Chương 2

LÝ THUYẾT HỆ LỰC

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
DANANG UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

§1. Thu gọn hệ lực

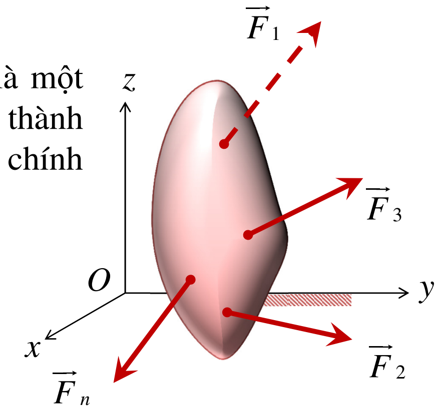
Hệ lực phức tạp ⇔ Tương đương ⇔ Hệ lực đơn giản ?

1. Hai đặc trưng của hệ lực

a. Véc tơ chính của hệ lực

* **Định nghĩa:** Véctơ chính của hệ lực là một véctơ bằng tổng hình học véctơ các lực thành phần của hệ lực đó. Ta gọi $\vec{R}$ là véctơ chính của hệ lực, thì:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \qquad \boxed{2.1}$$



* **Cách xác định:**

+ Phương pháp giải tích:

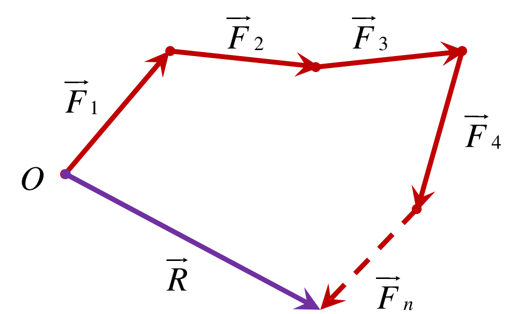
$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}\ ,\ R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}\ ,R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} \qquad \boxed{2.1a}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \qquad \boxed{2.1b}$$

$$\cos(x,\vec{R}) = \frac{R_x}{R},\ \cos(y,\vec{R}) = \frac{R_y}{R},\ \cos(z,\vec{R}) = \frac{R_z}{R} \qquad \boxed{2.1c}$$

+ Phương pháp hình học:

Với O là điểm bất kỳ



b. Mômen chính của hệ lực

* **<u>Định nghĩa</u>:** Mômen chính của hệ lực đối với một tâm là tổng mômen các lực thành phần của hệ lực đối với cùng tâm ấy.

* **<u>Biểu thức và cách xác định</u>:**

Đối với hệ lực không gian bất kỳ, mômen chính đối với tâm O là véctơ

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k) \tag{2.2}$$

Véctơ mômen chính được xác định bằng các hình chiếu sau đây:

$$M_{Ox} = \sum_{k=1}^{n} hc_x\left[\vec{m}_O(\vec{F}_k)\right] = \sum_{k=1}^{n} m_x(\vec{F}_k)$$

$$M_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} hc_y\left[\vec{m}_O(\vec{F}_k)\right] = \sum_{k=1}^{n} m_y(\vec{F}_k) \tag{2.2a}$$

$$M_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} hc_z\left[\vec{m}_O(\vec{F}_k)\right] = \sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k)$$

Trị số mô men chính: $M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}$ (2.2b)

Các côsin chỉ phương

$$\cos(x,\vec{M}_O) = \frac{M_{Ox}}{M_O},\quad \cos(y,\vec{M}_O) = \frac{M_{Oy}}{M_O},\quad \cos(z,\vec{M}_O) = \frac{M_{Oz}}{M_O} \tag{2.2c}$$

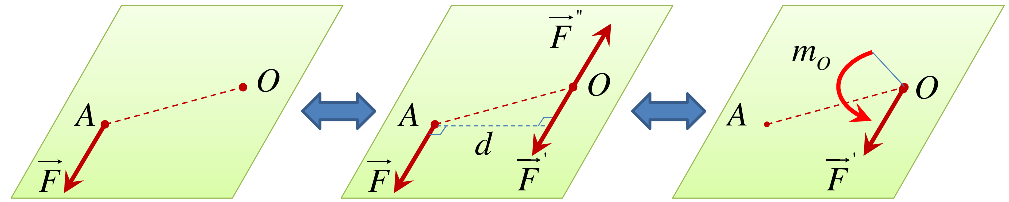
Khác với véc tơ chính, véc tơ mômen chính là véc tơ buộc nó phụ thuộc vào tâm O. Nói cách khác, véc tơ chính là một đại lượng bất biến còn véc tơ mômen chính là đại lượng biến đổi theo tâm thu gọn O.

2. Thu gọn hệ lực

* Thu gọn hệ lực là việc đưa hệ lực dạng phức tạp về dạng đơn giản hơn. Để làm được việc này, ta dựa vào định lý dời lực song song sau:

a. Định lý dời lực song song:

Tác dụng của lực lên vật rắn không đổi nếu ta dời nó song song đến một điểm đặt khác và thêm vào nó một ngẫu lực phụ có mômen bằng mômen của lực đã cho đối với điểm dời đến.

