LỜI NÓI ĐẦU

Dao động là một hiện tượng phổ biến trong tự nhiên và trong kỹ thuật. Các máy móc, các phương tiện giao thông vận tải, các toà nhà cao tầng, những chiếc cầu bắc qua các dòng sông, chiếc đồng hồ đeo tay mà chúng ta thường hay sử dụng… đó là các hệ dao động trong kỹ thuật. Bản thân mỗi người chúng ta cũng là một hệ dao động mà có lẽ ít người đã biết.

Vậy dao động là gì? Một cách sơ lược, dao động là một quá trình trong đó một đại lượng vật lý (hoá học, sinh học,…) thay đổi theo thời gian mà có một đặc điểm nào đó lặp lại ít nhất một lần. Dao động kỹ thuật là dao động của các hệ kỹ thuật (các máy móc, các phương tiện giao thông vận tải,…).

Các kiến thức về lý thuyết dao động ngày nay trở thành một bộ phận không thể thiếu được trong tổng thể các kiến thức cần phải trang bị cho người kỹ sư cơ khí, xây dựng, tự động hoá, …Nhằm đáp ứng yêu cầu cần thiết đó môn học Dao động kỹ thuật đã được đưa vào chương trình giảng dạy cho sinh viên trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Nam Định, nội dung môn học gồm hai phần: Dao động tuyến tính của hệ hữu hạn bậc tự do và Dao động tuyến tính của hệ vô hạn bậc tự do trong tổng số 4 chương của chương trình môn học.

Tập bài giảng được viết trên cơ sở chương trình môn học Dao động kỹ thuật. Người biên soạn đã cố gắng trình bày những vấn đề cơ bản của Dao động kỹ thuật theo quan điểm hiện đại, đảm bảo tính sư phạm và yêu cầu chất lượng của một bài giảng giảng dạy đại học. Những kiến thức trình bày trong bài giảng này là những kiến thức tối thiểu, cần thiết để sinh viên có thể học các môn học tiếp theo của các ngành Công nghệ hàn, Công nghệ Ô tô, Công nghệ chế tạo máy… Các Ví dụ trong bài giảng gồm hai loại: Các Ví dụ củng cố kiến thức và các Ví dụ áp dụng giải một số mô hình dao động trong kỹ thuật.

Tập bài giảng được biên soạn lần đầu nên chắc chắn còn nhiều thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý của các đồng nghiệp và các em sinh viên để có điều kiện sửa chữa, hoàn thiện hơn tập bài giảng nhằm phục vụ tốt hơn cho công tác giảng dạy và học tập. Các ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ: Bộ môn Kỹ thuật cơ sở, Khoa cơ khí, Trường Đại học Sư phạm kỹ thuật Nam Định.

Nhóm tác giả biên soạn

MỤC LỤC

Chương 1
MÔ TẢ ĐỘNG HỌC CÁC QUÁ TRÌNH DAO ĐỘNG

Các quá trình dao động thường là các quá trình thay đổi đa dạng theo thời gian. Trong tính toán hoặc trong đo đạc các quá trình dao động người ta thường phân thành dao động tuần hoàn và dao động không tuần hoàn. Một dạng đặc biệt của các dao động tuần hoàn là dao động điều hoà. Trong chương này ta sẽ trình bày một số tính chất động học và cách biểu diễn các dao động tuần hoàn và không tuần hoàn. Phần động học các quá trình dao động ngẫu nhiên sẽ được trình bày ở giáo trình khác.

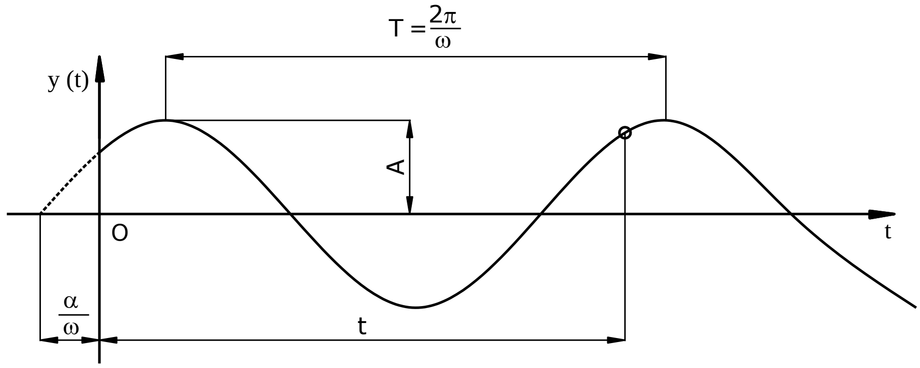
1.1 DAO ĐỘNG ĐIỀU HOÀ

1.1.1 Biểu diễn thực dao động điều hoà

Dao động điều hoà được mô tả về phương diện động học bởi hệ thức

$$y(t) = A\sin(\omega t + \alpha) = A\sin\psi(t) \qquad (1.1)$$

Dao động điều hoà còn được gọi là dao động hình sin. Đại lượng A không giảm tổng quát luôn có thể giả thiết là số dương và được gọi là biên độ dao động. Như thế biên độ dao động là giá trị tuyệt đối của độ lệch lớn nhất của đại lượng dao động $y(t)$ so với giá trị trung bình của nó (hình 1.1). Đại lượng $\psi(t) = \omega t + \alpha$ được gọi là góc pha, hay một cách vắn tắt là pha dao động. Góc α được gọi là pha ban đầu.



Hình 1.1 Dao động điều hoà

Đại lượng ω được gọi là tần số vòng của dao động điều hoà, đơn vị của ω là rad/s hoặc s^{-1}. Vì hàm sin có chu kỳ 2π nên dao động điều hoà có chu kỳ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (1.2)$$

Điều đó được xác định bởi biến đổi sau:

$$y(t+T) = A\sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \alpha\right] = A\sin(\omega t + \alpha + 2\pi)$$
$$= A\sin(\omega t + \alpha) = y(t)$$

Như thế chu kỳ dao động là khoảng thời gian nhỏ nhất cần thiết để đại lượng dao động trở lại vị trí ban đầu.

Đại lượng $\quad f = \frac{1}{T}$ (1.3)

được gọi là tần số dao động. Đơn vị của tần số f là s^{-1} hoặc Hz (Hertz). Như thế, tần số là số lần dao động thực hiện trong một giây. Giữa tần số dao động f và tần số vòng ω có mối quan hệ sau

$$\omega = 2\pi f \tag{1.4}$$

Từ công thức (1.1) ta thấy: một dao động điều hoà được xác định khi biết ba đại lượng A, ω và α. Mặt khác, một dao động điều hoà cũng được xác định duy nhất khi biết tần số vòng ω và các điều kiện đầu. Giả sử các điều kiện đầu có dạng

$$t = 0\ ; \qquad y(0) = y_0\ ; \qquad \dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

Khi đó từ phương trình (1.1) ta có

$$y_0 = A\sin\alpha\ ; \qquad \dot{y}_0 = \omega A\cos\alpha$$

Từ đó suy ra

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{\omega^2}} \tag{1.5}$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{\omega y_0}{\dot{y}_0} \tag{1.6}$$

Việc biểu diễn pha ban đầu α dưới dạng (1.6) có nhược điểm là trong khoảng từ 0 đến 2π pha ban đầu α không được xác định một cách duy nhất. Vì vậy để xác định α, ta cần chú ý đến cả hệ thức

$$\alpha = \arcsin\frac{y_0}{A} \tag{1.7}$$

Người ta cũng hay biểu diễn dao động điều hoà (1.1) dưới dạng sau

$$y(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \tag{1.8}$$

So sánh biểu thức (1.8) với biểu thức (1.1) ta có các hệ thức

$$C_1 = A\sin\alpha; \qquad C_2 = A\cos\alpha \tag{1.9}$$

Từ đó suy ra

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \qquad \alpha = \mathrm{arctg}\frac{C_1}{C_2} = \arcsin\frac{C_1}{A} \tag{1.10}$$

