PHẦN II

ĐỘNG HỌC VẬT RẮN VÀ CƠ CẤU

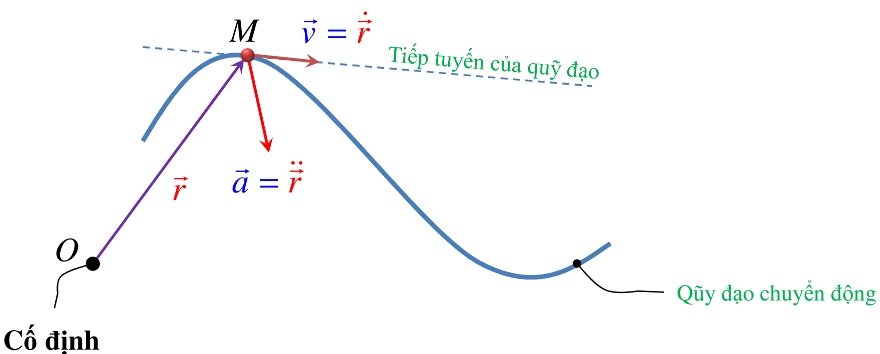
Động học nghiên cứu chuyển động về mặt hình học
(không xét nguyên nhân gây ra chuyển động).

Chương 3

ĐỘNG HỌC ĐIỂM

(Các công thức trong chương này đã được chứng minh, người đọc công nhận để vận dụng)

§1. Khảo sát chuyển động của điểm bằng phương pháp véc tơ

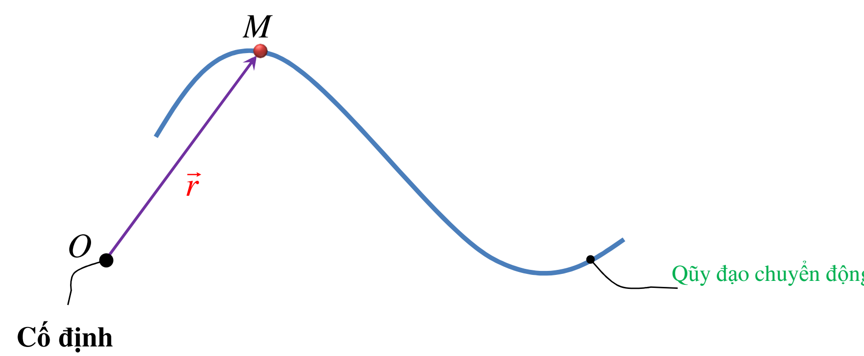


1. Phương trình chuyển động

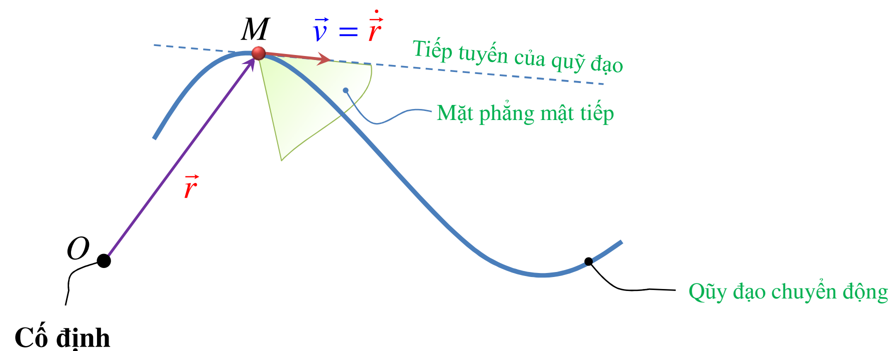
+ Chọn O là gốc cố định

+ M: động điểm

+ $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{r}(t)$: phương trình chuyển động (3.1)



