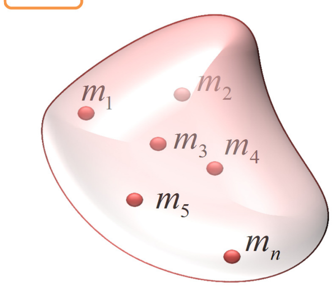
Chương 9

CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC KHỐI LƯỢNG CỦA CƠ HỆ

1. Khối lượng của hệ

Chuyển động của một cơ hệ ngoài việc phụ thuộc vào lực tác dụng còn phụ thuộc vào tổng khối lượng và phân bố các khối lượng của hệ đó. Xét cơ hệ gồm n chất điểm có khối lượng tương ứng là $m_1, m_2, ..., m_n$. ***Khối lượng của hệ:*** bằng tổng khối lượng của tất cả các phần tử hợp thành hệ đó.

$$M = \sum m_k \quad (k = \overline{1,n}) \tag{9.1}$$



2. Khối tâm của hệ

Ký hiệu khối tâm: C

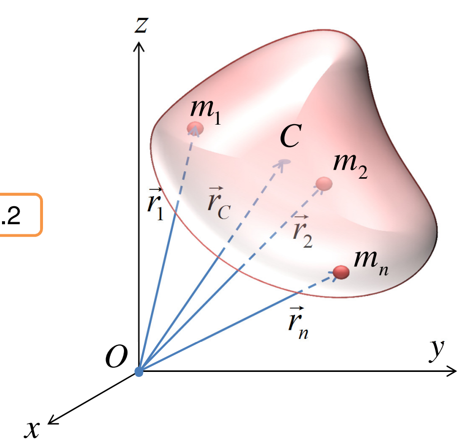
a. Đối với hệ chất điểm (vật rắn)

* Dạng véc tơ:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k.\vec{r}_k}{M} \tag{9.2}$$

* Trong hệ trục Descartes Oxyz:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k.x_k \\ y_C = \dfrac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k.y_k \\ z_C = \dfrac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k.z_k \end{cases} \tag{9.3}$$



Nói rõ hơn về khối tâm

- *Khổi tâm C của hệ chất điểm là điểm thỏa mãn:* $\sum_{k=1}^{n} m_k.\overrightarrow{CM_k} = 0$
  - m_k *: khối lượng chất điểm thứ k*
  - M_k *: vị trí xác định chất điểm thứ k*
- *Xác định vị trí khối tâm C theo điểm quy chiếu O:*

Với O là điểm xác định trong không gian thì: $\overrightarrow{CM_k} = \overrightarrow{OM_k} - \overrightarrow{OC}$

Từ $\sum_{k=1}^{n} m_k.\overrightarrow{CM_k} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} m_k.(\overrightarrow{OM_k} - \overrightarrow{OC}) = 0$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} m_k.(\overrightarrow{OM_k} - \overrightarrow{OC}) = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} m_k.\overrightarrow{OM_k} - \overrightarrow{OC}.\sum_{k=1}^{n} m_k = 0$$

Đặt $\vec{r}_k = \overrightarrow{OM_k}, \vec{r}_C = \overrightarrow{OC}, M = \sum_{k=1}^{n} m_k$*, ta có:*

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k - \vec{r}_C.M = 0 \Rightarrow \vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k}{M} \qquad \boxed{9.2}$$

- *Chỉ tồn tại một khối tâm ứng với một trạng thái vị trí của hệ chất điểm:*

Với điểm quy chiếu O:

Khối tâm C được xác định bởi: $\overrightarrow{OC} = \vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k}{M}$

Giả sử tồn tại tâm C nào đó khác tâm C, thì:* $\overrightarrow{OC}^* = \vec{r}_{C*} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k}{M}$