Các hằng số C_1 và C_2 cũng có thể xác định được từ các điều kiện đầu

$$C_1 = y_0 \quad ; \quad C_2 = \frac{\dot{y}_0}{\omega}$$

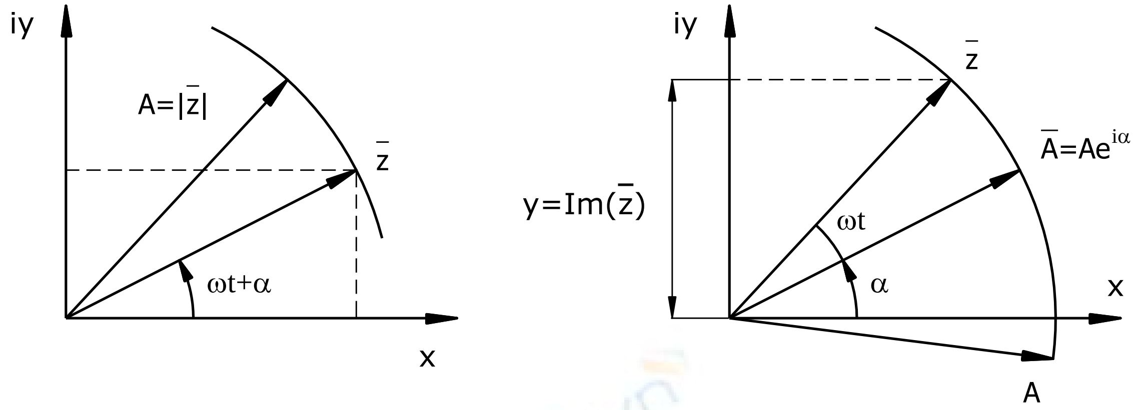
1.1.2 Biểu diễn phức dao động điều hoà

Một cách biểu diễn có hình ảnh dao động điều hoà là biểu diễn bằng véc tơ phức. Hàm điều hoà y(t) có thể xem như là phần ảo của véc tơ phức $\overline{z}$ quay với vận tốc góc ω trong mặt phẳng số (hình 1.2)

$$\overline{z} = Ae^{i(\omega t+\alpha)} = Ae^{i\alpha}e^{i\omega t} = \overline{A}e^{i\omega t} \tag{1.11}$$

$$y(t) = \mathrm{Im}(\bar{z}(t)) \qquad (1.12)$$

Đại lượng $\bar{A} = Ae^{i\alpha}$ được gọi là biên độ phức. Như thế biên độ phức $\bar{A}$ biểu diễn vị trí của véc tơ phức $\bar{z}$ tại thời điểm t = 0. Véc tơ phức $\bar{z}$ còn được gọi là véc tơ quay.



Hình 1.2 Biểu diễn phức dao động điều hoà

Nhờ công thức Euler

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Ta có

$$y(t) = \mathrm{Im}\big(\bar{z}(t)\big) = A\,\mathrm{Im}(e^{i(\omega t+\alpha)}) = A\sin(\omega t + \alpha)$$

Trị tuyệt đối của véc tơ phức $|\bar{z}|$ bằng biên độ của dao động điều hoà. Việc biểu diễn dao động điều hoà bằng véc tơ phức quay trong mặt phẳng số gọi là ảnh véc tơ phức của dao động điều hoà.

1.1.3 Tổng hợp hai dao động điều hoà cùng phương và cùng tần số

Cho 2 dao động điều hoà cùng phương và cùng tần số

$$y_1(t) = A_1\sin(\omega t + \alpha_1) \;\; ; \qquad y_2(t) = A_2\sin(\omega t + \alpha_2)$$

Tổng của hai dao động điều hoà trên được xác định bởi hệ thức

$$y(t) = A_1\sin(\omega t + \alpha_1) + A_2\sin(\omega t + \alpha_2)$$

Sử dụng định lý cộng đối với hàm sin ta có

$$y(t) = A_1\sin\omega t\cos\alpha_1 + A_1\cos\omega t\sin\alpha_1 + A_2\sin\omega t\cos\alpha_2 + A_2\cos\omega t\sin\alpha_2$$

$$= (A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2)\sin\omega t + (A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2)\cos\omega t$$

Nếu ta đưa vào các ký hiệu

$$A\cos\alpha = A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2$$

$$A\sin\alpha = A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2$$

thì biểu thức trên có dạng

$$y(t) = A\sin\omega t\cos\alpha + A\cos\omega t\sin\alpha = A\sin(\omega t + \alpha) \qquad (1.13)$$

Như thế tổng hợp hai dao động điều hoà cùng phương và cùng tần số là dao động điều hoà với tần số là tần số của các dao động điều hoà thành phần, biên độ A và góc pha ban đầu α được xác định bởi các hệ thức sau

$$A = \sqrt{(A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2)^2 + (A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2)^2} \qquad (1.14)$$
$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_1)}$$

$$\alpha = \text{arctg}\frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2} \qquad (1.15)$$

hoặc

$$\alpha = \arcsin\frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A} \qquad (1.16)$$

Nếu sử dụng cách biểu diễn phức dao động điều hoà, thì hai dao động điều hoà thành phần có dạng

$$\bar{z}_1 = A_1e^{i(\omega t+\alpha_1)} \quad ; \qquad \bar{z}_2 = A_2e^{i(\omega t+\alpha_2)}$$

Từ đó dao động tổng hợp có dạng

$$\bar{z} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (A_1e^{i\alpha_1} + A_2e^{i\alpha_2})e^{i\omega t} = (\bar{A}_1 + \bar{A}_2)e^{i\omega t} = \bar{A}e^{i\omega t} \qquad (1.17)$$

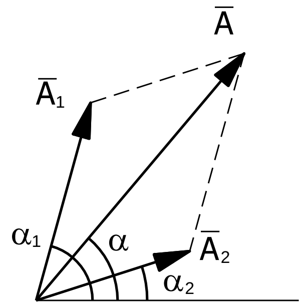
Trong đó $\bar{A} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2$ (1.18)

Công thức (1.18) được biểu diễn trên mặt phẳng số như hình 1.3. Sử dụng công thức Euler, từ (1.17) ta sẽ tìm được các công thức xác định biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp như các công thức (1.14) và (1.15)

Khi các pha ban đầu $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ thì ta có

$$A = A_1 + A_2$$

Hai dao động điều hoà $y_1(t)$ và $y_2(t)$ có cùng phương, cùng tần số và cùng biên độ được gọi là các dao động đồng bộ. Mặc dù rằng các biên độ A_1 và A_2 của chúng có thể biểu diễn các đại lượng vật lý khác nhau. Thí dụ như $y_1(t)$ biểu diễn lực thay đổi điều hoà, $y_2(t)$ biểu diễn biến dạng đàn hồi do lực đó gây ra. Chúng tạo nên một quá trình diễn biến đồng bộ.



