{Re}[e^{i\varphi}\alpha^*\beta] + 2\left(|\beta|^2+1\right)\mathrm{Re}[e^{i\varphi}\alpha^{*2}] + 2|\beta|^2\mathrm{Re}[e^{i\varphi}\alpha^2]\\
&+2|\beta|^2\mathrm{Re}[e^{i\varphi}\alpha\beta^*] + 2|\alpha|^2\mathrm{Re}[e^{i\varphi}\beta^2] + 2|\alpha|^2\mathrm{Re}[e^{i\varphi}\beta\alpha^*] + [2\left(|\beta|^2 + |\alpha|^2\right)\\
&\times\mathrm{Re}[e^{i\varphi}]\,(2\mathrm{Re}[\alpha^*\beta] + 2) + 2\mathrm{Re}[(\alpha^*\beta+1)\,(e^{i\varphi}\beta^{*2} + e^{-i\varphi}\alpha^2)]\\
&+2\mathrm{Re}[e^{i\varphi}\alpha\beta]\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)]\exp\left\{-|\alpha-\beta|^2\right\}\})^2 - \tfrac{1}{4}|N_{\alpha\beta}|^2\{2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2 + 2\\
&+2\mathrm{Re}[\left(|\alpha|^2 - |\beta|^2 + 1\right)\alpha\beta] - 2\mathrm{Re}[\beta^*\alpha^{*2}\alpha] + 2\mathrm{Re}[\left(|\beta|^2+1\right)\alpha\beta] + [4\mathrm{Re}[\alpha^*\beta]\\
&+2\mathrm{Re}[\alpha\beta]\,(2\mathrm{Re}[\alpha^*\beta] + 4) - 2|\alpha|^2\mathrm{Re}[\beta^2] - 2|\beta|^2\mathrm{Re}[\alpha^2] + 2]\exp\left\{-|\alpha-\beta|^2\right\}\}.
\end{aligned} \tag{5}$$

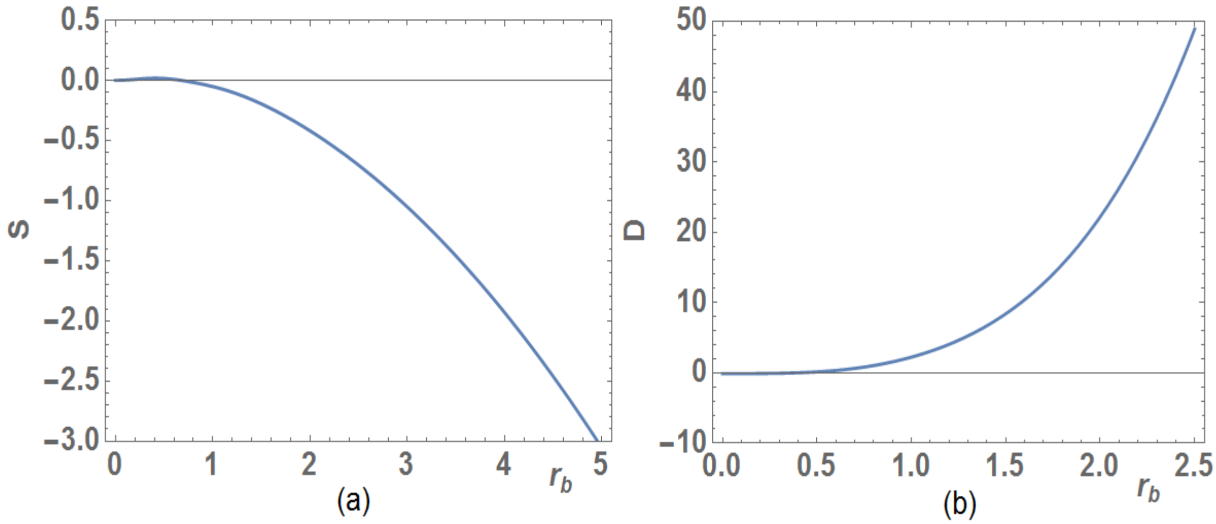
Ta đặt $\alpha = r_a\exp(i\varphi_a)$ và $\beta = r_b\exp(i\varphi_b)$ và $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$ rồi khảo sát tính nén hiệu hai mode theo biên độ r_b và pha dao động φ_b với điều kiện khảo sát là $r_a = r_b, \varphi_a = 2\varphi_b, 0 \le r_b \le 2.5$ và $\varphi_b = {}^{\pi}/_{2}$. Kết quả ở hình 1b cho thấy, trạng thái thêm một và bớt một photon lên hai mode kết hợp chẵn không có tính nén hiệu.