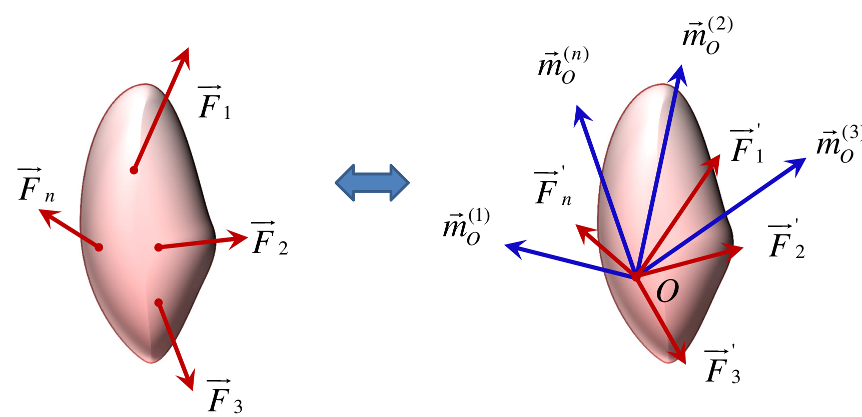


$(\vec{F} = \vec{F}' = -\vec{F}'')$

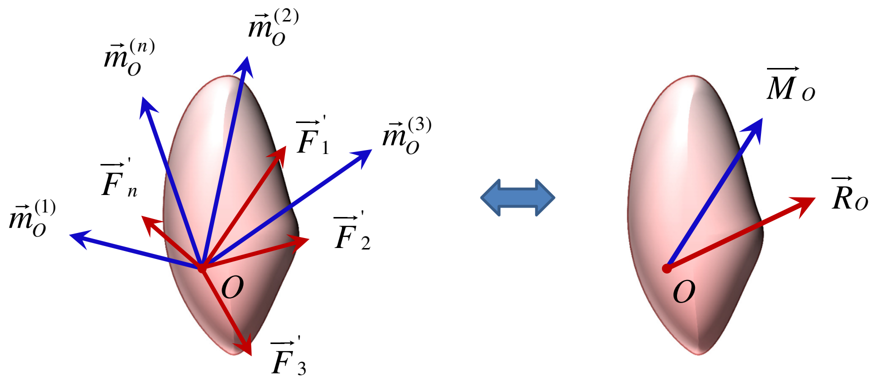
$$(\vec{F}) \sim (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'') \sim (\vec{F}', \vec{m}_O) \left| \begin{array}{l} \vec{F}' = \vec{F} \\ m_O = F.d \end{array} \right. \tag{2.3}$$

b. Thu gọn hệ lực bất kỳ về một tâm:

Hệ lực bất kỳ luôn luôn tương đương với một lực bằng véc tơ chính đặt tại điểm O chọn tùy ý và một ngẫu lực có mômen bằng mômen chính của hệ lực đó đối với tâm O.



$$\left(\vec{m}_O^{(k)} = \vec{m}_O(\vec{F}_k), \vec{F}_k = \vec{F}'_k\right)$$

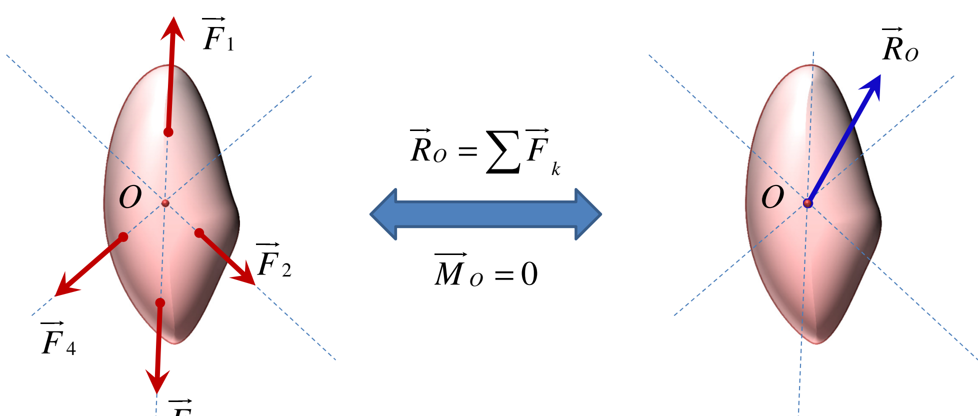


$$\vec{R}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k' = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k, \quad \vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O^{(k)} \qquad \boxed{2.4}$$

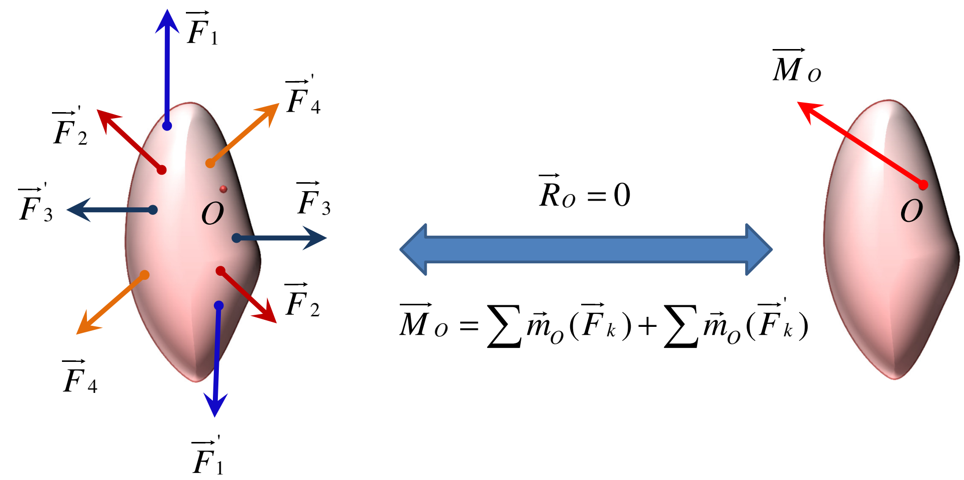
Từ kết quả trên, để xác định tác dụng của một hệ lực lên vật rắn ta chỉ cần xác định véctơ chính và mômen chính của hệ lực đối với tâm thu gọn.

** Các trường hợp đặc biệt:*

- Thu gọn hệ lực đồng quy về điểm đồng quy O: chỉ thu được véc tơ chính.



- Thu gọn hệ ngẫu lực về tâm O bất kỳ: chỉ thu được mômen chính.