Hình 1.3 Tổng hợp hai dao động điều hoà

1.2 DAO ĐỘNG TUẦN HOÀN

1.2.1 Các tham số động học của dao động tuần hoàn

Một hàm số y(t) được gọi là hàm tuần hoàn, nếu tồn tại một hằng số T > 0, sao cho với mọi t ta có hệ thức

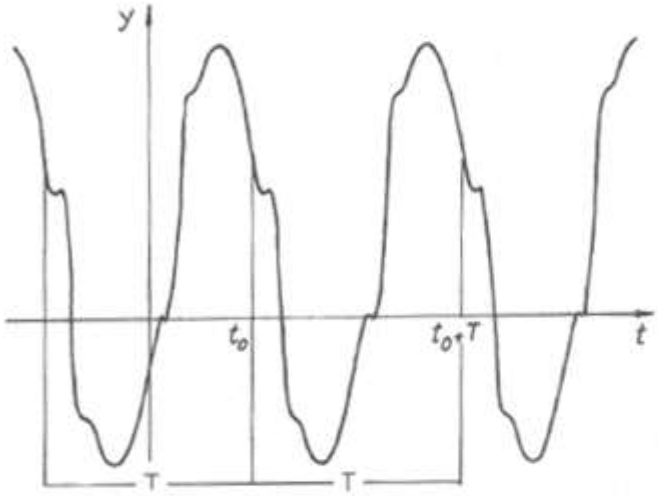
$$y(t + T) = y(t) \qquad (2.1)$$

Một quá trình dao động được mô tả về mặt động học bởi một hàm tuần hoàn y(t) được gọi là dao động tuần hoàn. Hằng số T nhỏ nhất để cho hệ thức (2.1) được thoả mãn gọi là chu kỳ dao động. Hình vẽ 1.5 biểu diễn một quá trình diễn biến theo thời gian của một dao động tuần hoàn.

Chú ý rằng nếu hàm số y(t) có chu kỳ T thì hàm số u(t) = y(at) có chu kỳ là T/a.

Thực vậy

$$u\left(t+\frac{T}{a}\right)=y\left[a\left(t+\frac{T}{a}\right)\right]=y(at+T)=y(at)=u(t)$$



Hình 1.4 Dao động tuần hoàn

Đại lượng nghịch đảo của chu kỳ dao động

$$f=\frac{1}{T} \tag{2.2}$$

được gọi là tần số dao động. Như thế tần số dao động f là số dao động thực hiện trong một đơn vị thời gian. Nếu chu kỳ dao động T tính bằng giây (s) thì tần số dao động f tính bằng s^{-1} hoặc Hz (Hertz). Trong kỹ thuật người ta hay sử dụng khái niệm tần số vòng ω

$$\omega=2\pi f \tag{2.3}$$

Khái niệm tần số vòng ω được dung nhiều nên đôi khi người ta hay gọi tắt nó là tần số dao động. Cần chú ý đến cách gọi tắt này để khỏi nhầm lẫn với khái niệm tần số dao động f. Thứ nguyên của ω là rad/s hoặc 1/s.

Biên độ A của dao động tuần hoàn y(t) được định nghĩa bởi hệ thức sau

$$A=\frac{1}{2}[\max y(t)-\min y(t)] \tag{2.4}$$

Đối với dao động tuần hoàn, ngoài các tham số động học đặc trưng như chu kỳ, tần số, biên độ người ta còn sử dụng các tham số giá trị trung bình theo thời gian của hàm y(t) trong một chu kỳ. Ba loại giá trị trung bình hay được sử dụng là giá trị trung bình tuyến tính

$$y_{tt}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}y(t)dt \tag{2.5}$$

giá trị trung bình hiệu dụng

$$y_{hd} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^2(t)\,dt} \qquad (2.6)$$

và giá trị trung bình hiệu chỉnh

$$y_{hc} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |y(t)|\,dt \qquad (2.7)$$

Trong các công thức (2.5), (2.6) và (2.7) khoảng lấy tích phân $[-T/2,\ T/2]$ có thể thay bằng khoảng $[t_0, t_0 + T]$.

1.2.2 Tổng hợp hai dao động điều hoà có cùng phương khác tần số với tỷ lệ giữa hai tần số là số hữu tỷ

Cho hai dao động điều hoà thành phần

$$y_1(t) = A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1)\ ; \qquad y_2(t) = A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

với

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{p}{q} \neq 1 \qquad (p, q = 1, 2, 3\ldots) \qquad (2.8)$$

Tổng của hai dao động điều hoà trên được xác định bởi hàm

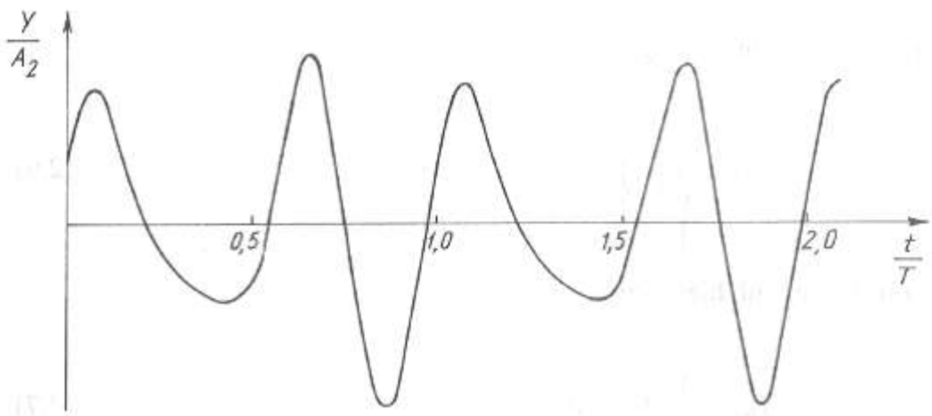
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2) \qquad (2.9)$$

Chu kỳ của dao động thành phần $y_1(t)$ là $T_1 = 2\pi/\omega_1$, của dao động thành phần $y_2(t)$ là $T_2 = 2\pi/\omega_2$. Từ công thức (2.8) ta suy ra chu kỳ của dao động tổng hợp y(t) là

$$T = pT_1 = qT_2 \qquad (2.10)$$

Vậy tổng hợp hai dao động điều hoà cùng phương khác tần số với tỷ lệ giữa hai tần số là số hữu tỷ $\omega_1 : \omega_2 = p : q$ là một dao động tuần hoàn chu kỳ $T = pT_1 = qT_2$. Nếu p/q là phân số tối giản thì T là bội số chung nhỏ nhất của T_1 và T_2.

Hình 1.5 là đồ thị dao động tổng hợp của hai dao động điều hoà với A_1:A_2 = 2:1, $\omega_1 : \omega_2 = 2:3, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi/3$



Hình 1.5 Đồ thị dao động tổng hợp của hai dao động điều hoà

Nếu sử dụng các véc tơ phức ta có thể viết một cách hình thức như sau

$$\bar{z} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = |\bar{z}_1|e^{i\psi_1} + |\bar{z}_2|e^{i\psi_2} = |\bar{z}|e^{i\psi} \quad (2.11)$$

Trong đó

$$|\bar{z}_1| = A_1 \ ; \ |\bar{z}_2| = A_2 \ ; \ \psi_1 = \omega_1 t + \alpha_1 \ ; \ \psi_2 = \omega_2 t + \alpha_2$$

Từ hình vẽ 1.6 ta có thể xác định được mođun $|\bar{z}|$ và argument ψ của số phức $\bar{z}$

$$|\bar{z}| = \sqrt{|\bar{z}_1|^2 + |\bar{z}_2|^2 - 2|\bar{z}_1||\bar{z}_2|\cos[\pi - (\psi_2 - \psi_1)]} \quad (2.12)$$

$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos[(\omega_2 - \omega_1)]}$$

