

Chương 6

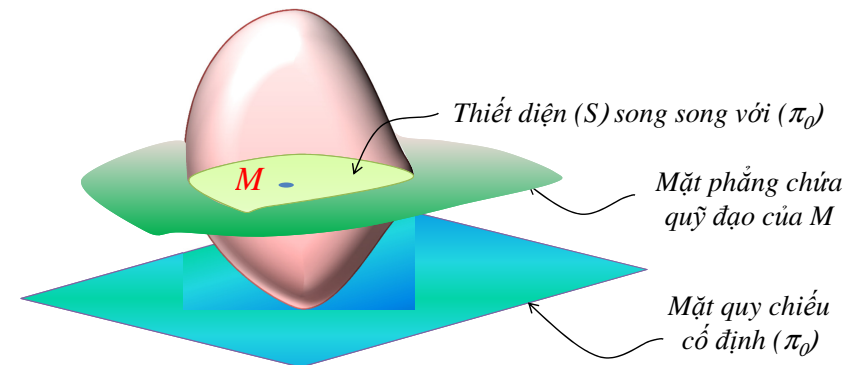
CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẪNG CỦA VẬT RẮN

§1. Định nghĩa và mô hình vật rắn chuyển động song phẳng

1. Định nghĩa

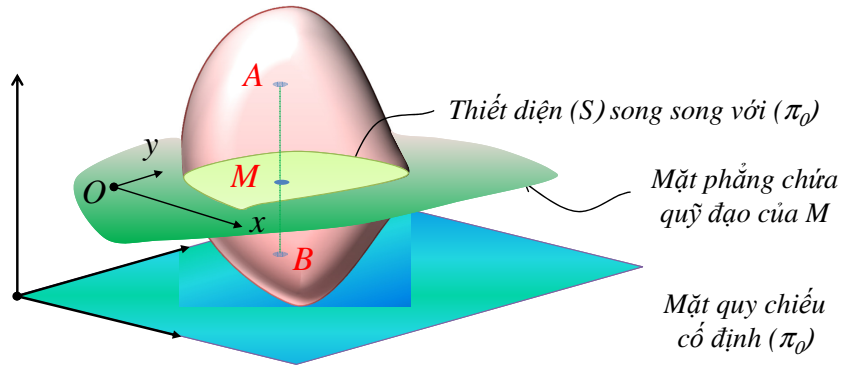
Vật rắn chuyển động song phẳng khi khoảng cách từ mỗi điểm của nó đến một mặt phẳng quy chiếu cố định luôn luôn không đổi.

+ Mỗi điểm thuộc thiết diện của vật song song với mặt phẳng quy chiếu cố định chỉ chuyển động trong mặt phẳng chứa nó.



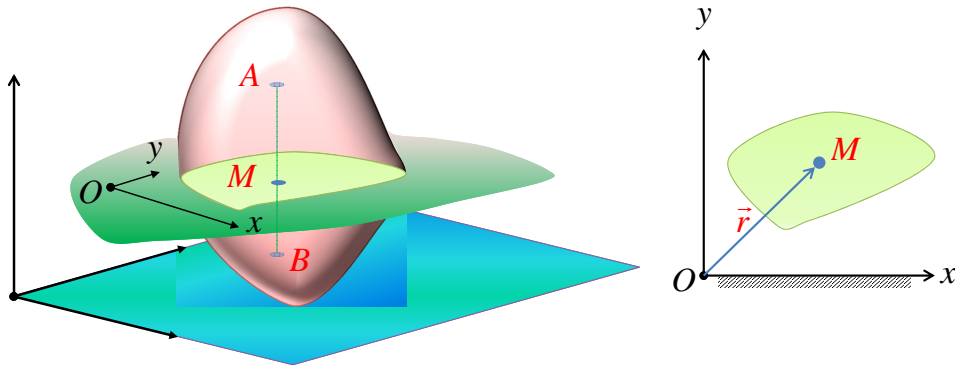
2. Mô hình vật rắn chuyển động song phẳng

- Đoạn AB thuộc vật rắn vuông góc với $pm(\pi_0)$ chỉ có chuyển động tịnh tiến vì nó có phương không đổi. Chuyển động của AB đặc trưng bởi chuyển động của điểm bất kỳ thuộc nó. Ví dụ giao điểm của AB với thiết diện (S) song song với $pm(\pi_0)$.
- Chuyển động của (S) trong mặt phẳng song song với $pm(\pi_0)$ đặc trưng cho chuyển động của vật rắn.



§2. Khảo sát chuyển động của toàn bộ vật rắn

- Thiết diện (S) được gọi là mô hình phẳng của vật rắn chuyển động song phẳng.



1. Phương trình chuyển động của vật rắn

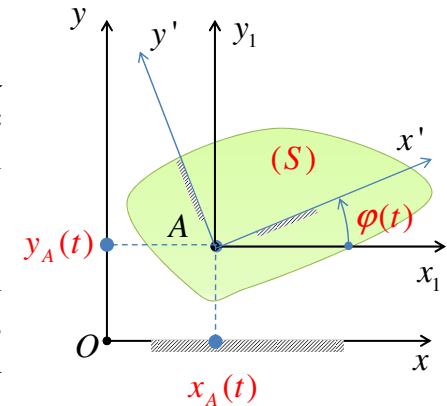
- Muốn lập phương trình chuyển động toàn bộ vật rắn, ta chỉ cần lập phương trình chuyển động của thiết diện (S).