Như vậy $\vec{r}_C = \vec{r}_{C*}$*, điều này chứng tỏ C trùng C* và dẫn đến kết luận tồn tại duy nhất một tâm.*

b. Đối với hệ vật rắn

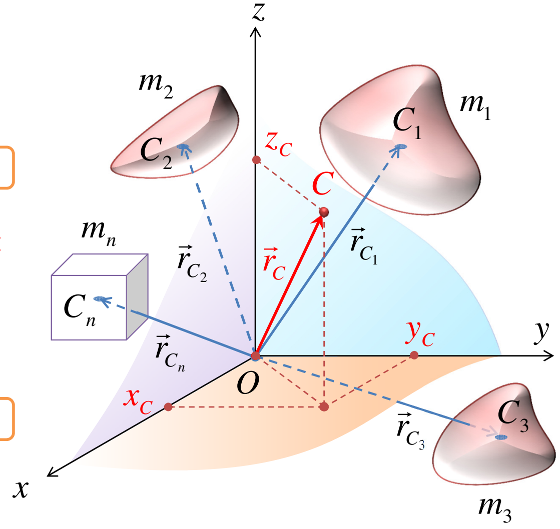
Xét hệ gồm n vật rắn, vật rắn thứ k có khối lượng m_k và khối tâm C_k. Gọi C và M lần lượt là khối tâm và tổng khối lượng của hệ vật rắn.

* Dạng véc tơ:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k.\vec{r}_{C_k}}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k.\vec{r}_{C_k}}{M} \qquad \boxed{9.4}$$

* Trong hệ trục Descartes Oxyz:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k.x_{C_k} \\ y_C = \dfrac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k.y_{C_k} \\ z_C = \dfrac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k.z_{C_k} \end{cases} \qquad \boxed{9.5}$$



Ý nghĩa động học của khối tâm C

Khi hệ chất điểm chuyển động (vật rắn, hệ vật rắn)

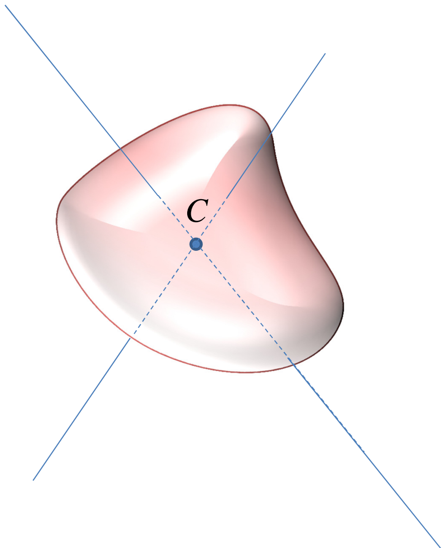
+ Quan hệ vận tốc giữa các chất điểm:

- $\dot{\vec{r}}_C = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} m_k.\dot{\vec{r}}_k}{M} \Rightarrow \vec{v}_C = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} m_k.\vec{v}_k}{M}$

+ Quan hệ gia tốc giữa các chất điểm:

- $\ddot{\vec{r}}_C = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} m_k.\ddot{\vec{r}}_k}{M} \Rightarrow \vec{a}_C = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} m_k.\vec{a}_k}{M}$

* **Trục trung tâm:** là trục đi qua khối tâm C.



*** Khối tâm của vật đồng chất:**

* **Tổng quát**: Trong hệ trục Oxyz gắng cố định đối với vật, tọa độ khối tâm C:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\int\limits_{(V)} x.dV}{\int\limits_{(V)} dV} = \dfrac{\int\limits_{(V)} x.dV}{V} = \dfrac{\iiint\limits_{(V)} x.dxdydz}{\iiint\limits_{(V)} dxdydz} \\ y_C = \dfrac{\int\limits_{(V)} y.dV}{\int\limits_{(V)} dV} = \dfrac{\int\limits_{(V)} y.dV}{V} = \dfrac{\iiint\limits_{(V)} y.dxdydz}{\iiint\limits_{(V)} dxdydz} \\ z_C = \dfrac{\int\limits_{(V)} z.dV}{\int\limits_{(V)} dV} = \dfrac{\int\limits_{(V)} z.dV}{V} = \dfrac{\iiint\limits_{(V)} z.dxdydz}{\iiint\limits_{(V)} dxdydz} \end{cases}$$

Khi vật được tổ hợp cộng từ n khối hình con mà mỗi khối hình con thứ i biết khối tâm C_i và thể tích V_i thì:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{x_{C_1}V_1 + x_{C_2}V_2 + ... + x_{C_n}V_n}{V_1 + V_2 + ... + V_n} \\ y_C = \dfrac{y_{C_1}V_1 + y_{C_2}V_2 + ... + y_{C_n}V_n}{V_1 + V_2 + ... + V_n} \\ z_C = \dfrac{z_{C_1}V_1 + z_{C_2}V_2 + ... + z_{C_n}V_n}{V_1 + V_2 + ... + V_n} \end{cases}$$