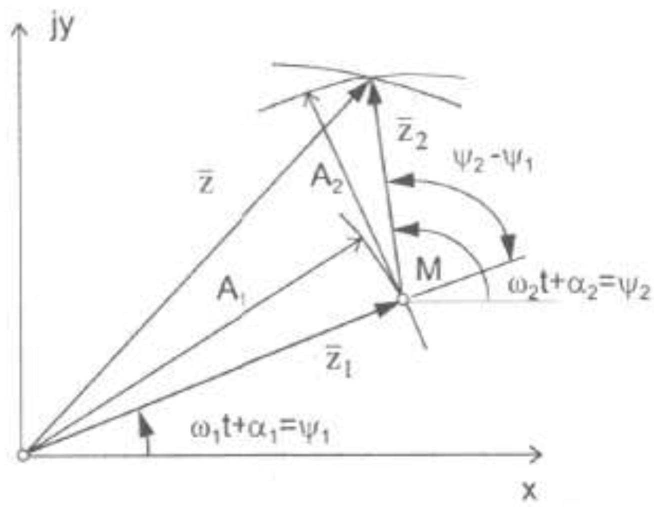
$$\psi(t) = \arcsin\frac{|\bar{z}_1|\sin\psi_1 + |\bar{z}_2|\sin\psi_2}{|\bar{z}|} \quad (2.13)$$

$$= \arcsin\frac{A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)}{|\bar{z}|}$$

Bây giờ ta xét một trường hợp riêng quan trọng. Đó là trường hợp $\omega_1 - \omega_2$ nhỏ và biên độ các dao động điều hoà thành phần bằng nhau $A_1 = A_2 = A$. Chú ý đến hệ thức lượng giác $2cos^2\alpha = 1 + cos2\alpha$, từ công thức (2.12) ta suy ra

$$|\bar{z}| = A\sqrt{2\{1 + \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1]\}}$$

$$= 2A|\cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1]/2| \quad (2.14)$$



Hình 1.6 Tổng hợp hai dao động điều hoà

Chú ý đến hệ thức lượng giác $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ ta có thể biến đổi biểu thức (2.13) về dạng đơn giản hơn

$$\psi(t) = \arcsin\frac{2\sin\left[\frac{(\omega_2 + \omega_1)t + \alpha_2 + \alpha_1}{2}\right].\cos\left[\frac{(\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1}{2}\right]}{2\cos\left[\frac{(\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1}{2}\right]}$$

$$= \frac{1}{2}[(\omega_1 + \omega_2)t + \alpha_2 + \alpha_1] \quad (2.15)$$

Để viết cho gọn ta đưa vào ký hiệu

$$a(t) = 2A\cos\frac{[(\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1]}{2} \quad (2.16)$$

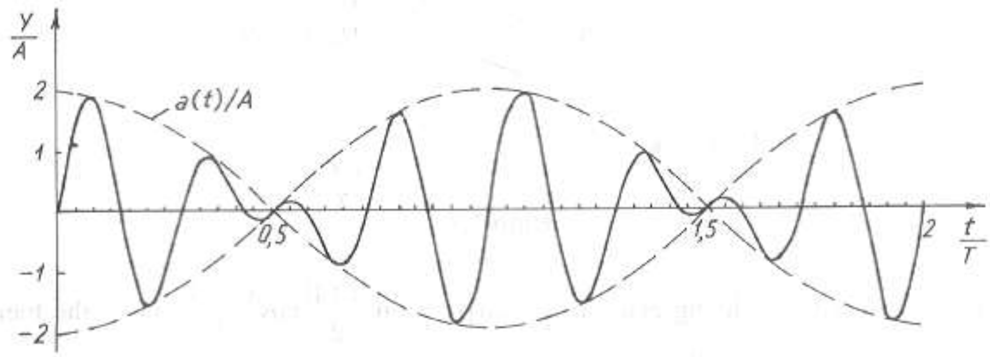
Chú ý đến (2.14), (2.15), (2.16) từ công thức (2.11) ta suy ra

$$y(t) = \mathrm{Im}(\bar{z})$$

$$= 2A\cos\frac{[(\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1]}{2}\sin\frac{[(\omega_2 + \omega_1)t + \alpha_2 + \alpha_1]}{2}$$

$$= a(t)\sin\frac{[(\omega_2 + \omega_1)t + \alpha_2 + \alpha_1]}{2} \quad (2.17)$$

Vậy khi ω_1 khá gần ω_2 và biên độ $A_1 = A_2$, dao động tổng hợp (2.17) là dao động hình sin với tần số vòng $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ và biên độ dao động a(t) là hàm thay đổi chậm theo thời gian. Tần số vòng của biên độ a(t) là $(\omega_1 - \omega_2)/2$. Quá trình dao động như thế được gọi là hiện tượng phách. Hình 1.7 là một thí dụ minh hoạ về dao động tổng hợp của hai dao động điều hoà tần số khá gần nhau.



Hình 1.7 Dao động tổng hợp của hai dao động điều hoà tần số khá gần nhau

1.2.3 Phân tích Fourier các hàm tuần hoàn

Trong thực tế ta ít gặp các dao động điều hoà thuần tuý mà thường hay gặp các dao động phức tạp biểu diễn bằng hàm tuần hoàn. Một hàm tuần hoàn chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ với một số giả thiết mà trong thực tế luôn chấp nhận được có thể phân tích thành chuỗi Fourier

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k cosk\omega t + b_k sink\omega t) \quad (2.18)$$

Trong đó a_0 , a_k , b_k được gọi là các hệ số Fourier và được xác định bởi các công thức

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\sin k\omega t\ dt \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.19}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos k\omega t\ dt \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Chuỗi Fourier (2.18) có thể viết dưới dạng chuẩn của dao động

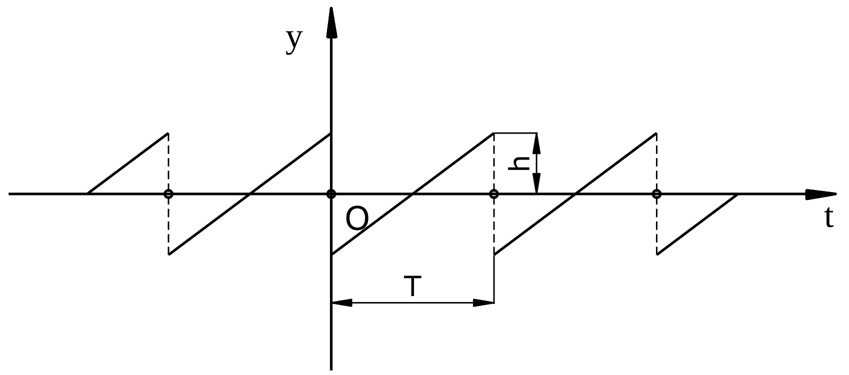
$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(k\omega t + a_k\right) \tag{2.20}$$

với $$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \qquad \alpha_k = arctg\,\frac{a_k}{b_k} \tag{2.21}$$

Việc phân tích một hàm tuần hoàn thành chuỗi Fourier được gọi là phân tích điều hoà. Hằng số a_0 được gọi là giá trị trung bình của dao động, số hạng $A_1\sin(\omega t + \alpha_1)$ được gọi là dao động cơ bản, số hạng $A_k\sin(k\omega t + \alpha_k)$ được gọi là dao động bậc k-1 (với k > 1) hay gọi là các điều hoà.

Nếu một chuỗi Fourier hội tụ đều thì nó sẽ hội tụ đến giá trị của hàm y(t). Đối với chuỗi Fourier hội tụ đều thì ta có thể tích phân, vi phân từng số hạng của chuỗi. Chú ý rằng một chuỗi Fourier nào đó hội tụ, nhưng chuỗi các đạo hàm các thành phần của nó có thể không hội tụ.