3 SỰ VI PHẠM BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY-SCHWARZ, TÍNH PHẢN KẾT CHÙM VÀ TÍNH ĐAN RỐI CỦA TRẠNG THÁI THÊM VÀ BỚT MỘT PHOTON LÊN HAI MODE KẾT HỢP CHẴN

3.1 Sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho trạng thái hai mode có dạng

$$I = \left[\left\langle \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2 \right\rangle \left\langle \hat{b}^{\dagger 2}\hat{b}^2 \right\rangle\right]^{\frac{1}{2}} / \left|\left\langle \hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{a} \right\rangle\right| - 1 \ge 0. \tag{6}$$



Hình 1: *Sự phụ thuộc của tham số S và D vào biên độ kết hợp r_b.*

Với trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp chẵn, ta có

$$\begin{aligned}
I = &\{[|\alpha|^6 + 5|\alpha|^4 + 4|\alpha|^2 + |\beta|^6 + 5|\beta|^4 + 4|\beta|^2 + |\alpha|^4|\beta|^2 + |\beta|^4|\alpha|^2 + 2(|\beta|^4 \\
&+2|\beta|^2 + |\alpha|^4 + 2|\alpha|^2)\mathrm{Re}[\alpha\beta] + 2[\mathrm{Re}[\alpha^{*3}\beta^3] + 5\mathrm{Re}[\alpha^{*2}\beta^2] + 4\mathrm{Re}[\alpha^*\beta] \\
&+|\beta|^2\mathrm{Re}[\alpha^{*3}\beta] + 2|\beta|^2\mathrm{Re}[\alpha^2] + |\alpha|^2\mathrm{Re}[\alpha^*\beta^3] + 2|\alpha|^2\mathrm{Re}[\beta^2] + |\beta|^2|\alpha|^2\mathrm{Re}[\alpha\beta^*]] \\
&\times \exp\left\{-|\alpha-\beta|^2\right\}][|\alpha|^2|\beta|^4 + |\beta|^4 + |\beta|^6 + |\beta|^2|\alpha|^4 + |\alpha|^4 + |\alpha|^6 \\
&+2\mathrm{Re}[\alpha\beta](|\beta|^4 + |\alpha|^4) + 2[\mathrm{Re}[(\alpha^*\beta+1)\,\beta^{*2}\alpha^2] + \mathrm{Re}[\beta^{*3}\alpha^3] + |\beta|^2\mathrm{Re}[\beta^*\alpha^3] \\
&+|\alpha|^2\mathrm{Re}[\alpha^*\beta^3]]\exp\left\{-|\alpha-\beta|^2\right\}]\}^{1/2}\{2|\alpha|^4|\beta|^2 + 2|\alpha|^2|\beta|^4 + 6|\alpha|^2|\beta|^2 + |\alpha|^2 + |\beta|^2 \\
&+2\mathrm{Re}[\alpha\beta]\left(2|\alpha|^2|\beta|^2 + |\alpha|^2 + |\beta|^2\right) + [(2\mathrm{Re}[\alpha^*\beta]+6)\,|\alpha|^2|\beta|^2 + 2\mathrm{Re}[(\beta^*\alpha+1)\,\beta^2] \\
&\times|\alpha|^2 + 2\mathrm{Re}[(\alpha^*\beta+1)\,\alpha^2]|\beta|^2 + 2\mathrm{Re}[\alpha^*\beta]\left(|\alpha|^2|\beta|^2+1\right)]\exp\left\{-|\alpha-\beta|^2\right\}\}^{-1} - 1.
\end{aligned} \tag{7}$$