Vật chịu các ngẫu lực $(\vec{F}_k, \vec{F}_k')$

c. Các dạng chuẩn thường gặp

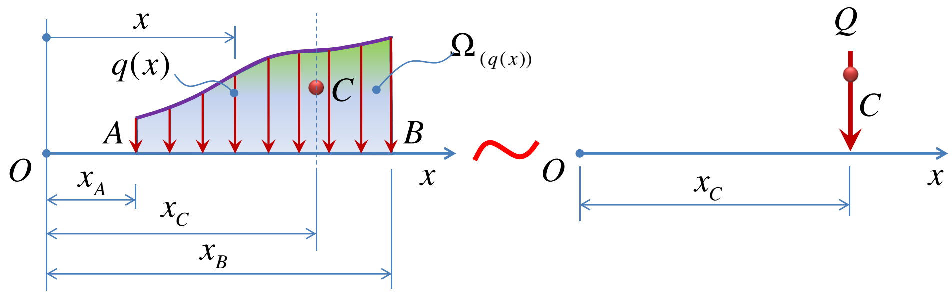
- $\vec{R}_O = 0, \ \vec{M}_O = 0$: Hệ lực cân bằng
- $\vec{R}_O = 0, \ \vec{M}_O \neq 0$: Hệ thu về ngẫu lực
- $\vec{R}_O \neq 0, \ \vec{M}_O = 0$: Hệ thu về hợp lực
- $\vec{R}_O \neq 0, \ \vec{M}_O \neq 0, \ \vec{R}_O \perp \vec{M}_O$: Hệ thu về có hợp lực
- $\vec{R}_O \neq 0, \ \vec{M}_O \neq 0, \ \vec{R}_O \not\perp \vec{M}_O$: Hệ thu về xoắn động

Có thể thu gọn tiếp về I dạng đơn giản: $\vec{R}_I \neq 0, \ \vec{M}_I = 0$

Lúc này, $\vec{R}_I$ được gọi là hợp lực của hệ lực.

** Đối với hệ lực phẳng không là hệ ngẫu lực thì bao giờ cũng tìm được hợp lực của nó.*

d. Hợp lực của hệ lực phẳng phân bố song song:



* C là điểm bất kỳ thuộc đường thẳng vuông góc với trục x mà O cách đường thẳng này khoảng x_C.

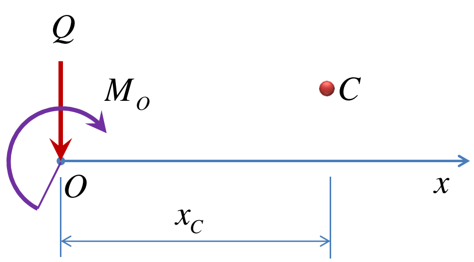
Trong đó:

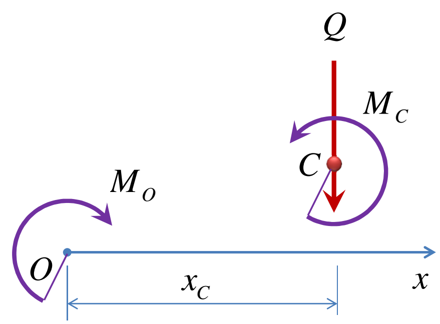
$$Q = \int_{x_A}^{x_B} q(x)dx = \Omega_{(q(x))} \qquad x_C = \frac{\int_{x_A}^{x_B} x.q(x)dx}{\int_{x_A}^{x_B} q(x)dx} \qquad (2.5)$$

$\Omega_{(q(x))}$:là diện tích của biểu đồ *q(x)* trong đoạn lực phân bố

Chứng minh: Đầu tiên thu hệ lực về gốc tọa độ O, ta được một véc tơ chính và một mômen chính, chúng có giá trị xác định bởi:

$$Q = \int_{x_A}^{x_B} q(x)dx, \quad M_O = \int_{x_A}^{x_B} x.q(x)dx$$



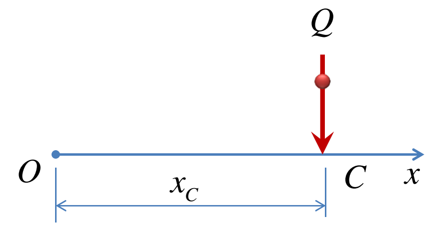


Tiếp tục dời Q từ O về C, ta được Q và mômen $M_C = Q.x_C$. Lúc này mômen tác dụng trên hệ là M_O và M_C ngược chiều nhau.

Để hệ lực tương đương với một lực thì:

$$\overline{M}_O + \overline{M}_C = 0 \Rightarrow M_O - Q.x_c = 0$$

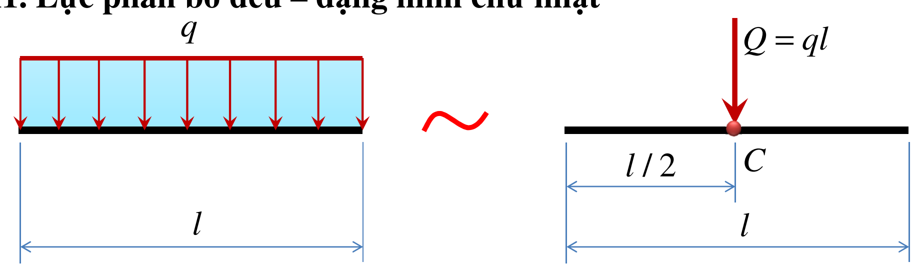
$$\Rightarrow x_C = \frac{M_O}{Q} = \frac{\int_{x_A}^{x_B} x.q(x)dx}{\int_{x_A}^{x_B} q(x)dx}$$



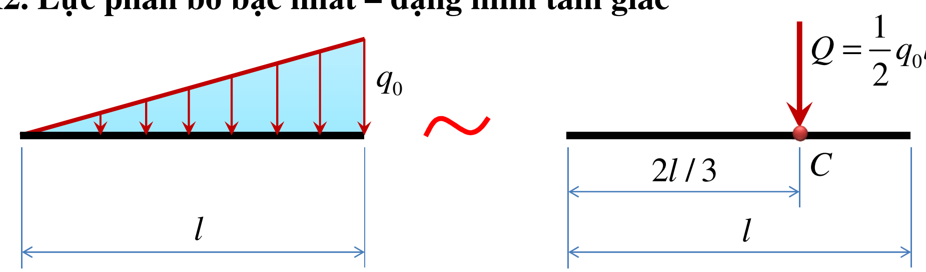
Lực Q xác định bởi x_C như hình vẽ là hợp lực của hệ lực phẳng song song đã cho.