Thí dụ 1.1: Phân tích Fourier hàm răng cưa như hình 1.8. Biết rằng giá trị của hàm ở các vị trí nhảy bằng không.



Hình 1.8 Hàm răng cưa

Lời giải: Trong khoảng 0 < t < T hàm răng cưa tuân theo quy luật

$$y(t) = h\left(-1 + \frac{2t}{T}\right)$$

Vậy y(t) là hàm lẻ, y(-t) = -y(t). Do đó các hệ số Fourier $a_k = 0$. Theo công thức (2.19) ta có

$$b_k = \frac{2h}{T}\int_0^T \left[\left(-1 + \frac{2t}{T}\right)\sin\frac{2k\pi t}{T}\right]dt = -\frac{2h}{k\pi}$$

Từ đó suy ra chuỗi Fourier của hàm răng cưa có dạng

$$y(t) = -\frac{2h}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{2k\pi t}{T}$$

Theo tiêu chuẩn hội tụ Abel chuỗi trên hội tụ.

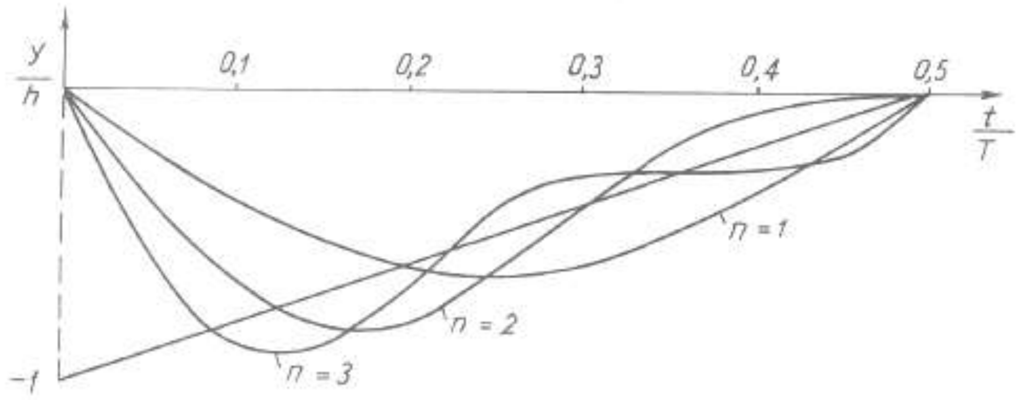
Ta xét các tổng bộ phận của chuỗi trên

$$y_n(t) = -\frac{2h}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin\frac{2k\pi t}{T}$$

Trên hình 1.9b là đồ thị của đường cong $y_n(t)$ (n = 1, 2, 3) của chuỗi trong nửa chu kỳ. Khi n càng tăng thì $y_n(t)$ càng gần giống y(t).

Trong khi nhiều bài toán thực tế hàm y(t) thường cho dưới dạng đồ thị hoặc bảng số. Khi đó để xác định các hệ số Fourier a_0, a_k, b_k ta không thể sử dụng các công thức tích phân (2.19). Để phân tích điều hoà gần đúng, người tat hay chuỗi Fourier (2.18) của hàm y(t) bằng một đa thức lượng giác

$$y_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{2k\pi t}{T} + b_k\sin\frac{2k\pi t}{T}\right) \qquad (2.22)$$



Hình 1.9 Đồ thị đường cong $y_n(t)$

Để xác định các hệ số Fourier a_0, a_k, b_k người ta chia khoảng tích phân (0, T) thành m phần bằng nhau (m ≥ 2n+1) và xác định giá trị của hàm y(t) tại các điểm t_i

$$t_i = \frac{iT}{m} \qquad (i=1,2,\ldots,m) \qquad (2.23)$$

Các công thức (2.19) được thay bởi công thức sau

$$a_0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y(t_i) \qquad (2.24)$$

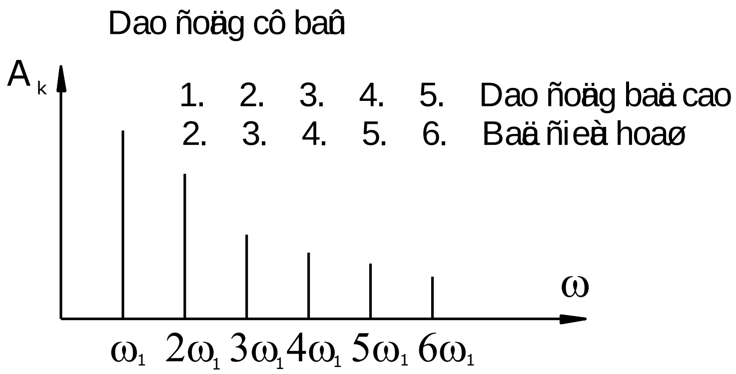
$$a_k = \frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m} y(t_i)\cos\left(\frac{2ki\pi}{m}\right)$$

$$b_k = \frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m} y(t_i)\sin\left(\frac{2ki\pi}{m}\right) \quad , \quad (k = 1,2, \dots, n)$$

1.2.4 Biểu diễn các hàm tuần hoàn trong miền tần số

Ta chọn hệ toạ độ vuông góc, trục hoành biểu diễn tần số ω (hoặc tần số f), trục tung biểu diễn độ lớn các biên độ A của các điều hoà. Việc biểu diễn các biên độ A_k ứng với tần số $\omega_k = k\omega$ của điều hoà thứ k trong chuỗi Fourier của hàm tuần hoàn y(t) trong mặt phẳng (ω, A) gọi là biểu diễn hàm tuần hoàn y(t) trong miền tần số. Tập hợp các biên độ A_k trong khai triển Fourier (2.20) của hàm tuần hoàn y(t) được gọi là phổ của hàm tuần hoàn y(t). Trên hình 1.10 biểu diễn phổ của hàm răng cưa trong thí dụ 1.1.

Việc cho biết các biên độ A_k của các điều hoà chưa đủ các thong tin về hàm y(t), bởi vì ta chưa biết được các pha ban đầu của các điều hoà đó. Tuy nhiên từ biểu đồ biên độ - tần số ta cũng có thể giải quyết được khá nhiều vấn đề của bài toán dao động cần nghiên cứu. Từ kết quả đo dao động, các máy phân tích tần số đơn giản cũng có thể xác định được biên độ của dao động cơ bản và các dao động bậc cao. Việc xác định các pha ban đầu đòi hỏi các thiết bị đo tương đối phức tạp.