Lưu ý: *Việc tổ hợp có thể là cộng hình kết hợp trừ hình. Giả sử cộng các hình từ 1 đến k, trừ các hình từ k+1 đến n, thì công thức là:*

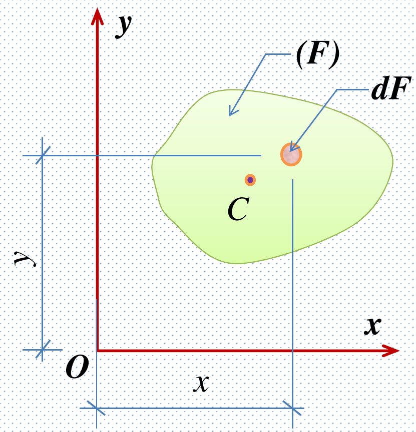
$$\begin{cases} x_C = \dfrac{(x_{C_1}V_1 + x_{C_2}V_2 + ... + x_{C_k}V_k) - (x_{C_k}V_k + x_{C_{k+1}}V_{k+1} + ... + x_{C_n}V_n)}{(V_1 + V_2 + ... + V_k) - (V_{k+1} + V_{k+2} + ... + V_n)} \\ y_C = \dfrac{(y_{C_1}V_1 + y_{C_2}V_2 + ... + y_{C_k}V_k) - (y_{C_k}V_k + y_{C_{k+1}}V_{k+1} + ... + y_{C_n}V_n)}{(V_1 + V_2 + ... + V_k) - (V_{k+1} + V_{k+2} + ... + V_n)} \\ z_C = \dfrac{(z_{C_1}V_1 + z_{C_2}V_2 + ... + z_{C_k}V_k) - (z_{C_k}V_k + z_{C_{k+1}}V_{k+1} + ... + z_{C_n}V_n)}{(V_1 + V_2 + ... + V_k) - (V_{k+1} + V_{k+2} + ... + V_n)} \end{cases}$$

*** Tính chất:**

- Nếu vật có mặt phẳng đối xứng thì khối tâm thuộc mặt đối xứng đó
- Nếu vật có 3 mặt phẳng đối xứng thì khối tâm C là giao điểm của 3 mặt đối xứng đó.
- Nếu vật là thanh thẳng mảnh thì khối tâm C là trung điểm của trục thanh.
- Nếu vật là dạng tấm phẳng có chiều dày không đổi – mặt trung bình là mặt đối xứng thì khối tâm thuộc mặt trung bình (tấm mảnh là trường hợp đặt biệt của dạng tấm này). Khối tâm cần xác định là tâm diện tích hình học phẳng của mặt trung bình đối xứng, tọa độ tâm C được xác định theo công thức sau:

Trong hệ trục phẳng chọn trước chứa mặt phẳng trung bình đối xứng của vật, tâm C có tọa độ (x_C,y_C):

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\int\limits_{(F)} x.dF}{\int\limits_{(F)} dF} = \dfrac{\int\limits_{(F)} x.dF}{F} = \dfrac{\iint\limits_{(F)} x.dxdy}{\iint\limits_{(F)} dxdy} \\ y_C = \dfrac{\int\limits_{(F)} y.dF}{\int\limits_{(F)} dF} = \dfrac{\int\limits_{(F)} y.dF}{F} = \dfrac{\iint\limits_{(F)} y.dxdy}{\iint\limits_{(F)} dxdy} \end{cases}$$



Lưu ý: *Nếu mặt phẳng trung bình đối xứng của vật này có trục đối xứng thì tâm C thuộc trục đối xứng đó. Nhờ tính chất này ta biết được tâm của một số hình: tròn, vuông, elip, đa giác đều…*