** Hợp lực của các hệ lực phẳng phân bố song song thường gặp*

TH1. Lực phân bố đều – dạng hình chữ nhật



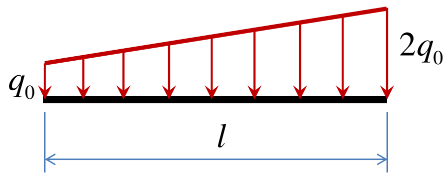
TH2. Lực phân bố bậc nhất – dạng hình tam giác



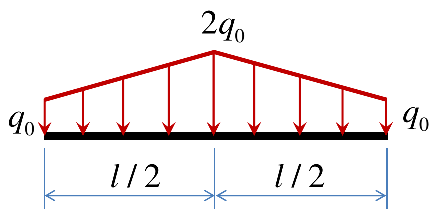
Ví dụ 1:

Thu gọn hệ lực sau về hệ chỉ có hợp lực.

a.



b.

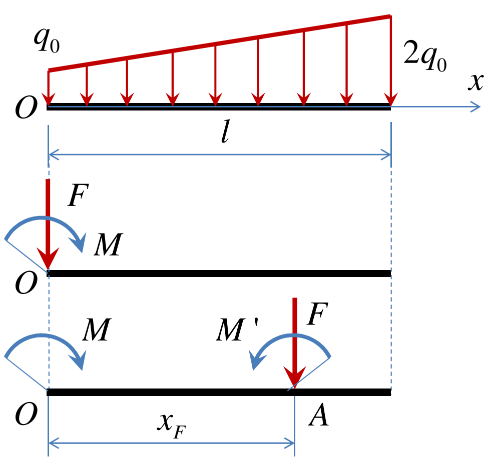


+ Thu gọn hệ lực về một điểm O bất kỳ được: lực $\vec{F}$ và mômen $\overline{M}$.
+ Dời lực $\vec{F}$ từ O đến vị trí cần tìm A được: lực $\vec{F}$ và mômen $\overline{M}'$.

Điều kiện để hệ chỉ có hợp lực là: $\overline{M}+\overline{M}'=0$.

Lưu ý, điểm A có ý nghĩa khi thuộc thanh.

a.

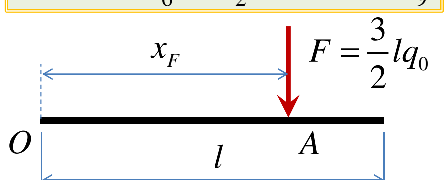


$$F=\int_0^l (q_0+\frac{q_0}{l}x)dx=\frac{3}{2}lq_0$$

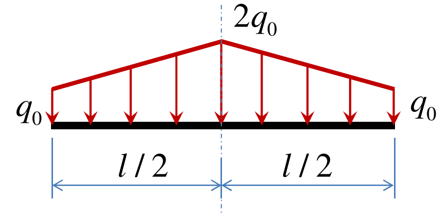
$$M=\int_0^l (q_0+\frac{q_0}{l}x)xdx=\frac{5}{6}q_0l^2$$

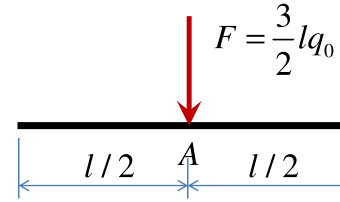
$$M'=F.x_F=\frac{3}{2}lq_0.x_F$$

$$\overline{M}'+\overline{M}=0\Rightarrow -\frac{5}{6}q_0l^2+\frac{3}{2}lq_0.x_F=0\Rightarrow x_F=\frac{5}{9}l$$



b.





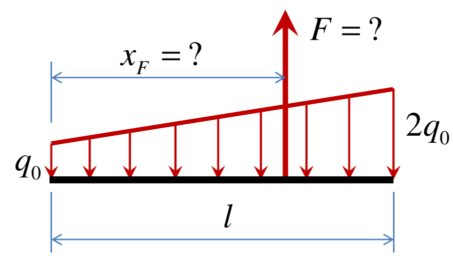
$$F=2\int_0^{l/2}(q_0+\frac{2q_0}{l}x)dx=\frac{3}{2}lq_0$$

Do hệ lực đối xứng nên tại A – điểm chính giữa thanh, mômen bằng không.

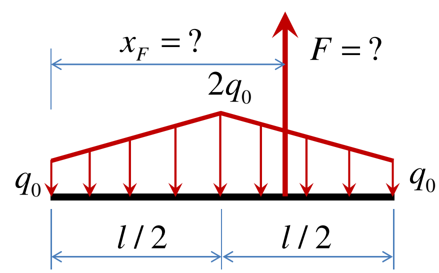
Ví dụ 2:

Hãy xác định vị trí và giá trị lực F để hệ lực sau cân bằng.

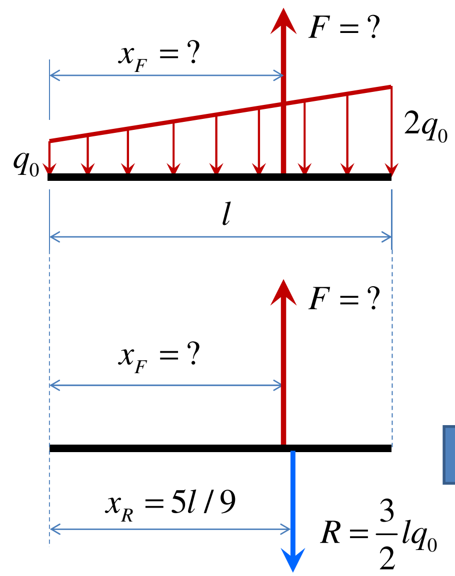
a.



b.