2. Vận tốc của động điểm M

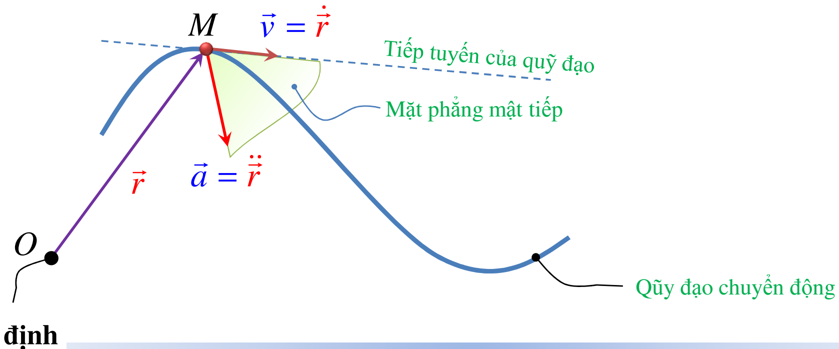


$\vec{v}$:

- Theo phương tiếp tuyến, hướng chuyển động
- Công thức véc tơ: $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$ (3.2)
- Độ lớn: $v = \left|\dot{\vec{r}}(t)\right|$ **(tốc độ)** (3.3)

+ Đơn vị: *(m/s)*

3. Gia tốc của động điểm M



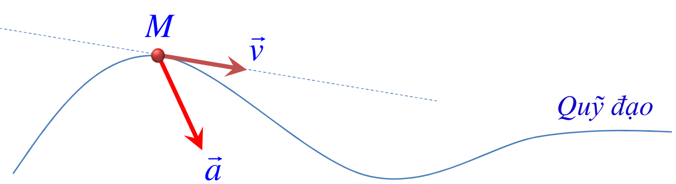
$\vec{a}$

- Trong mp mật tiếp, hướng về phía lõm của quỹ đạo tại M
- Công thức véc tơ: $\vec{a}(t) = \dfrac{d\dot{\vec{r}}(t)}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$ (3.4)
- Độ lớn: $a = \left|\ddot{\vec{r}}(t)\right|$ (3.5)

+ Đơn vị: *(m/s²)*

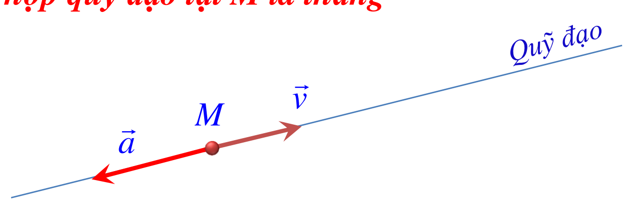
* Mối quan hệ phương của vận tốc và phương của gia tốc

+ Trường hợp quỹ đạo tại M là cong



(Không cùng phương với nhau)

+ Trường hợp quỹ đạo tại M là thẳng



(Cùng phương với nhau – theo phương quỹ đạo)

4. Tính chất chuyển động

+ Quỹ đạo chuyển động tại M là thẳng hay cong

. $\vec{v} \wedge \vec{a} = \vec{0}$: *Quỹ đạo tại M là thẳng* (3.6a)

. $\vec{v} \wedge \vec{a} \neq \vec{0}$: *Quỹ đạo tại M là cong* (3.6b)