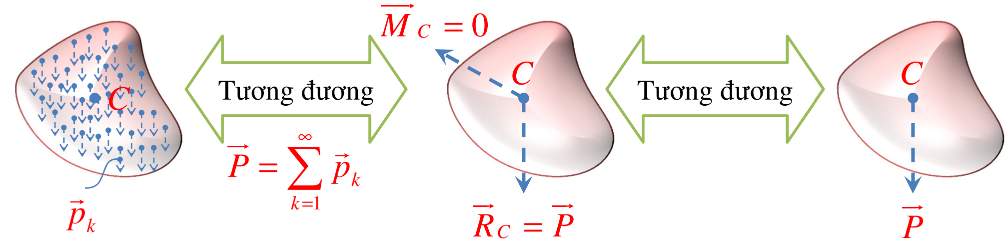
Khi mặt phẳng đối xứng này được tổ hợp cộng từ *n* hình con mà mỗi hình con thứ *i* biết tâm C_i và diện tích F_i thì:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{x_{C_1}F_1 + x_{C_2}F_2 + \ldots + x_{C_n}F_n}{F_1 + F_2 + \ldots + F_n} \\ y_C = \dfrac{y_{C_1}F_1 + y_{C_2}F_2 + \ldots + y_{C_n}F_n}{F_1 + F_2 + \ldots + F_n} \end{cases}$$

Lưu ý: *Việc tổ hợp có thể là cộng hình kết hợp trừ hình. Giả sử cộng các hình từ 1 đến k, trừ các hình từ k+1 đến n, thì công thức là:*

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{(x_{C_1}F_1 + x_{C_2}F_2 + \ldots + x_{C_k}F_k) - (x_{C_k}F_k + x_{C_{k+1}}F_{k+1} + \ldots + x_{C_n}F_n)}{(F_1 + F_2 + \ldots + F_k) - (F_{k+1} + F_{k+2} + \ldots + F_n)} \\ y_C = \dfrac{(y_{C_1}F_1 + y_{C_2}F_2 + \ldots + y_{C_k}F_k) - (y_{C_k}F_k + y_{C_{k+1}}F_{k+1} + \ldots + y_{C_n}F_n)}{(F_1 + F_2 + \ldots + F_k) - (F_{k+1} + F_{k+2} + \ldots + F_n)} \end{cases}$$

* ***Thu gọn hệ trọng lượng của vật rắn***: Khối lượng của vật rắn phân bố theo không gian phân bố của vật chất. Ở đâu có khối lượng thì ở đó có trọng lượng. Trọng lượng là hệ lực song song hướng tâm trái đất phân bố trên từng đơn vị thể tích. Khi tính toán, ta thu gọn về tâm khối lượng thì được một véc tơ chính **(khác không)** bằng tổng véc tơ trọng lượng thành phần, còn mômen chính **bằng không**.



CM: Khi thu gọn hệ trọng lượng về khối tâm C, ta được:

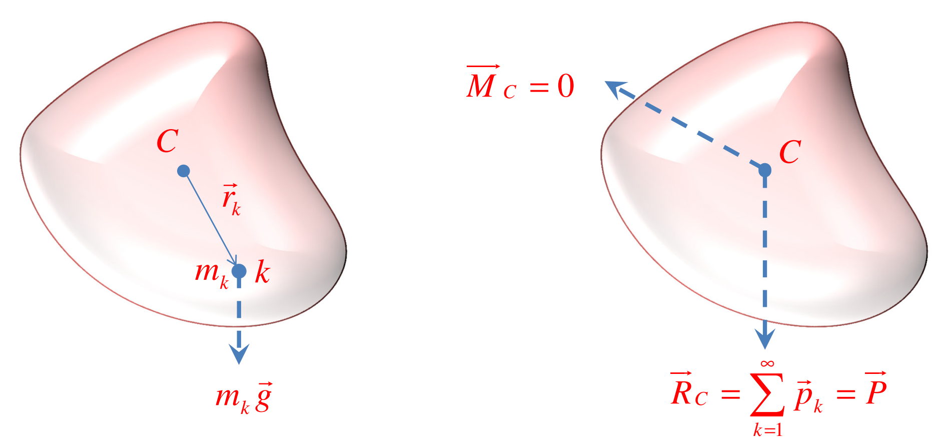
\+ Véc tơ lực chính:

$$\vec{R}_C = \sum_{k=1}^{\infty} \vec{p}_k = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \vec{g} = \vec{g} \sum_{k=1}^{\infty} m_k = M.\vec{g} = \vec{P} \neq 0$$

\+ Véc tơ mômen chính:

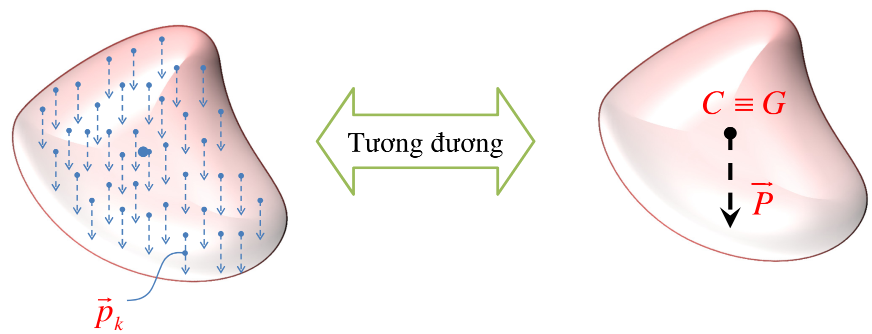
$$\vec{M}_C = \sum_{k=1}^{\infty} \vec{m}_C(m_k\vec{g}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\vec{r}_k \wedge m_k\vec{g})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (m_k\vec{r}_k \wedge \vec{g}) = (\sum_{k=1}^{\infty} m_k\vec{r}_k) \wedge \vec{g} = M\vec{r}_C \wedge \vec{g} = \vec{0} \wedge \vec{g} = 0$$



Trong trường trọng lực, khối tâm C trùng với trọng tâm G.

** Trọng tâm G của vật là điểm đặt hợp trọng lực P của vật*

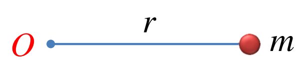


3. Mômen quán tính của hệ

a. Mômen quán tính đối với một điểm (mômen quán tính độc cực):

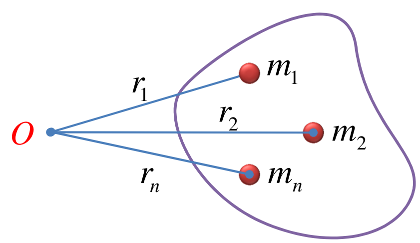
** Đối với một chất điểm*

$$J_O = m.r^2 \qquad (9.6)$$



** Đối với hệ chất điểm*

$$J_O = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 \qquad (9.7)$$



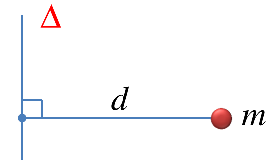
Bán kính quán tính ρ_O đối với điểm O: $J_O = M.\rho_O^2$

Dấu của mômen quán tính đối với một điểm: luôn luôn dương

b. Mômen quán tính đối với một trục Δ:

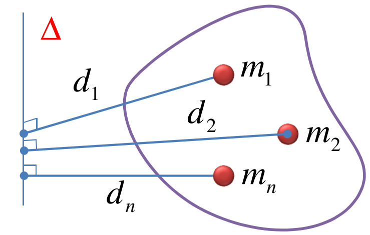
** Đối với một chất điểm*

$$J_\Delta = m.d^2 \qquad (9.8)$$



** Đối với hệ chất điểm*

$$J_\Delta = \sum_{k=1}^{n} m_k d_k^2 \qquad (9.9)$$



Bán kính quán tính ρ_Δ đối với trục Δ: $J_\Delta = M.\rho_\Delta^2$

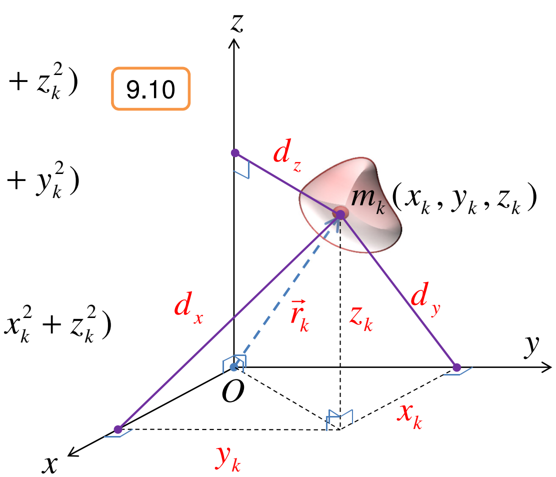
Dấu của mômen quán tính đối với một trục: luôn luôn dương

c. Mômen quán tính trong hệ trục tọa độ Descartes

$$\begin{cases} J_x = \sum_{k=1}^{n} m_k d_x^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k^2 + z_k^2) \\ J_y = \sum_{k=1}^{n} m_k d_y^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + z_k^2) \\ J_z = \sum_{k=1}^{n} m_k d_z^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{cases} \qquad (9.10)$$