Hình 1.10 Phổ của hàm răng cưa

Nếu muốn biểu diễn đầy đủ các thông tin về một hàm tuần hoàn trong miều tần số, ta sử dụng hai biểu đồ, một để vẽ các hệ số Fourier a_k, một để vẽ các hệ số b_k. Khi đó biên độ và pha ban đầu của các điều hoà sẽ được xác định bởi công thức (2.21)

1.2.5 Biểu diễn đồng thời hai đại lượng dao động điều hoà theo hai phương vuông góc với nhau

a. Hai dao động điều hoà có cùng tần số

Giả sử cho hai dao động điều hoà cùng tần số thực hiện chuyển động đồng thời theo hai phương vuông góc với nhau

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha_1) \quad ; \qquad y(t) = B\sin(\omega t + \alpha_1) \qquad (2.25)$$

Từ hai phương trình (2.25) khử biến thời gian t đi ta sẽ có phương trình quỹ đạo. Trước hết ta viết lại phương trình (2.25) dưới dạng sau

$$\frac{x}{A} = \sin\omega t \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 \cos\omega t \qquad (2.26)$$

$$\frac{y}{B} = \sin\omega t \cos\alpha_2 + \sin\alpha_2 \cos\omega t \qquad (2.27)$$

Nhân hai phương trình (2.26) với $-\cos\alpha_2$, phương trình (2.27) với $\cos\alpha_1$ rồi cộng lại ta được

$$-\frac{x}{A}\cos\alpha_2 + \frac{y}{B}\cos\alpha_1 = \cos\omega t \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \qquad (2.28)$$

Nhân phương trình (2.26) với $\sin\alpha_2$, phương trình (2.27) với $-\sin\alpha_1$ rồi cộng vế với vế

$$\frac{x}{A}\sin\alpha_2 - \frac{y}{B}\sin\alpha_1 = \sin\omega t \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \qquad (2.29)$$

Bình phương hai vế của các phương trình (2.28), (2.29) rồi cộng lại ta được phương trình

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1) \qquad (2.30)$$

Phương trình (2.30) là phương trình đường cong bậc hai với x, y theo (2.27) có giá trị giới nội. Vậy (2.30) là phương trình của đường elip. Dạng của elip này phụ thuộc vào các biên độ dao động điều hoà A, B và vào hiệu các góc pha $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Ta xét một số trường hợp đặc biệt sau đây

1. Trường hợp $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 0$. Phương trình (2.30) có dạng

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{B}{A}x \qquad (2.31)$$

Phương trình elip suy biến thành phương trình đường thẳng. Quỹ đạo là một đoạn thẳng $(-A \le x \le A, -B \le y \le B)$.

2. Trường hợp $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \pi$. Phương trình (2.30) có dạng

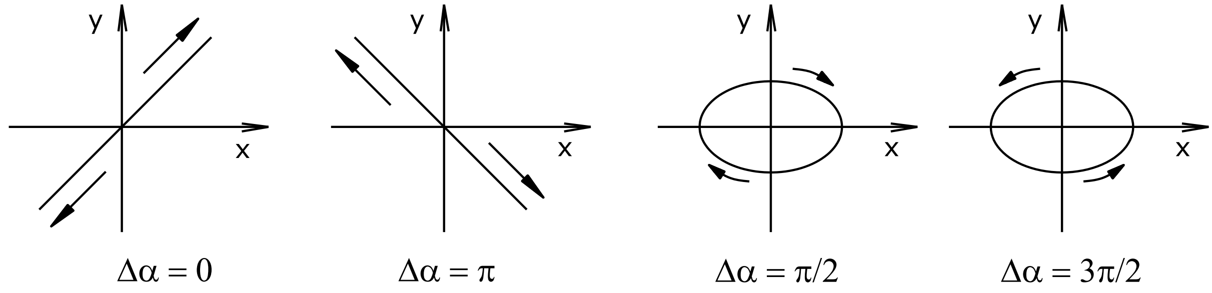
$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad y = -\frac{B}{A}x \qquad (2.32)$$

Phương trình elip suy biến thành phương trình đường thẳng. Quỹ đạo là một đoạn thẳng $(-A \le x \le A, -B \le y \le B)$.

3. Trường hợp $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \pi/2$ hoặc $3\pi/2$. Phương trình (2.30) có dạng

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \qquad (2.33)$$

Phương trình này chứng tỏ quĩ đạo chuyển động là một elip lấy Ox, Oy làm trục và có hai bán trục là A và B.



Hình 1.11 Chiều chuyển động của điểm ảnh P(x,y) trên quỹ đạo

Chú ý đến phương trình (2.25) ta xác định được chiều chuyển động của điểm ảnh P(x,y) trên quĩ đạo (hình 1.11). Chẳng hạn khi $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \pi/2$ điểm ảnh P chuyển động trên quỹ đạo theo chiều kim đồng hồ, khi $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 3\pi/2$ điểm ảnh P chuyển động trên quỹ đạo theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

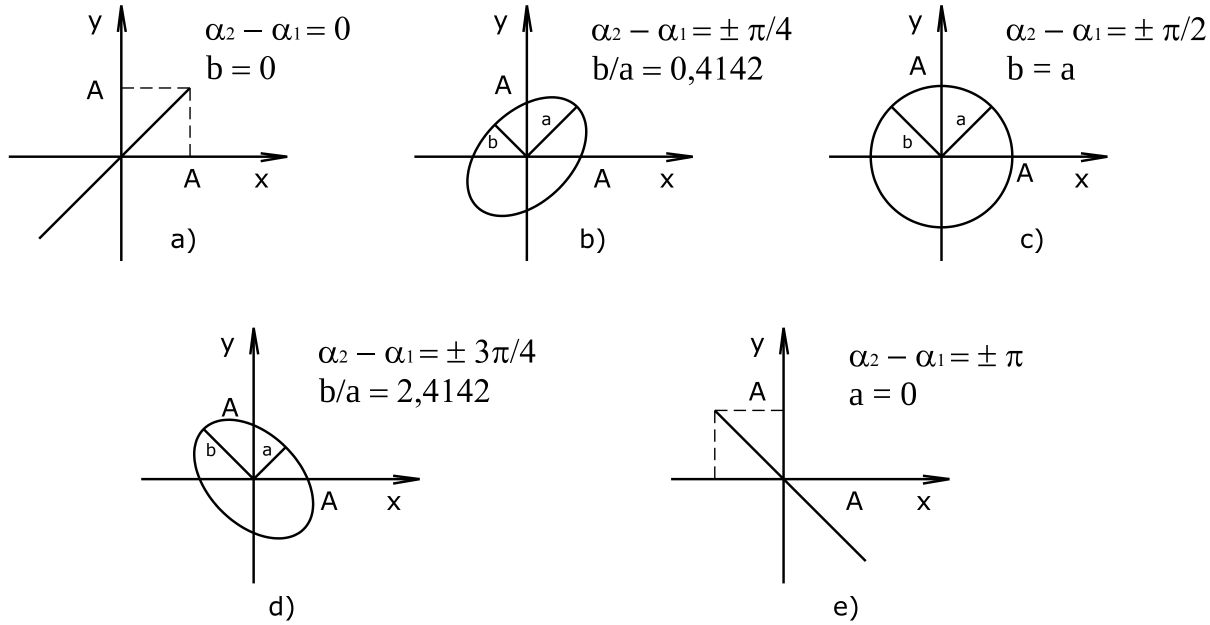
Bây giờ chuyển sang xét trường hợp biên độ của các đại lượng dao động có độ lớn như nhau A = B. Bằng phép biến đổi các trục chính của elip, ta sẽ được kết quả là các trục chính sẽ nghiêng một góc $\beta = 45^0$ đối với các trục toạ độ. Dạng của elip bây giờ chỉ phụ thuộc vào hiệu hai góc pha $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Từ phương trình (2.30) ta suy ra

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = A^2\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Ký hiệu a, b là các bán trục của elip. Người ta chứng minh được

$$|\Delta\alpha| = 2\text{arctg}\frac{b}{a} \qquad (2.34)$$

Trên hình 1.12 là một vài đường cong quỹ đạo của điểm ảnh với các $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ khác nhau.