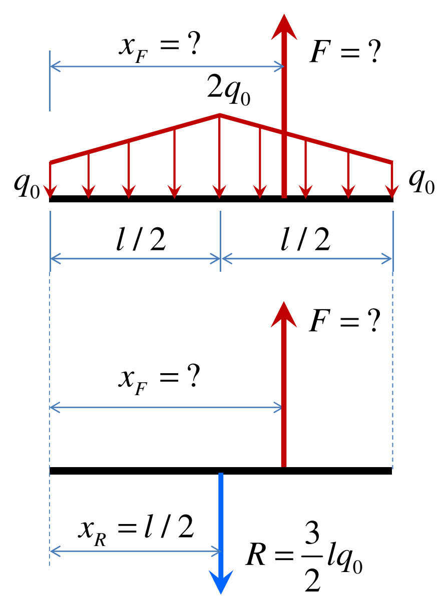
a.



Cân bằng

$$\begin{cases} x_F = x_R = 5l/9 \\ F = R = \frac{3}{2}lq_0 \end{cases}$$

b.

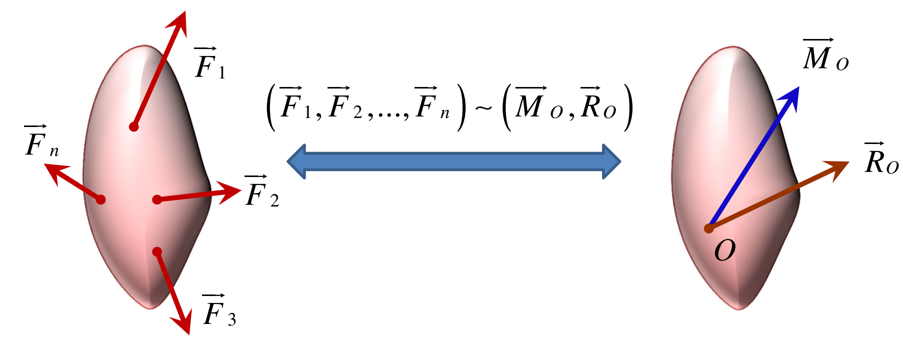


Cân bằng

$$\begin{cases} x_F = x_R = l/2 \\ F = R = \frac{3}{2}lq_0 \end{cases}$$

§2. Điều kiện cân bằng hệ lực

1. Điều kiện cân bằng tổng quát



Điều kiện cân bằng tổng quát của vật rắn:

$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right) \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{M}_O = 0 \\ \vec{R}_O = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

- với O là điểm bất kỳ

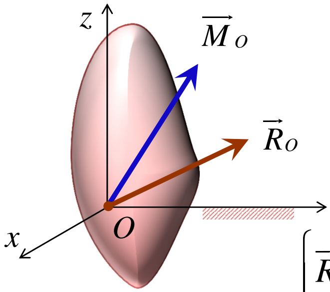
Trường hợp đặc biệt:

Hệ lực đồng quy cân bằng: $\vec{R}_O = 0$

Hệ ngẫu lực cân bằng: $\vec{M}_O = 0$

2. Phương trình cân bằng

2.1. Hệ lực không gian tổng quát: Xét trong Oxyz: $\vec{F}_k(F_{kx}, F_{ky}, F_{kz})$



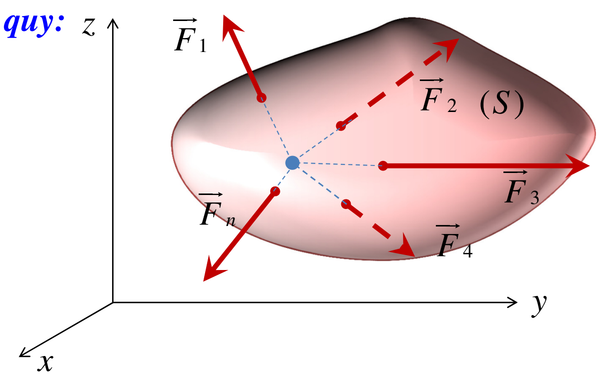
$$\begin{cases} \vec{R}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0 \\ \vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_{Ox} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \\ R_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \\ R_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \\ M_{Ox} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_{Ox}(\vec{F}_k) = 0 \\ M_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_{Oy}(\vec{F}_k) = 0 \\ M_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_{Oz}(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \quad \boxed{2.7}$$

F_{kx}: là hình chiếu (giá trị đại số) của véc tơ lực $\vec{F}_k$ lên trục x

$\overline{m}_{Ox}(\vec{F}_k)$: giá trị mômen đại số của mômen do lực $\vec{F}_k$ gây ra đối với trục x

*** Các trường hợp đặc biệt:**

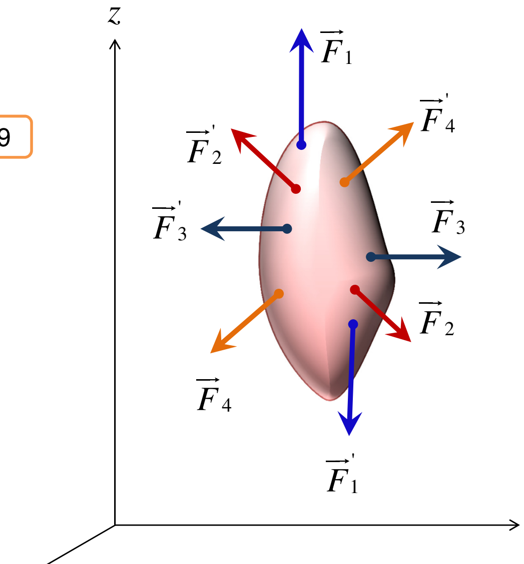
+ Hệ lực không gian đồng quy:



$$\vec{R}_O = 0 \Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \end{cases} \quad \boxed{2.8}$$