$$J_O = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k^2 + x_k^2 + z_k^2)$$

$$J_O = \frac{J_x + J_y + J_z}{2} \qquad (9.11)$$

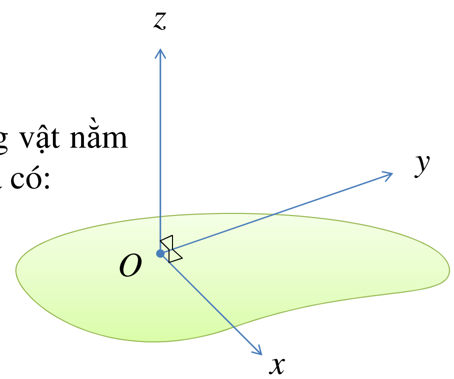


*** Trường hợp đặc biệt**

+ Tấm phẳng mảnh:

Trong hệ trục Oxyz, giả sử mặt phẳng vật nằm trong mặt phẳng tọa độ Oxy, khi đó ta có:

$$J_z = J_O = J_x + J_y$$



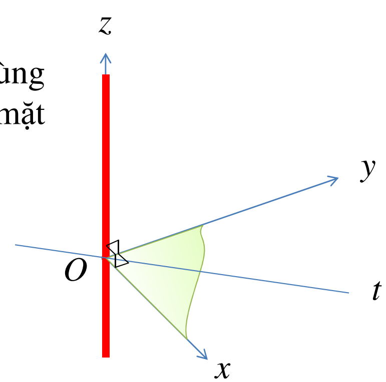
Lấy chất điểm bất kỳ thuộc tấm, thì: $z_k = 0$. Nên từ 9.10 và 9.11:

$$\begin{cases} J_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k^2, J_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2 \\ J_z = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2) \\ J_O = \dfrac{J_x + J_y + J_z}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_z = J_x + J_y \\ J_O = \dfrac{J_x + J_y + J_z}{2} \end{cases} \Rightarrow J_z = J_O = J_x + J_y$$

+ Thanh thẳng mảnh:

Trong hệ trục Oxyz, giả sử trục thanh trùng với trục Oz, với t là trục bất kỳ nằm trong mặt Oxy và đi qua O, ta có kết quả sau:

$$\begin{cases} J_z = 0 \\ J_O = J_x = J_y = J_t \end{cases}$$



Lấy chất điểm bất kỳ thuộc tấm, thì: $x_k = 0$, $y_k = 0$. Nên từ 9.10 và 9.11:

$$\begin{cases} J_x = J_y = \sum_{k=1}^{n} m_k z_k^2 \\ J_z = 0 \\ J_O = \dfrac{J_x + J_y + J_z}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_z = 0 \\ J_O = J_x = J_y \end{cases}$$

Vai trò trục t như trục x và y nên: $\begin{cases} J_z = 0 \\ J_O = J_x = J_y = J_t \end{cases}$

*** Các bán kính quán tính khối lượng đối với gốc tọa độ và đối với các trục tọa độ**

Có thể viết lại

$$\begin{cases} J_O = M.\rho_O^2 \\ J_x = M.\rho_x^2 \\ J_y = M.\rho_y^2 \\ J_z = M.\rho_z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_O = \sqrt{\dfrac{J_O}{M}} \\ \rho_x = \sqrt{\dfrac{J_x}{M}} \\ \rho_y = \sqrt{\dfrac{J_y}{M}} \\ \rho_z = \sqrt{\dfrac{J_z}{M}} \end{cases} \quad (9.12)$$

Trong đó:

- Bán kính quán tính khối lượng đối với tâm O: ρ_O
- Các bán kính quán tính khối lượng đối với các trục: ρ_x, ρ_y, ρ_z

$$\rho_O^2 = \frac{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2}{2} \quad (9.13)$$

*** Mômen quán tính đối với hệ trục phẳng trong hệ trục Descartes (mômen quán tính ly tâm)**

$$\begin{cases} J_{xy} = J_{yx} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k \\ J_{xz} = J_{zx} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k \\ J_{yz} = J_{zy} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k \end{cases} \quad (9.14)$$