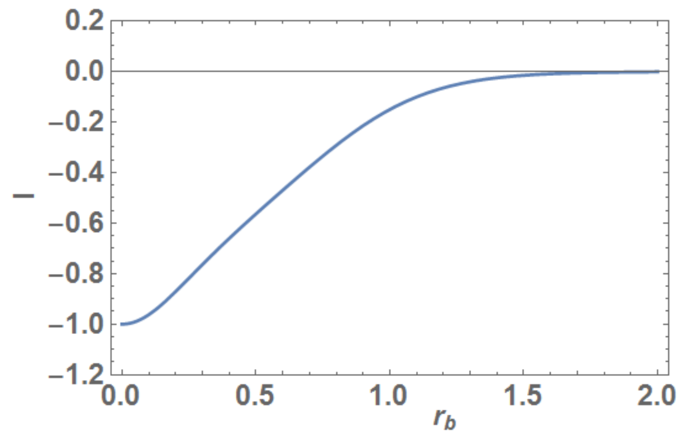
Ta đặt $\alpha = r_a \exp(i\varphi_a)$, $\beta = r_b \exp(i\varphi_b)$ và $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$, rồi khảo sát sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz theo biên độ r_b và pha dao động φ_b với điều kiện khảo sát là $r_a = r_b, \varphi_a = 2\varphi_b, 0 \le r_b \le 2$ và $\varphi_b = {}^{\pi}\!/_{2}$. Kết quả ở hình 2 cho thấy trạng thái này vi phạm bất đẳng thức Cauchy–Schwarz.

3.2 Tính phản kết chùm

Trạng thái hai mode trong trường bức xạ có tính phản kết chùm khi

$$R_{ab}(l,p) = \frac{\left\langle \hat{a}^{\dagger(l+1)}\hat{a}^{(l+1)}\hat{b}^{\dagger(p-1)}\hat{b}^{(p-1)}\right\rangle + \left\langle \hat{a}^{\dagger(p-1)}\hat{a}^{(p-1)}\hat{b}^{\dagger(l+1)}\hat{b}^{(l+1)}\right\rangle}{\left\langle \hat{a}^{\dagger l}\hat{a}^{l}\hat{b}^{\dagger p}\hat{b}^{p}\right\rangle + \left\langle \hat{a}^{\dagger p}\hat{a}^{p}\hat{b}^{\dagger l}\hat{b}^{l}\right\rangle} - 1 < 0, \tag{8}$$

trong đó $l \ge p > 0$ và $\hat{n}_a = \hat{a}^\dagger\hat{a}$, $\hat{n}_b = \hat{b}^\dagger\hat{b}$. Nếu tham số $R(l,p)$ càng âm thì tính phản kết chùm hai mode thể hiện càng mạnh. Đối với trạng thái thêm và bớt một



Hình 2: *Sự phụ thuộc của tham số I vào biên độ kết hợp* r_b.