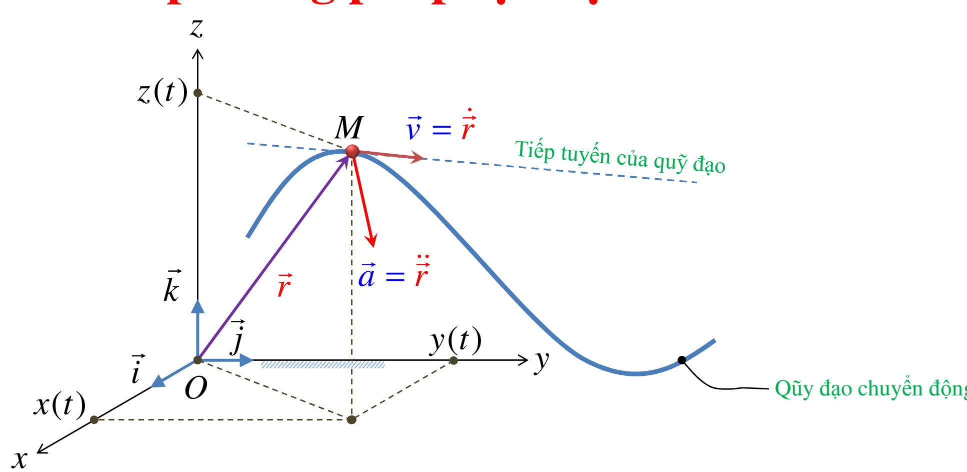
+ Chuyển động nhanh dần, chậm dần hay đều: phụ thuộc vào tính đơn điệu của tốc độ v của vận tốc. Tính đơn điệu của v cũng chính là tính đơn điệu của v². Để khảo sát tính đơn điệu của v² ta xét dấu đạo hàm cấp 1 của v² theo thời gian t: $\dfrac{dv^2}{dt} = \dfrac{d(\vec{v}^2)}{dt} = 2\vec{v}\dfrac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v}.\vec{a}$ (3.7)

. $\vec{v}.\vec{a} = 0$: *M chuyển động đều* (3.7a)

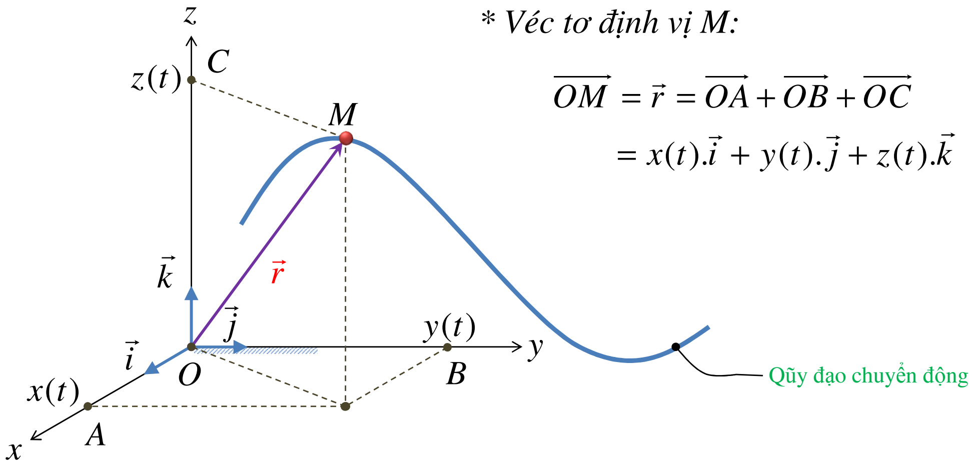
. $\vec{v}.\vec{a} > 0$: *M chuyển động nhanh dần* (3.7b)

. $\vec{v}.\vec{a} < 0$: *M chuyển động chậm dần* (3.7c)

§2. Khảo sát chuyển động của điểm bằng phương pháp tọa độ Descartes



1. Phương trình chuyển động của M trong hệ trục Oxyz



** Véc tơ định vị M:*

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$
$$= x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j} + z(t).\vec{k}$$

** Phương trình chuyển động theo 3 phương:*

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t) \qquad \boxed{3.8}$$

Khử t trong phương trình chuyển động thì được phương trình quỹ đạo

2. Vận tốc của động điểm M

+ Véc tơ vận tốc và tọa độ của nó

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t).\vec{i} + \dot{y}(t).\vec{j} + \dot{z}(t).\vec{k} \qquad \boxed{3.9}$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)\ ,\text{ với } \begin{cases} v_x = \dot{x}(t) \\ v_y = \dot{y}(t) \\ v_z = \dot{z}(t) \end{cases} \qquad \boxed{3.9a}$$

+ Độ lớn của vận tốc

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad \boxed{3.9b}$$

+ Các cosin chỉ phương của vận tốc

$$\begin{cases} cos(Ox,\vec{v}) = cos\alpha = \dfrac{v_x}{v} \\ cos(Oy,\vec{v}) = cos\beta = \dfrac{v_y}{v} \\ cos(Oz,\vec{v}) = cos\gamma = \dfrac{v_z}{v} \end{cases} \qquad \boxed{3.9c}$$