Dấu: hoặc dương hoặc âm hoặc bằng 0

+ Trục quán tính chính

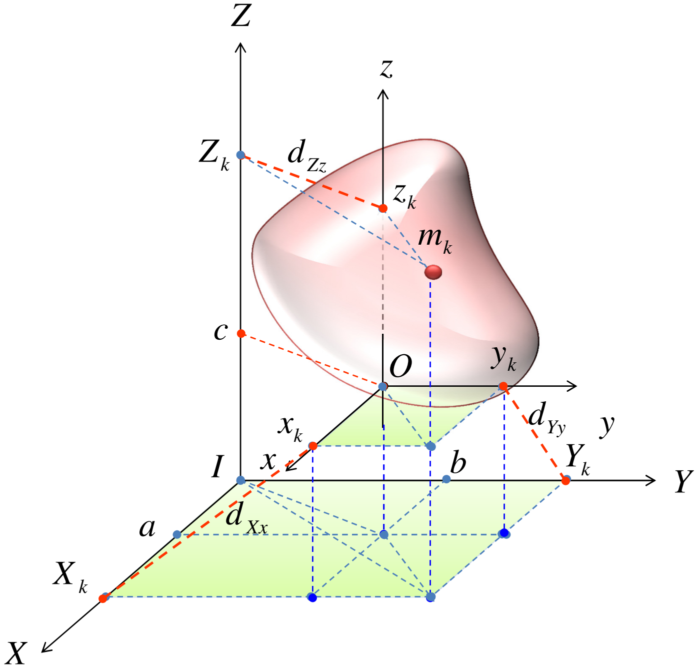
Trục x là trục quán tính chính khi $J_{xy} = J_{xz} = 0$ (9.15)

Trục y là trục quán tính chính khi $J_{yx} = J_{yz} = 0$ (9.16)

Trục z là trục quán tính chính khi $J_{zx} = J_{zy} = 0$ (9.17)

+ Trục quán tính chính trung tâm: là trục vừa là trục trung tâm vừa là trục quán tính chính.

*** Công thức chuyển trục song song của mômen quán tính**



+ Tịnh tiến hệ trục IXYZ theo véc tơ $\overrightarrow{OI}$ được hệ trục Oxyz. Trong hệ trục IXYZ, tọa độ của O là (a,b,c).

- Mômen quán tính đối với trục X:

$$J_X = \sum_{k=1}^{n} m_k (Y_k^2 + Z_k^2) = \sum_{k=1}^{n} m_k \left[(b + y_k)^2 + (c + z_k)^2 \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k \left[(b^2 + 2by_k + y_k^2) + (c^2 + 2cz_k + z_k^2) \right]$$

$$= (b^2 + c^2)M + 2b.My_C + 2c.Mz_C + J_x$$

$$= d_{Xx}^2 M + 2b.My_C + 2c.Mz_C + J_x$$

Nếu trục x là trục trung tâm (trục đi qua khối tâm C) thì: $y_C = 0$, $z_C = 0$.

Khi đó: $J_X = J_x + d_{Xx}^2 M$

- Mômen quán tính đối với trục Y:

$$J_Y = \sum_{k=1}^{n} m_k (X_k^2 + Z_k^2) = \sum_{k=1}^{n} m_k \left[(a + x_k)^2 + (c + z_k)^2 \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k \left[(a^2 + 2ax_k + x_k^2) + (c^2 + 2cz_k + z_k^2) \right]$$

$$= (a^2 + c^2)M + 2a.Mx_C + 2c.Mz_C + J_y$$

$$= d_{Yy}^2 M + 2a.Mx_C + 2c.Mz_C + J_y$$

Nếu trục y là trục trung tâm (trục đi qua khối tâm C) thì: $x_C = 0$, $z_C = 0$.

Khi đó: $J_Y = J_y + d_{Yy}^2 M$

- Mômen quán tính đối với trục Z:

$$J_Z = \sum_{k=1}^{n} m_k (X_k^2 + Y_k^2) = \sum_{k=1}^{n} m_k \left[(a + x_k)^2 + (b + y_k)^2 \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k \left[(a^2 + 2ax_k + x_k^2) + (b^2 + 2by_k + y_k^2) \right]$$

$$= (a^2 + b^2)M + 2a.Mx_C + 2b.My_C + J_z$$

$$= d_{Zz}^2 M + 2a.Mx_C + 2b.My_C + J_z$$

Nếu trục z là trục trung tâm (trục đi qua khối tâm C) thì: $x_C = 0$, $y_C = 0$.

Khi đó: $J_Z = J_z + d_{Zz}^2 M$