Hình 1.12 Một số đường cong quỹ đạo của điểm ảnh

b. Hai dao động điều hoà khác tần số với tỷ lệ giữa hai tần số là số hữu tỷ

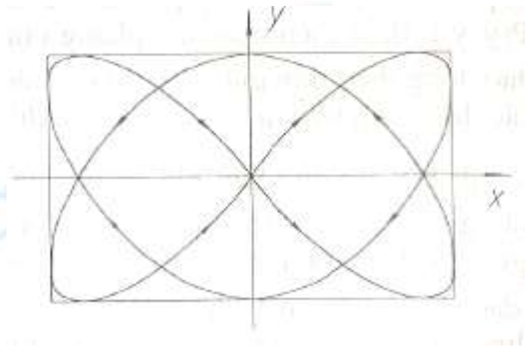
Cho hai dao động điều hoà thực hiện chuyển động dọc theo hai trục toạ độ vuông góc với nhau có dạng

$$x(t) = A\sin(\omega_1 t + \alpha_1) \quad ; \qquad y(t) = B\sin(\omega_2 t + \alpha_2) \qquad (2.35)$$

với

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{p}{q} \neq 1 \qquad (p, q = 1,2,3, \ldots .)$$

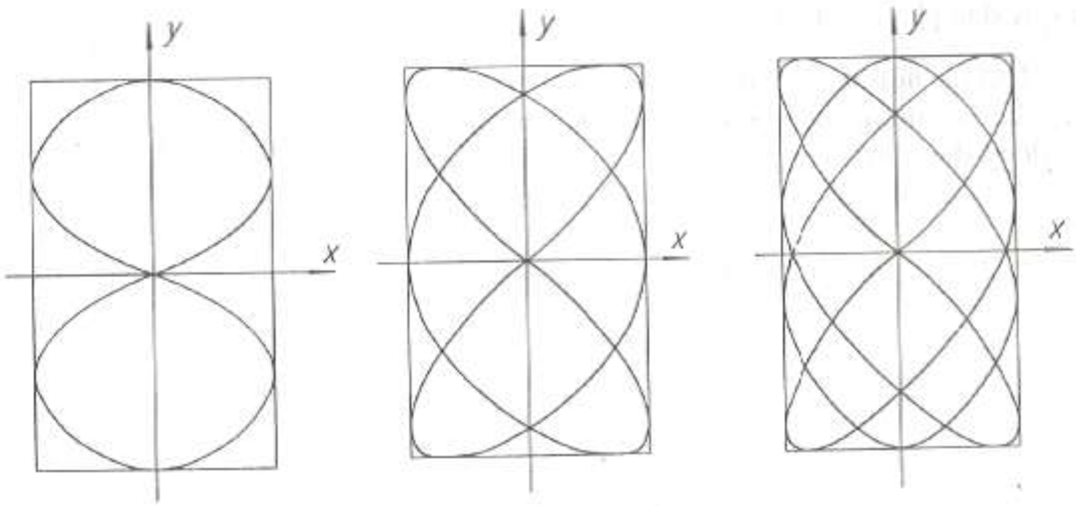
Trong trường hợp này quĩ đạo là những đường cong phức tạp nội tiếp trong một hình chữ nhật cạnh là 2A và 2B và được gọi là các đường cong Lissajou. Hình dạng của chúng phụ thuộc vào tỷ số ω_1/ω_2 và hiệu số của các pha $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Trên hình 1.13 là đường cong Lissajou khi $\omega_1 : \omega_2 = 2 : 3$ và $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 0$.



Hình 1.13 Đường cong Lissajou khi $\omega_1 : \omega_2 = 2 : 3$ và $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 0$

Người ta chứng minh được rằng tỷ số ω_1/ω_2 bằng tỷ số cực đại các múi của đường Lissajou dọc theo các trục Ox và Oy. Trên hình 1.14 là đồ thị các đường Lissajou với $\Delta\alpha = 0, T_1/T_2$ lần lượt là 1/2, 2/3 và 3/4.

Dựa vào hình dạng các đường Lissajou ta có thể xác định được chu kỳ của một dao động thành phần khi biết chu kỳ dao động của thành phần kia. Các đường cong Lissajou được sử dụng nhiều trong kỹ thuật do dao động.

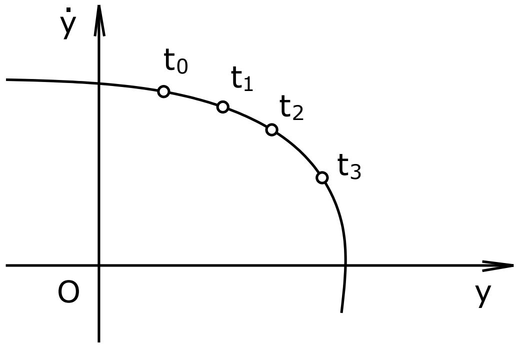


$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{T_1}{T_2} = \frac{3}{4}$

Hình 1.14 đồ thị các đường Lissajou

1.2.6 Biểu diễn dao động tuần hoàn trên mặt phẳng pha

Giả sử y(t) là một đại lượng dao động. Khi đó đạo hàm của y(t) theo thời gian, ký hiệu là $\dot{y}(t)$, cũng là một đại lượng dao động. Ta có thể xem y(t), $\dot{y}(t)$ là cách biểu diễn dạng tham số của hàm $\dot{y}(y)$. Ta chọn hệ trục toạ độ vuông góc với trục hoành là y, trục tung là $\dot{y}$. Đồ thị của hàm $\dot{y}(y)$ trong hệ toạ độ vuông góc đó được gọi là quỹ đạo pha hay đường cong pha. Mặt phẳng (y, $\dot{y}$) được gọi là mặt phẳng pha. Trong mặt phẳng pha, dao động được mô tả bởi sự di chuyển của điểm ảnh P(y, $\dot{y}$). Biểu diễn trên mặt phẳng pha ta không thấy được quá trình tiến triển của dao động theo thời gian. Để khắc phục nhược điểm này, người ta gắn vào vị trí của các điểm ảnh trên quỹ đạo pha một thông tin phụ về thời gian (hình 1.15).

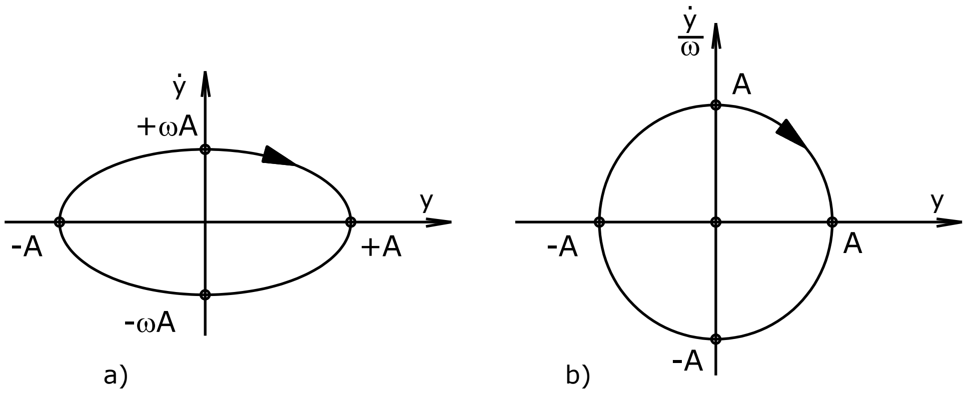


Hình 1.15 Điểm ảnh trên quỹ đạo pha

Điểm ảnh P(y, $\dot{y}$) cho biết giá trị tức thời của đại lượng dao động y và đạo hàm của nó theo thời gian ý ở thời điểm t. Ưu điểm của sự biểu diễn dao động trên mặt phẳng pha là từ dạng hình học của quỹ đạo pha ta có thể rút ra những kết luận quan trọng về tính chất của đại lượng dao động. Nếu đại lượng dao động là tuần hoàn thì quỹ đạo pha là đường cong kín.