3. Gia tốc của động điểm M

+ Véc tơ gia tốc và tọa độ của nó

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t).\vec{i} + \ddot{y}(t).\vec{j} + \ddot{z}(t).\vec{k} \qquad \boxed{3.10}$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)\ ,\text{ với } \begin{cases} a_x = \ddot{x}(t) \\ a_y = \ddot{y}(t) \\ a_z = \ddot{z}(t) \end{cases} \qquad \boxed{3.10a}$$

+ Độ lớn của gia tốc

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad \boxed{3.10b}$$

+ Các cosin chỉ phương của gia tốc

$$\begin{cases} cos(Ox,\vec{a}) = cos\alpha^* = \dfrac{a_x}{a} \\ cos(Oy,\vec{a}) = cos\beta^* = \dfrac{a_y}{a} \\ cos(Oz,\vec{a}) = cos\gamma^* = \dfrac{a_z}{a} \end{cases} \qquad \boxed{3.10c}$$

4. Tính chất chuyển động

+ Quỹ đạo chuyển động tại M là thẳng hay cong:

$$\vec{v} \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k} \qquad \boxed{3.11}$$

$$\cdot\ C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 = 0 \Rightarrow \vec{v} \wedge \vec{a} = \vec{0}$$
$$\cdot\ C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 \neq 0 \Rightarrow \vec{v} \wedge \vec{a} \neq \vec{0}$$

$.\ \vec{v} \wedge \vec{a} = \vec{0}$: *Quỹ đạo tại M là thẳng* $\boxed{3.11a}$

$.\ \vec{v} \wedge \vec{a} \neq \vec{0}$: *Quỹ đạo tại M là cong* $\boxed{3.11b}$

+ Chuyển động nhanh dần, chậm dần hay đều:

$$\vec{v}.\vec{a} = \dot{x}.\ddot{x} + \dot{y}.\ddot{y} + \dot{z}.\ddot{z} \qquad (3.12)$$

. $\vec{v}.\vec{a} = 0$: *M chuyển động đều* (3.12a)

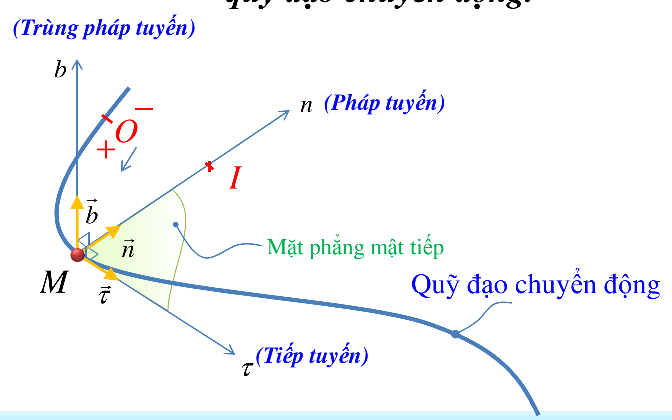
. $\vec{v}.\vec{a} > 0$: *M chuyển động nhanh dần* (3.12b)

. $\vec{v}.\vec{a} < 0$: *M chuyển động chậm dần* (3.12c)

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
DANANG UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

§3. Khảo sát chuyển động của điểm bằng phương pháp tọa độ tự nhiên

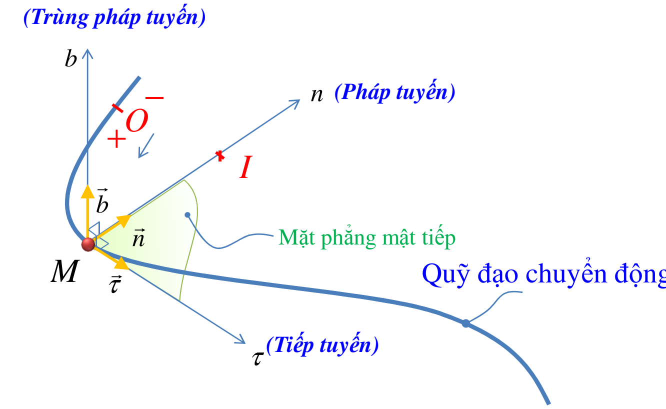
Phương pháp tọa độ tự nhiên được áp dụng khi biết trước quỹ đạo chuyển động.