photon lên hai mode kết hợp chẵn, chúng tôi tính được

$$\begin{aligned}
&\left\langle \hat{a}^{\dagger l}\hat{a}^{l}\hat{b}^{\dagger p}\hat{b}^{p}\right\rangle = \{\left(|\alpha|^{2(l+1)} + (2l+1)\,|\alpha|^{2l} + l^2|\alpha|^{2(l-1)}\right)|\beta|^{2p} \\
&+\left(|\beta|^{2(l+1)} + (2l+1)\,|\beta|^{2l} + l^2|\beta|^{2(l-1)}\right)|\alpha|^{2p} + |\alpha|^{2l}|\beta|^{2(p+1)} + |\beta|^{2l}|\alpha|^{2(p+1)} \\
&+2\left(|\beta|^{2l}|\alpha|^{2p} + l|\beta|^{2(l-1)}|\alpha|^{2p} + |\alpha|^{2l}|\beta|^{2p} + l|\alpha|^{2(l-1)}|\beta|^{2p}\right)\mathrm{Re}[\alpha\beta] \\
&+[2\mathrm{Re}[\left(\alpha^{*(l+1)}\beta^{l+1} + (2l+1)\,\alpha^{*l}\beta^{l} + l^2\alpha^{*(l-1)}\beta^{(l-1)}\right)\beta^{*p}\alpha^{p}] \\
&+2\mathrm{Re}[\left(\alpha^{*(l+1)}\beta^{l} + l\alpha^{*l}\beta^{(l-1)}\right)\beta^{*(p+1)}\alpha^{p}] + 2\mathrm{Re}[\alpha^{*l}\alpha^{(p+1)}\beta^{l}\beta^{*(p+1)}] \\
&+2\mathrm{Re}[\left(\alpha^{*l}\beta^{l+1} + l\alpha^{*(l-1)}\beta^{l}\right)\beta^{*p}\alpha^{(p+1)}]]\exp\left\{-|\alpha-\beta|^2\right\};
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&\left\langle \hat{a}^{\dagger p}\hat{a}^{p}\hat{b}^{\dagger l}\hat{b}^{l}\right\rangle = \left(|\alpha|^{2(p+1)} + (2p+1)\,|\alpha|^{2p} + p^2|\alpha|^{2(p-1)}\right)|\beta|^{2l} \\
&+\left(|\beta|^{2(p+1)} + (2p+1)\,|\beta|^{2p} + p^2|\beta|^{2(p-1)}\right)|\alpha|^{2l} + |\alpha|^{2p}|\beta|^{2(l+1)} + |\beta|^{2p}|\alpha|^{2(l+1)} \\
&+2\left(|\beta|^{2p}|\alpha|^{2l} + p|\beta|^{2(p-1)}|\alpha|^{2l} + |\alpha|^{2p}|\beta|^{2l} + p|\alpha|^{2(p-1)}|\beta|^{2l}\right)\mathrm{Re}[\alpha\beta] \\
&+[2\mathrm{Re}[\left(\alpha^{*(p+1)}\beta^{p+1} + (2p+1)\,\alpha^{*p}\beta^{p} + p^2\alpha^{*(p-1)}\beta^{(p-1)}\right)\beta^{*l}\alpha^{l}] \\
&+2\mathrm{Re}[\left(\alpha^{*(p+1)}\beta^{p} + p\alpha^{*p}\beta^{(p-1)}\right)\beta^{*(l+1)}\alpha^{l}] + 2\mathrm{Re}[\alpha^{*p}\alpha^{(l+1)}\beta^{p}\beta^{*(l+1)}] \\
&+2\mathrm{Re}[\left(\alpha^{*p}\beta^{p+1} + p\alpha^{*(p-1)}\beta^{p}\right)\beta^{*l}\alpha^{(l+1)}]]\exp\left\{-|\alpha-\beta|^2\right\};
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&\left\langle \hat{a}^{\dagger(l+1)}\hat{a}^{(l+1)}\hat{b}^{\dagger(p-1)}\hat{b}^{(p-1)}\right\rangle = \{\left(|\alpha|^{2(l+2)} + (2l+3)\,|\alpha|^{2(l+1)} + (l+1)^2|\alpha|^{2(l)}\right) \\