+ Hệ ngẫu lực không gian

$$\vec{M}_O = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_x = 0 \\ m_y = 0 \\ m_z = 0 \end{cases} \quad \boxed{2.9}$$

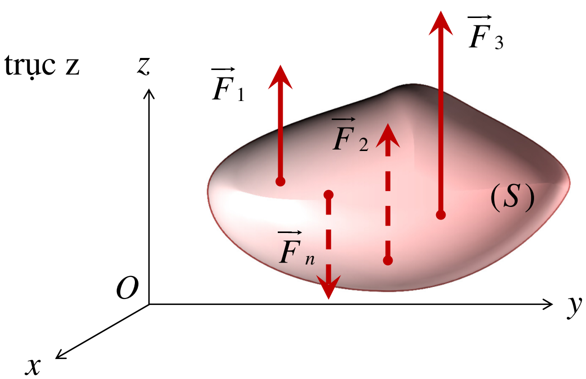


$(F_i = F'_i)$

+ Hệ lực không gian song song:

Giả sử hệ lực song song với trục z

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_{Ox}(\vec{F}_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_{Oy}(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \quad \boxed{2.10}$$



2.2. Hệ lực phẳng tổng quát: hệ lực nằm trong một mặt phẳng nhất định.

* Dạng 1: Hai pt chiếu – một pt mômen

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,\quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0,\quad \sum_{k=1}^{n} M_{(A)}(\vec{F}_k) = 0 \text{ , A: bất kỳ.} \qquad \boxed{2.11}$$

* Dạng 2: Hai pt mômen – một pt chiếu

$$\sum_{k=1}^{n} M_{(A)}(\vec{F}_k) = 0,\ \sum_{k=1}^{n} M_{(B)}(\vec{F}_k) = 0,\ \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \qquad \boxed{2.12}$$

A, B: bất kỳ. Phương nối hai điểm lấy mômen không vuông góc phương chiếu.

* Dạng 3: Ba pt mômen

$$\sum_{k=1}^{n} M_{(A)}(\vec{F}_k) = 0,\ \sum_{k=1}^{n} M_{(B)}(\vec{F}_k) = 0,\ \sum_{k=1}^{n} M_{(C)}(\vec{F}_k) = 0 \qquad \boxed{2.13}$$

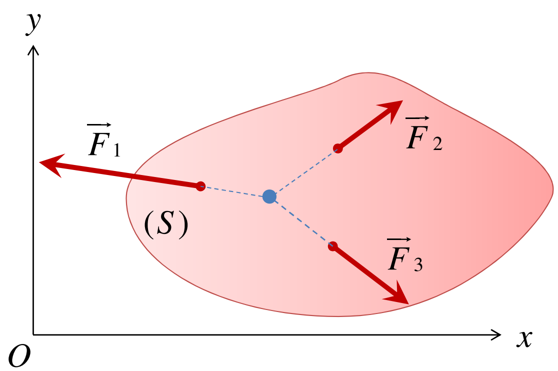
A, B, C: bất kỳ nhưng không thẳng hàng.

* Các trường hợp đặc biệt:

+ Hệ lực phẳng đồng quy:

Xét trong (Oxy) thì:

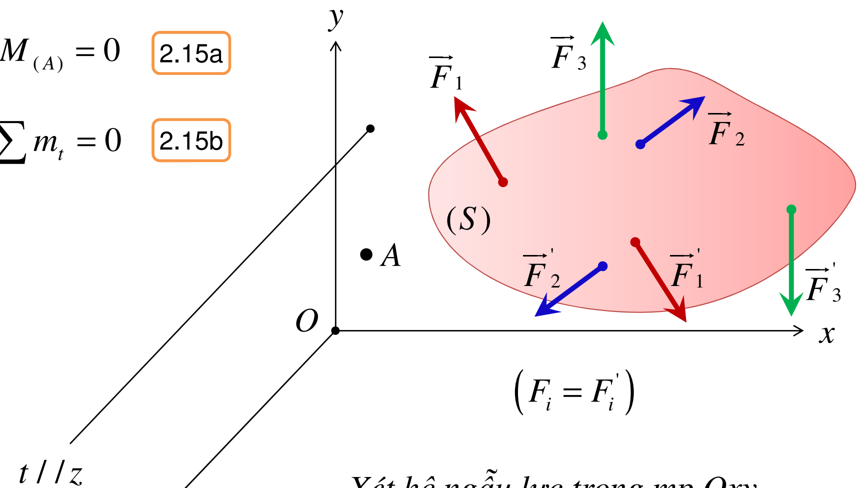
$$\vec{R}_O = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \end{cases} \qquad \boxed{2.14}$$



+ Hệ ngẫu lực phẳng:

$$\sum M_{(A)} = 0 \qquad \boxed{2.15a}$$

$$\text{Hoặc} \quad \sum m_t = 0 \qquad \boxed{2.15b}$$



z

Xét hệ ngẫu lực trong mp Oxy

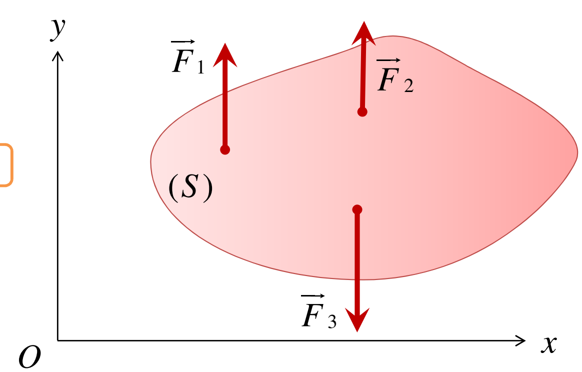
A: bất kỳ thuộc Oxy

t: trục bất kỳ song song với trục z

+ Hệ lực phẳng song song:

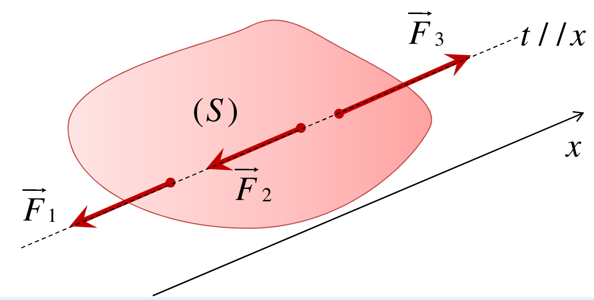
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} M_{(A)}(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \qquad \boxed{2.16}$$

A: bất kỳ



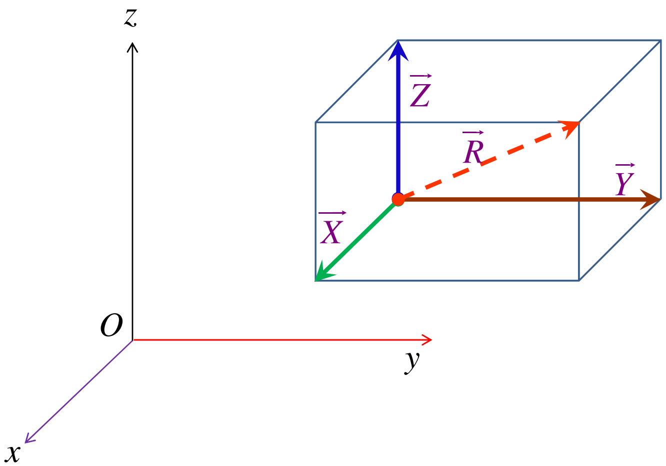
+ Hệ lực cùng giá:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \qquad \boxed{2.17}$$

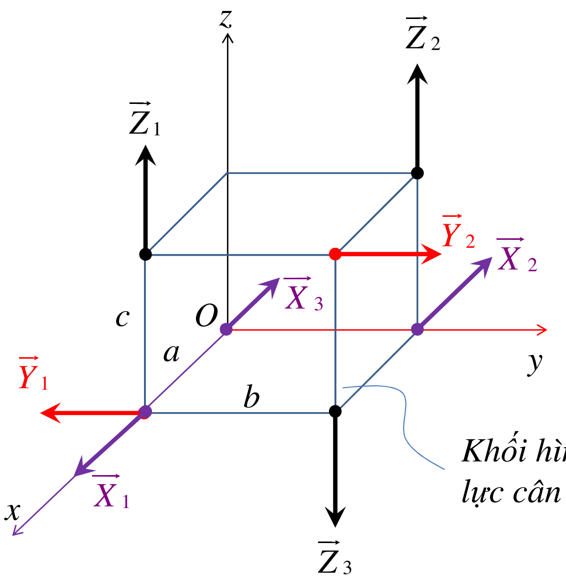


THỰC HÀNH VIẾT PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG

Trong thực hành, để dễ viết phương trình cân bằng chiếu lực và mô men, thông thường ta phân tích lực theo các phương của hệ trục tọa độ.