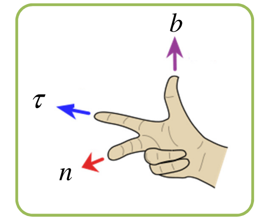


1. Hệ trục tọa độ tự nhiên:

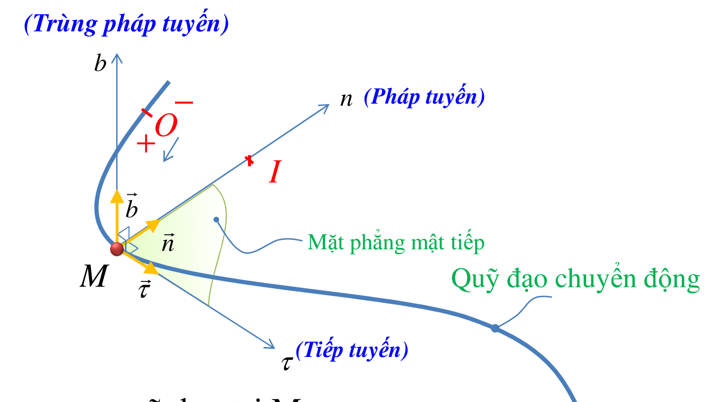
+ Chọn O là gốc cố định trên quỹ đạo xác định trước.

+ Tại động điểm M, dựng hệ trục tam diện thuận (Mτnb). Trong đó mp(Mτn) thuộc mặt phẳng mật tiếp của quỹ đạo tại M.





$$M\tau nb \left| \begin{array}{l} \tau : \textit{Tiếp tuyến theo chiều dương của quỹ đạo} \\ n : \textit{Pháp tuyến hướng vào bề mặt lõm của quỹ đạo} \\ b : \textit{Trùng pháp tuyến của quỹ đạo} \end{array} \right.$$



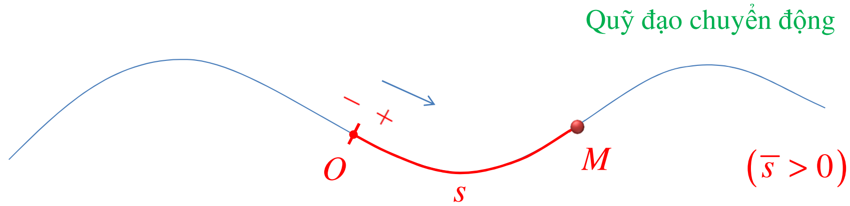
+ I là tâm cong quỹ đạo tại M

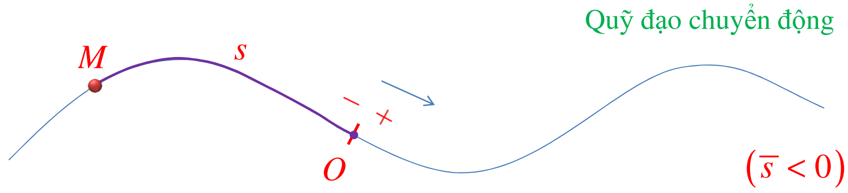
+ IM = ρ là bán kính cong của quỹ đạo tại M