&\times|\beta|^{2(p-1)} + \left(|\beta|^{2(l+2)} + (2(l+1)+1)\,|\beta|^{2(l+1)} + (l+1)^2|\beta|^{2(l)}\right)|\alpha|^{2(p-1)} \\
&+|\alpha|^{2(l+1)}|\beta|^{2(p)} + |\beta|^{2(l+1)}|\alpha|^{2(p)} + 2\mathrm{Re}[\alpha\beta]\left(|\beta|^{2(l+1)}|\alpha|^{2(p-1)}\right. \\
&\left.+(l+1)|\beta|^{2(l)}|\alpha|^{2(p-1)} + |\alpha|^{2(l+1)}|\beta|^{2(p-1)} + (l+1)|\alpha|^{2(l)}|\beta|^{2(p-1)}\right) \\
&\times[2\mathrm{Re}[\left(\alpha^{*(l+2)}\beta^{l+2} + (2(l+1)+1)\,\alpha^{*(l+1)}\beta^{l+1} + (l+1)^2\alpha^{*(l)}\beta^{(l)}\right) \\
&\times\beta^{*(p-1)}\alpha^{p-1}] + 2\mathrm{Re}[\left(\alpha^{*(l+2)}\beta^{l+1} + (l+1)\alpha^{*(l+1)}\beta^{(l)}\right)\beta^{*(p)}\alpha^{p-1}] \\
&+2\mathrm{Re}[\alpha^{*(l+1)}\alpha^{(p)}\beta^{l+1}\beta^{*(p)}] + 2\mathrm{Re}[\left(\alpha^{*(l+1)}\beta^{l+2} + (l+1)\alpha^{*(l)}\beta^{l+1}\right)\beta^{*(p-1)}\alpha^{(p)}]] \\
&\times\exp\left\{-|\alpha-\beta|^2\right\};
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&\left\langle \hat{a}^{\dagger(p-1)}\hat{a}^{(p-1)}\hat{b}^{\dagger(l+1)}\hat{b}^{(l+1)}\right\rangle = \Big(|\alpha|^{2p} + (2(p-1)+1)\,|\alpha|^{2(p-1)} + (p-1)^2|\alpha|^{2(p-2)}\Big)\\
&|\beta|^{2(l+1)} + \Big(|\beta|^{2(p)} + (2(p-1)+1)\,|\beta|^{2(p-1)} + (p-1)^2|\beta|^{2(p-2)}\Big)\,|\alpha|^{2(l+1)}\\
&+|\alpha|^{2(p-1)}|\beta|^{2(l+2)} + |\beta|^{2(p-1)}|\alpha|^{2(l+2)}\\
&+2\Big(|\beta|^{2(p-1)}|\alpha|^{2(l+1)} + (p-1)|\beta|^{2(p-2)}|\alpha|^{2(l+1)} + |\alpha|^{2(p-1)}|\beta|^{2(l+1)}\\
&+(p-1)|\alpha|^{2(p-2)}|\beta|^{2(l+1)}\Big)\,\mathrm{Re}[\alpha\beta] + 2\mathrm{Re}[\alpha^{*(p-1)}\alpha^{(l+2)}\beta^{p-1}\beta^{*(l+2)}]\\
&+[2\mathrm{Re}[\big(\alpha^{*(p)}\beta^{p} + (2(p-1)+1)\,\alpha^{*(p-1)}\beta^{p-1} + (p-1)^2\alpha^{*(p-2)}\beta^{(p-2)}\big)\\
&\times\beta^{*(l+1)}\alpha^{l+1}] + 2\mathrm{Re}[\big(\alpha^{*(p)}\beta^{p-1} + (p-1)\alpha^{*(p-1)}\beta^{(p-2)}\big)\,\beta^{*(l+2)}\alpha^{l+1}]\\
&+2\mathrm{Re}[\big(\alpha^{*(p-1)}\beta^{p} + (p-1)\alpha^{*(p-2)}\beta^{p-1}\big)\,\beta^{*(l+1)}\alpha^{(l+2)}]] \times \exp\left\{-|\alpha-\beta|^2\right\}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Ta tiếp tục đặt $\alpha = r_a \exp(i\varphi_a)$, $\beta = r_b \exp(i\varphi_b)$ và $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$, và tiến hành khảo sát tính phản kết chùm của trạng thái này với $r_a = r_b, \varphi_a = 0, \varphi_b = \frac{\pi}{4}$ theo các trường hợp sau:

a) Trường hợp $l = p$, đồ thị ở hình 3a cho thấy $l = p$ càng lớn thì tính phản kết chùm càng mạnh.

b) Trường hợp $l - p > 0$, khi $l - p = 1$, đồ thị ở hình 3b cho ta thấy l, p càng tăng thì tính phản kết chùm càng mạnh. Khi $l - p = 2$, đồ thị ở hình 3c cho thấy khi l, p tăng thì tính phản kết chùm tăng chậm và gần như bằng nhau. Khi $l - p = 3$, đồ thị ở hình 3d cho ta thấy khi l, p tăng thì tính phản kết chùm giảm.

3.3 Tính đan rối

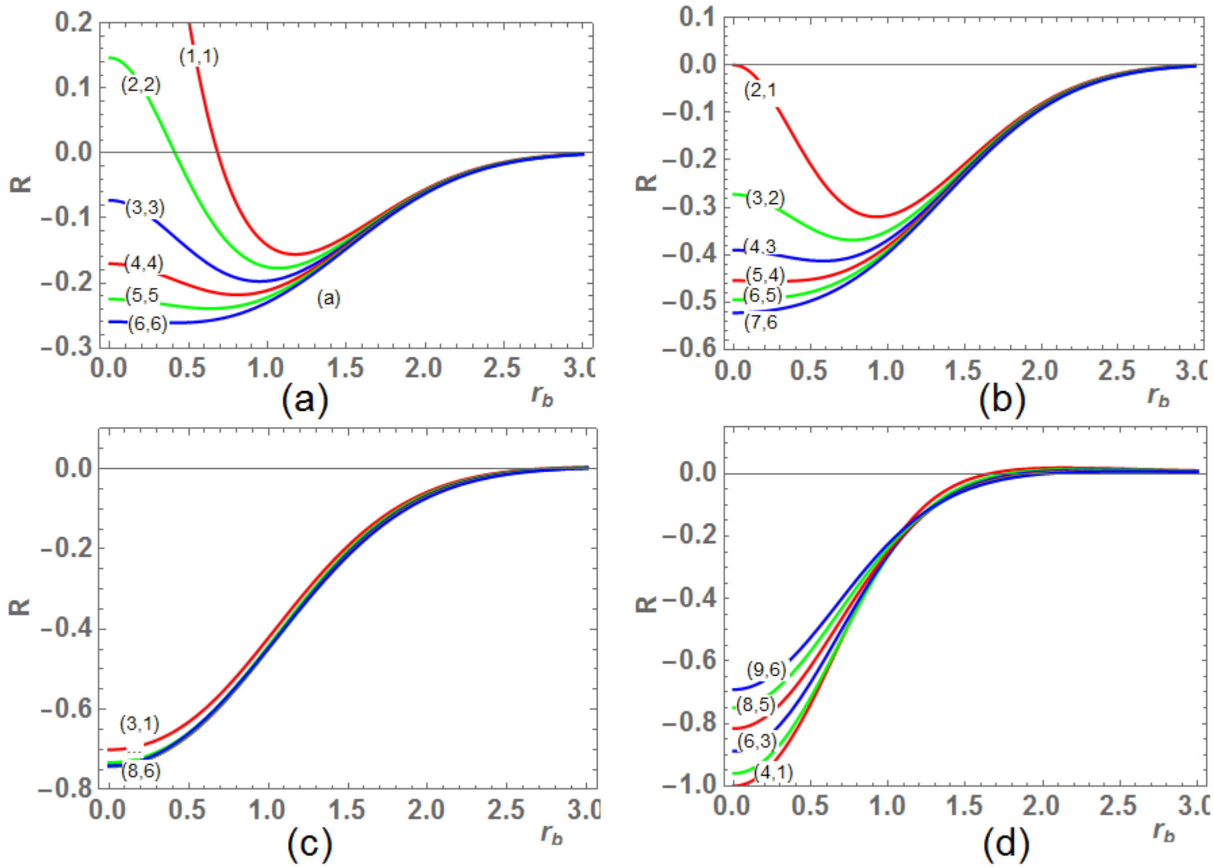
3.3.1 Tính đan rối Hillery–Zubairy

Theo Hillery–Zubairy [3], nếu một trạng thái hai mode thỏa mãn điều kiện sau thì ta kết luận trạng thái đó bị đan rối.

$$\Re_H = \left\langle \hat{N}_a\hat{N}_b\right\rangle - \left|\left\langle \hat{a}\hat{b}^\dagger\right\rangle\right|^2 < 0. \tag{13}$$