Trường hợp đơn giản của dao động tuần hoàn là dao động điều hoà. Từ phương trình dao động điều hoà

$$y = A\sin(\omega t + \alpha)$$
$$\dot{y} = \omega A\cos(\omega t + \alpha)$$



Hình 1.16 Các quỹ đạo pha của dao động điều hoà

Khử t ta được phương trình quỹ đạo pha dao động điều hoà

$$\left(\frac{y}{A}\right)^2 + \left(\frac{\dot{y}}{\omega A}\right)^2 = 1 \tag{2.36}$$

Phương trình (2.36) biểu diễn trên mặt phẳng pha một elip với các bán trục là A và ωA (hình 1.16a). Nếu chọn tỷ xích trên các trục hoành và trục tung một cách thích hợp thì quỹ đạo pha của dao động điều hoà là đường tròn (hình 1.16b).

Đối với một số quá trình dao động tuần hoàn ta rất khó biểu diễn phương trình quỹ đạo pha $\dot{y} = f(y)$ dưới dạng giải tích. Trong trường hợp đó ta phải vẽ quỹ đạo pha bằng cách tính các trị số $y(t_k)$ và $\dot{y}(t_k)$ với k = 0, 1, 2,…,n. Ngày nay với sự phát triển của tin học việc vẽ các quỹ đạo pha khá thuận tiện và đơn giản.

Để làm thí dụ ta vẽ quỹ đạo pha dao động răng cưa trong thí dụ 1.1 với các gần đúng n = 1, 2, 3. Từ thí dụ 1.1 ta có

$$y_n(t) = -\frac{2h}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin\frac{2k\pi t}{T} \quad ; \quad \dot{y}_n(t) = -\frac{4h}{T}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi t}{T}$$

Từ đó ta vẽ được các quỹ đạo pha với n = 1, 2, 3 như trên hình 1.17. Với n = 1 ta có quỹ đạo pha dao động điều hoà. Với n = 2 và n = 3 ta có quỹ đạo pha dao động tuần hoàn.

Chú ý rằng ở nửa trên của mặt phẳng pha do $\dot{y} > 0$ nên hàm y tăng. Các điểm ảnh chuyển động trên quỹ đạo pha từ trái sang phải. Ở nửa dưới mặt phẳng pha do $\dot{y} < 0$ nên các điểm ảnh chuyển động từ phải qua trái.

Nếu biết được phương trình quỹ đạo pha $\dot{y} = f(y)$ thì ta tính được hàm ngược giữa t và y

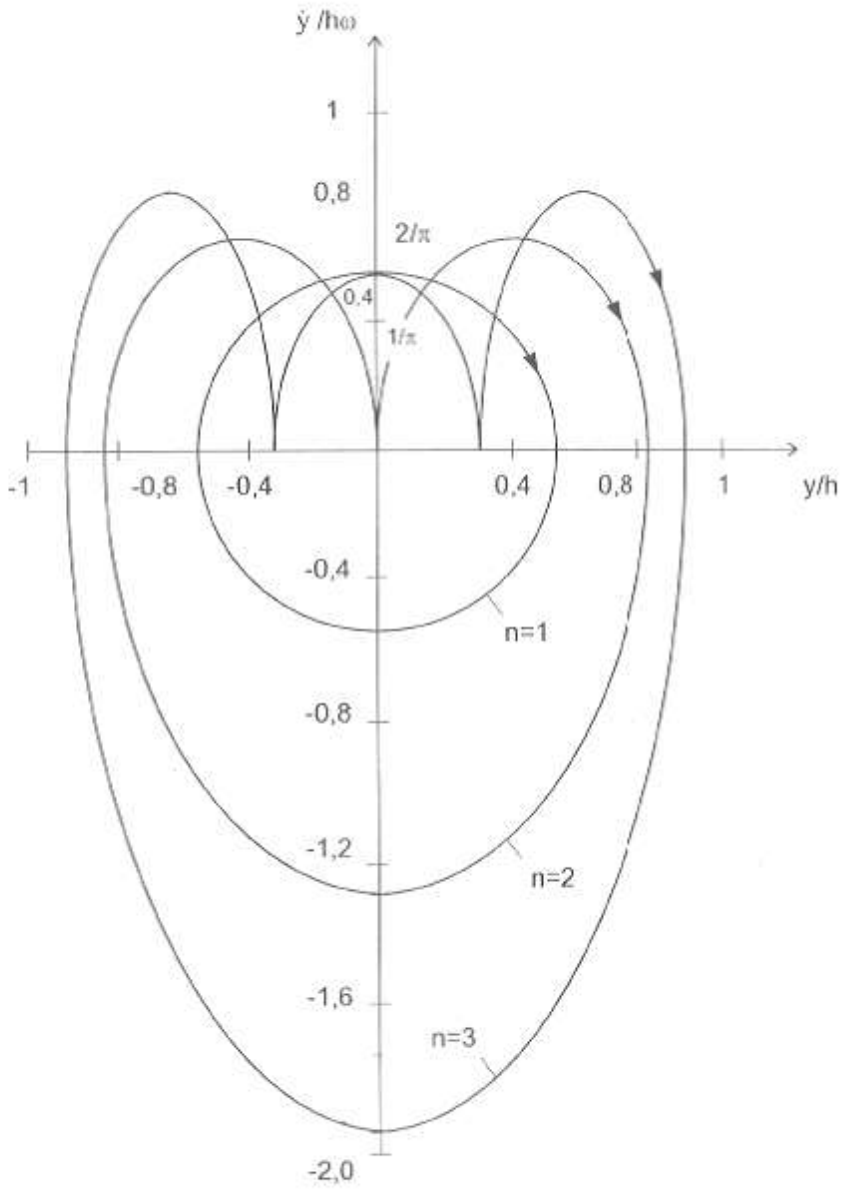
$$dt = \frac{dy}{f(y)} \rightarrow t = t_0 + \int_{y_0}^{y}\frac{dy}{f(y)} \tag{2.37}$$

Đối với các dao động tuần hoàn, ta có thể tìm được chu kỳ dao động T bằng cách tích phân theo hệ thức (2.37) trên toàn bộ quỹ đạo pha kín. Đối với dao động điều hoà thì từ phương trình (2.36) ta có

$$\dot{y} = \omega\sqrt{A^2 - y^2}$$

Do đó ta tính được chu kỳ dao động theo hình 1.16

$$T = 2\int_{-A}^{A}\frac{dy}{\omega\sqrt{A^2 - y^2}} = \frac{2}{\omega}\arcsin\frac{y}{A}\bigg|_{-A}^{A} = \frac{2\pi}{\omega}$$



Hình 1.17 Các quỹ đạo pha của dao động mô tả bởi hàm răng cưa

1.3 DAO ĐỘNG KHÔNG TUẦN HOÀN

1.3.1 Tổng hợp hai dao động điều hoà cùng phương khác tần số với tỷ lệ giữa hai tần số là số vô tỷ

Trong phần trên ta đã thấy tổng hợp hai dao động điều hoà cùng phương khác tần số với tỷ lệ giữa hai tần số là số hữu tỷ $\omega_1 : \omega_2 = p : q$ là dao động tuần hoàn chu kỳ $T = pT_1 = qT_2$. Bây giờ ta xét bài toán

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \qquad (3.1)$$

Trong đó tỷ số $\omega_1 : \omega_2$ là một số vô tỷ. Dao động tổng hợp y(t) không phải là dao động tuần hoàn vì bội số chung nhỏ nhất của $T_1 = 2\pi/\omega_1$, và $T_2 = 2\pi/\omega_2$ không tồn tại. Tuy nhiên ta có thể biểu diễn