+ 1/ρ là độ cong

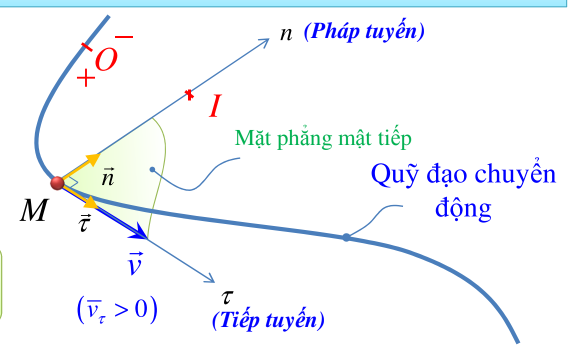
2. Phương trình chuyển động của động điểm M

$\overset{\frown}{OM} = s(t)$ 3.13





3. Vận tốc của động điểm M



$$\vec{v} = \dot{s}(t).\vec{\tau} = v(t).\vec{\tau} = v_\tau(t).\vec{\tau}$$

- Hàm số: $v(t) = v_\tau(t) = \dot{s}(t)$ 3.14
- Theo phương tiếp tuyến τ, hướng theo chiều chuyển động
  - *Nếu* $\bar{v}_\tau > 0$: $\vec{v}$ *theo chiều trục τ.*
  - *Nếu* $\bar{v}_\tau < 0$: $\vec{v}$ *ngược chiều trục τ.*
- Độ lớn: $v = |\dot{s}(t)| = |\bar{v}_\tau|$ 3.15

Chứng minh công thức véc tơ vận tốc

* Vận tốc theo phương tiếp tuyến nên có thể viết: $\vec{v}(t) = v_\tau(t).\vec{\tau}(t)$

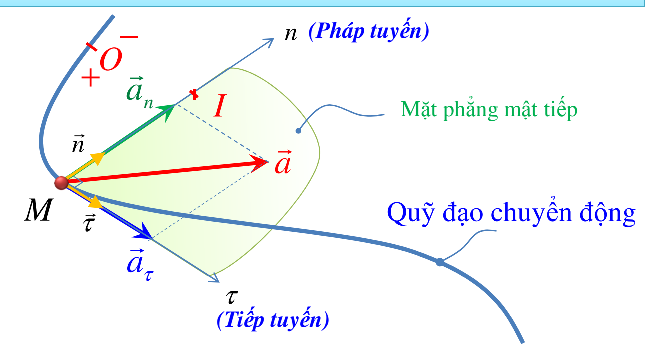
* Ta có: $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dfrac{d\vec{r}(t)}{ds(t)}.\dfrac{ds(t)}{dt}$

Theo toán hình học vi phân: $\dfrac{d\vec{r}(t)}{ds(t)} = \vec{\tau}(t)$

Do đó: $\vec{v}(t) = \dfrac{ds(t)}{dt}.\vec{\tau}(t) = \dot{s}(t).\vec{\tau}(t)$

Vì vậy: $v_\tau(t) = v(t) = \dot{s}(t)$

4. Gia tốc của động điểm M



Phân gia tốc thành 2 thành phần:

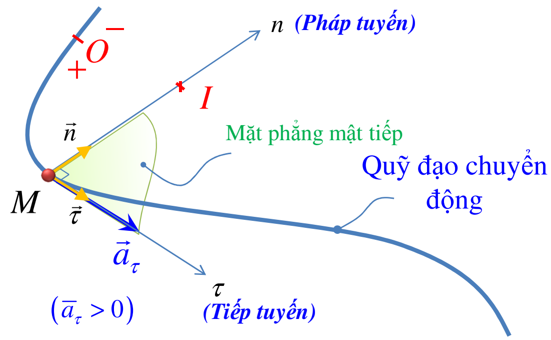
Thành phần gia tốc tiếp tuyến $\vec{a}_\tau$

Thành phần gia tốc pháp tuyến $\vec{a}_n$

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \quad 3.16$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad 3.17$$