Đối với trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp chẵn thì

$$\begin{aligned}
&\Re_H = |N_{\alpha\beta}|^2\{2|\alpha|^4|\beta|^2 + 2|\alpha|^2|\beta|^4 + 6|\alpha|^2|\beta|^2 + |\alpha|^2 + |\beta|^2\\
&+2\left(2|\alpha|^2|\beta|^2 + |\alpha|^2 + |\beta|^2\right)\mathrm{Re}[\alpha\beta] + [2\mathrm{Re}[\big(\alpha^{\dagger 2}\beta^2 + 3\alpha^\dagger\beta + 1\big)\,\beta^\dagger\alpha]\\
&+2\mathrm{Re}[\big(\alpha^\dagger\beta + 1\big)\,\beta^{\dagger 2}|\alpha|^2] + 2\mathrm{Re}[\big(\beta^\dagger\alpha + 1\big)\,\alpha^{\dagger 2}|\beta|^2] + 2\mathrm{Re}[|\alpha|^2|\beta|^2\alpha^\dagger\beta]]\\
&\times\exp\left\{-|\alpha-\beta|^2\right\}\} - |N_{\alpha\beta}|^4\{\big(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\big)\,\alpha\beta^* + \big(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\big)\,\beta\alpha^*\\
&+\left(|\alpha|^2 + 1\right)\beta^{*2} + \alpha^2|\beta|^2 + \left(|\beta|^2 + 1\right)\alpha^{*2} + \beta^2|\alpha|^2 + [(\alpha^*\beta + 2)\,|\beta|^2\\
&+(\alpha^*\beta + 1)\,\beta^{*2} + \beta^2\beta^*\alpha + \beta\beta^{*2}\alpha + (\beta^*\alpha + 2)\,|\alpha|^2 + (\beta^*\alpha + 1)\,\alpha^{*2} + \alpha^2\alpha^*\beta\\
&+\alpha\alpha^{*2}\beta]\exp\left\{-|\alpha-\beta|^2\right\}\}\{\big(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\big)\,\alpha^*\beta + \big(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\big)\,\beta^*\alpha\\
&+\left(|\alpha|^2 + 1\right)\beta^2 + \alpha^{*2}|\beta|^2 + \left(|\beta|^2 + 1\right)\alpha^2\\
&+\beta^{*2}|\alpha|^2 + [(\alpha\beta^* + 2)\,|\beta|^2 + (\alpha\beta^* + 1)\,\beta^2 + \beta^{*2}\beta\alpha^* + \beta^*\beta^2\alpha^* + (\beta\alpha^* + 2)\,|\alpha|^2\\
&+(\beta\alpha^* + 1)\,\alpha^2 + \alpha^{*2}\alpha\beta^* + \alpha^*\alpha^2\beta^*]\exp\left\{-|\alpha-\beta|^2\right\}\}.
\end{aligned} \tag{14}$$



Hình 3: *Đồ thị khảo sát sự phụ thuộc của $R_{ab}(l,p)$ vào biên độ r_b ứng với các cặp giá trị (l,p) khác nhau.*

Bằng cách đặt $\alpha = r_a \exp(i\varphi_a)$, $\beta = r_b \exp(i\varphi_b)$ và $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$, chúng tôi khảo sát $\Re$ theo biên độ r_b và pha dao động φ_b với điều kiện khảo sát là $r_a = 2r_b, \varphi_a = 2\varphi_b, 0 \leq r_b \leq 1$ và $\varphi_b = {}^{\pi}/_{3}$. Kết quả ở hình 4a cho thấy trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp chẵn bị đan rối theo tiêu chuẩn đan rối Hillery–Zubairy khi r_b không quá bé.

3.3.2 Tính đan rối Nha-Kim

Theo Nha-Kim [4], một trạng thái hai mode gọi là đan rối nếu trạng thái đó thỏa mãn bất đẳng thức $\left[1 + 4(\Delta L_y)^2\right]\left[1 + 4(\Delta L_x)^2\right] < (1 + \langle N_+ \rangle)^2 + 16\,\langle \Delta K_x \Delta K_y \rangle_S^2$, hay

$$\begin{aligned}
\Re_N = &\left[1 - \langle a^{+2}b^2 + a^2b^{+2} - a^+abb^+ - aa^+b^+b\rangle + \langle a^+b - ab^+\rangle^2\right] \\
&\times \left[1 + \langle a^{+2}b^2 + a^2b^{+2} + a^+abb^+ + aa^+b^+b\rangle - \langle a^+b - ab^+\rangle^2\right] \\
&-16\left(\tfrac{1}{2i}\,\langle a^+a^+bb - aab^+b^+\rangle - \tfrac{1}{4i}\,\langle a^+b + ab^+\rangle\,\langle a^+b - ab^+\rangle\right)^2 \\
&-(1 + \langle a^+a + b^+b\rangle)^2 < 0.
\end{aligned} \tag{15}$$