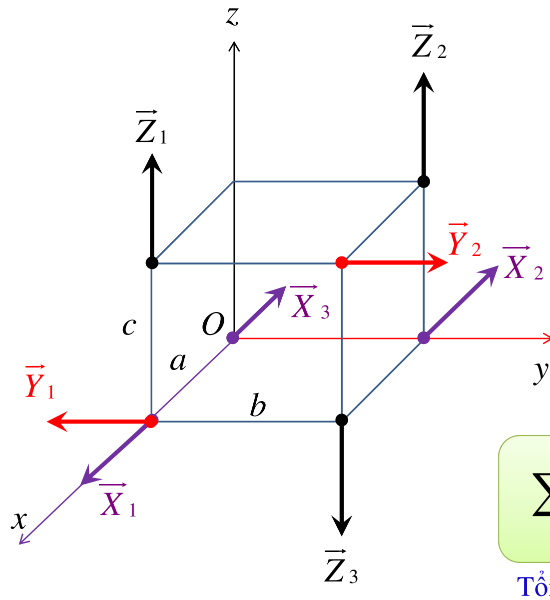


Cách viết phương trình cân bằng sau khi đã phân tích lực



Viết mối quan hệ "Ràng Buộc" giữa các lực từ điều kiện cân bằng

Cân bằng lực theo phương x



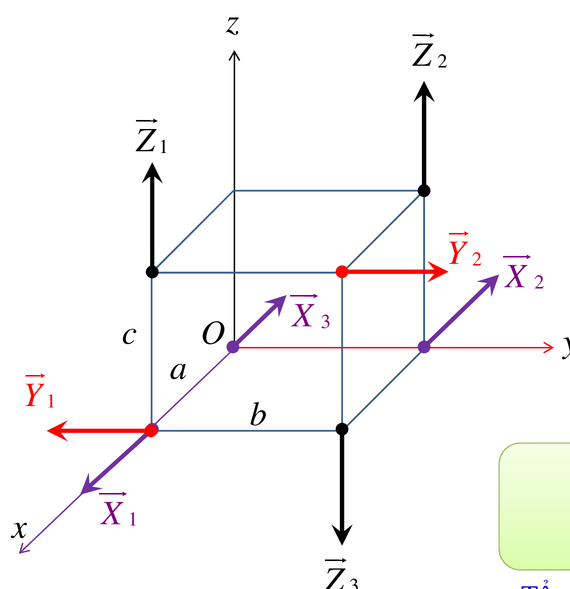
Tổng lực đại số theo phương x

Kết quả

$$\sum X = 0 \Rightarrow X_1 = X_2 + X_3$$

Tổng lực theo chiều trục bằng tổng lực ngược chiều trục

Cân bằng lực theo phương y



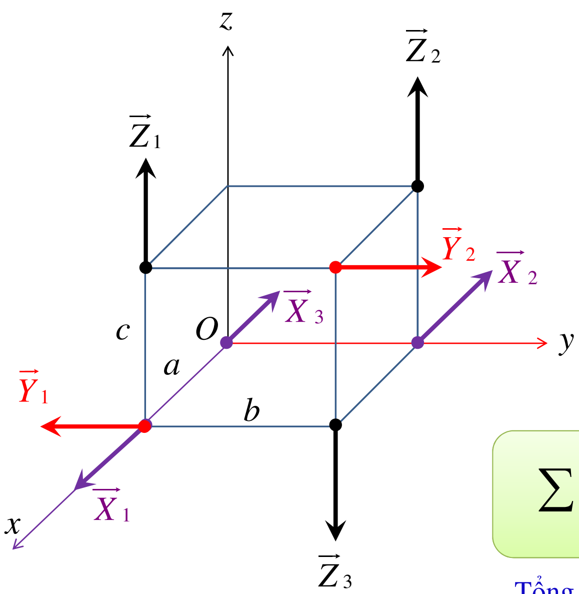
Tổng lực đại số theo phương y

Kết quả

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_2 = Y_1$$

Tổng lực theo chiều trục bằng tổng lực ngược chiều trục

Cân bằng lực theo phương z



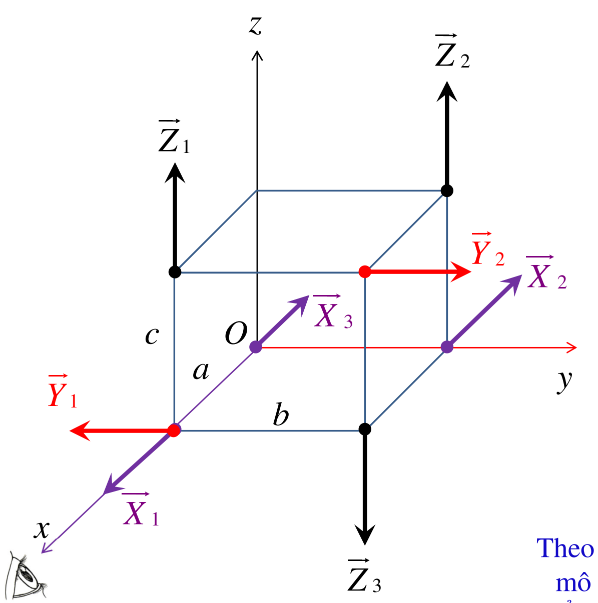
Tổng lực đại số theo phương z

Kết quả

$$\sum Z = 0 \Rightarrow Z_1 + Z_2 = Z_3$$

Tổng lực theo chiều trục bằng tổng lực ngược chiều trục

Cân bằng mômen theo trục x



Kết quả

$$\sum m_x = 0$$

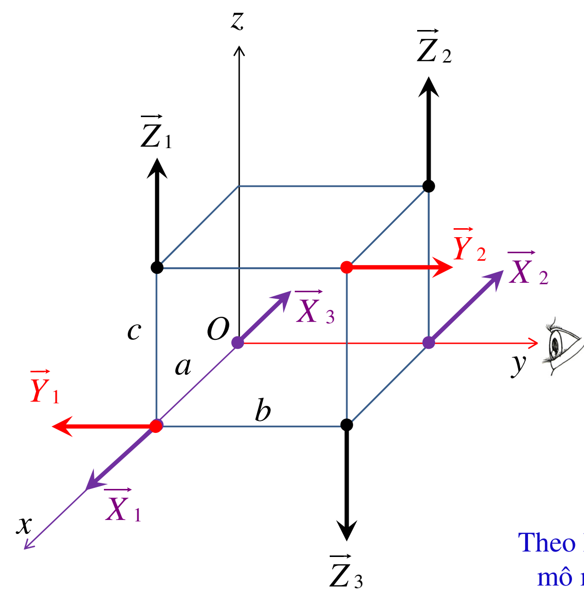
Tổng mômen đại số đối với trục x

$$Z_3.b + Y_2.c = Z_2.b$$

x x

Theo hướng nhìn theo phương trục, tổng mô men xoay thuận chiều KĐH bằng tổng mô men xoay ngược chiều KĐH

Cân bằng mômen theo trục y



Kết quả

$$\sum m_y = 0$$

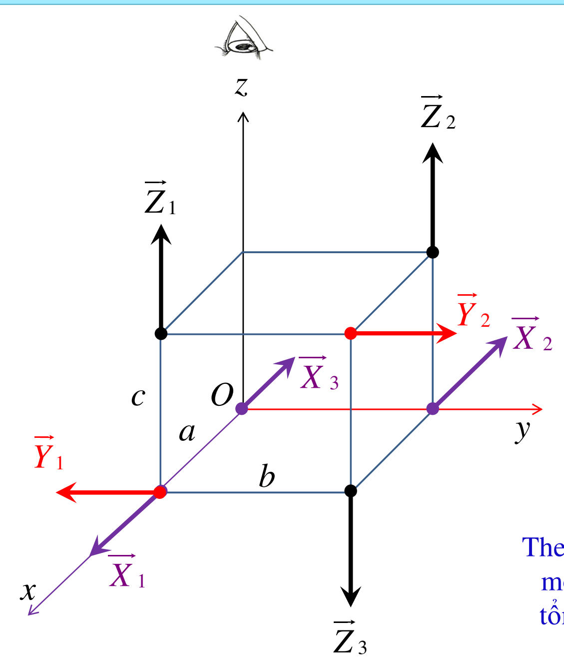
Tổng mômen đại số đối với trục y

$$Z_1.a = Z_3.a$$

y y

Theo hướng nhìn theo phương trục, tổng mô men xoay thuận chiều KĐH bằng tổng mô men xoay ngược chiều KĐH

Cân bằng mômen theo trục z



Kết quả

$$\sum m_z = 0$$

Tổng mômen đại số đối với trục z

$$Y_1.a = Y_2.a + X_2.b$$

z z

Theo hướng nhìn theo phương trục, tổng mô men xoay thuận chiều KĐH bằng tổng mô men xoay ngược chiều KĐH