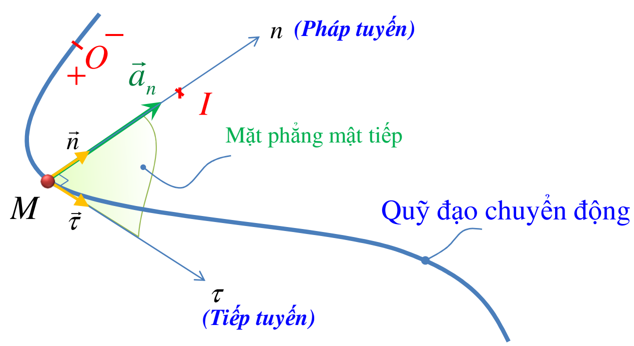
+ Thành phần gia tốc tiếp tuyến



$$\vec{a}_\tau = \ddot{s}(t).\vec{\tau} = a_\tau(t).\vec{\tau}$$

- Hàm số: $a_\tau(t) = \ddot{s}(t)$ — 3.18
- Theo phương tiếp tuyến τ
  - *Nếu $\bar{a}_\tau > 0$: $\vec{a}_\tau$ theo chiều trục τ.*
  - *Nếu $\bar{a}_\tau < 0$: $\vec{a}_\tau$ ngược chiều trục τ.*
- Độ lớn: $a_\tau = |\ddot{s}(t)| = |\bar{a}_\tau|$ — 3.19

+ Thành phần gia tốc pháp tuyến



$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = a_n.\vec{n}$$

- Hàm số: $a_n(t) = \dfrac{v^2(t)}{\rho(t)}$ — 3.20
- Theo chiều trục n
- Độ lớn: $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ — 3.21

Chứng minh công thức véc tơ gia tốc

* Ta có: $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}$

Mà $\vec{v}(t) = \dot{s}(t).\vec{\tau}(t)$ nên $\vec{a}(t) = \ddot{s}(t).\vec{\tau}(t) + \dot{s}(t).\dot{\vec{\tau}}(t)$

Trong hình học vi phân, người ta chứng minh được: $\dfrac{d\vec{\tau}(t)}{ds(t)} = \dfrac{\vec{n}(t)}{\rho(t)}$

Do đó: $\dot{\vec{\tau}}(t) = \dfrac{d\vec{\tau}(t)}{dt} = \dfrac{d\vec{\tau}(t)}{ds(t)}.\dfrac{ds(t)}{dt} = \dfrac{\vec{n}(t)}{\rho(t)}.\dot{s}(t)$

Vì vậy: $\vec{a}(t) = \ddot{s}(t).\vec{\tau}(t) + .\dfrac{\dot{s}^2(t)}{\rho(t)}\vec{n}(t) = \ddot{s}(t).\vec{\tau}(t) + .\dfrac{v^2(t)}{\rho(t)}\vec{n}(t)$

Đặt $a_\tau(t) = \ddot{s}(t), a_n(t) = \dfrac{v^2(t)}{\rho(t)}$, ta có: $\vec{a}(t) = a_\tau(t).\vec{\tau}(t) + a_n(t).\vec{n}(t)$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \vec{a}_\tau(t) + \vec{a}_n(t)$$

5. Phán đoán tính chất chuyển động của động điểm M

+ Chuyển động đều: $\bar{a}_\tau = \dot{\bar{v}}_\tau = 0$

Do đó: $\bar{v} = \bar{v}_\tau = v_0 = const$, khi đó: $s(t) = s_0 + v_0.t$ — 3.22

+ Chuyển động biến đổi đều: $\bar{a}_\tau = const$

Khi đó: $s(t) = s_0 + v_0.t + \dfrac{1}{2}\bar{a}_\tau.t^2$ — 3.23

Trong đó: v_0 là vận tốc đầu của động điểm

s_0 là tọa độ tự nhiên ban đầu của động điểm

+ Chuyển động biến đổi khi: $\bar{v}.\vec{a} = (\bar{v}_\tau.\vec{\tau}).(\bar{a}_\tau.\vec{\tau} + a_n.\vec{n}) = \bar{v}_\tau.\bar{a}_\tau \neq 0$ — 3.24

. *$\bar{v}_\tau.\bar{a}_\tau > 0$: chuyển động nhanh dần* — 3.24a

. *$\bar{v}_\tau.\bar{a}_\tau < 0$: chuyển động chậm dần* — 3.24b