+ Trong mặt phẳng chứa thiết diện (S):

. Lập hệ trục tọa độ cố định Oxy.

. Qua một điểm A nào đó gọi là điểm cực trên thiết diện (S), lập hệ trục tọa độ Ax_1y_1 luôn luôn song song với hệ trục Oxy là hệ quy chiếu động.

+ (S) chuyển động quay tương đối quanh cực A trong hệ quy chiếu Ax_1y_1 , hệ quy chiếu Ax_1y_1 chuyển động tịnh tiến so với hệ trục quy chiếu cố định Oxy.



+ Các thông số định vị (S) là tọa độ $A(x_A, y_A)$ và góc φ thay đổi theo thời gian.

+ Phương trình chuyển động:

$$\begin{cases} x_A = x_A(t) \\ y_A = y_A(t) \\ \varphi_{sp}(t) = \varphi(t) \end{cases}$$

6.1

- Hai phương trình đầu thể hiện chuyển động tịnh tiến của hệ tọa độ động Ax, y_1 so với hệ trục tọa độ cố định Oxy (chuyển động tịnh tiến của vật rắn theo điểm cực A).
- Phương trình thứ ba thể hiện chuyển động quay quanh cực A của (S)

3. Gia tốc của chuyển động của vật rắn

- Gia tốc chuyển động tịnh tiến của vật theo điểm cực A

$$\vec{a}_A \begin{cases} a_{Ax} = \ddot{x}_A(t) \\ a_{Ay} = \ddot{y}_A(t) \end{cases}$$

6.4

- Gia tốc góc của vật quay quanh cực A – gia tốc góc song phẳng

$$\varepsilon_{sp}(t) = \ddot{\varphi}(t)$$

6.5

- Gia tốc của thành phần chuyển động tịnh tiến phụ thuộc vào việc chọn cực.
- Gia tốc góc của thành phần chuyển động quay không phụ thuộc vào việc chọn cực.

2. Vận tốc của chuyển động của vật rắn

- Vận tốc chuyển động tịnh tiến của vật theo điểm cực A

$$\vec{v}_A \begin{cases} v_{Ax} = \dot{x}_A(t) \\ v_{Ay} = \dot{y}_A(t) \end{cases}$$

6.2

- Vận tốc góc của vật quay quanh cực A – vận tốc góc song phẳng

$$\omega_{sp}(t) = \dot{\varphi}(t)$$

6.3

- Vận tốc của thành phần chuyển động tịnh tiến phụ thuộc vào việc chọn cực.
- Vận tốc góc của thành phần chuyển động quay không phụ thuộc vào việc chọn cực



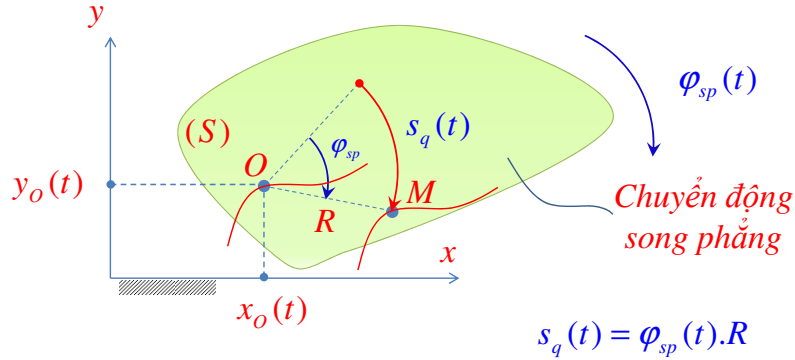
§3. Vận tốc và gia tốc của điểm thuộc vật rắn

*** Phân tích chuyển động của điểm M bất kỳ thuộc (S):**

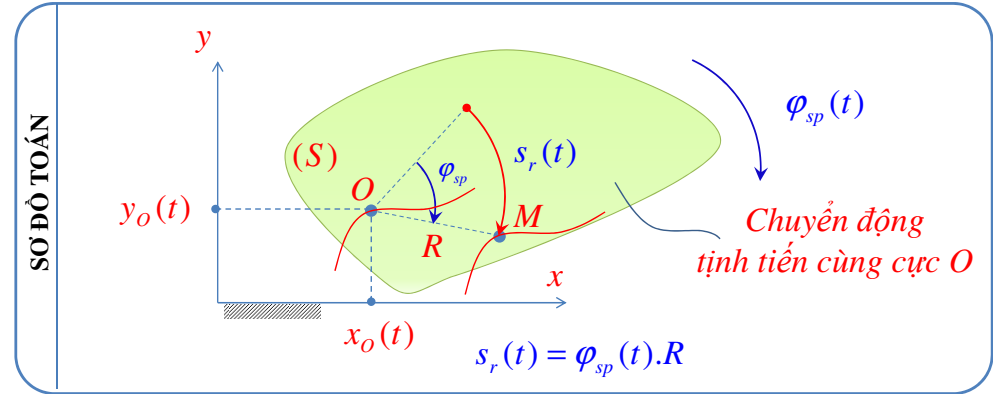
- Xét M là một điểm thuộc (S) – cố định so với (S), khi (S) chuyển động song phẳng thì M chuyển động cùng với (S). Điểm M tham gia hai thành phần chuyển động:

- + Chuyển động với (S) khi (S) chuyển động tịnh tiến cùng cực O
- + Chuyển động với (S) khi (S) chuyển động quay quanh cực O.

(S) chuyển động song phẳng – M thuộc (S)



(S) chuyển động tịnh tiến cùng cực O – M chuyển động trên (S)



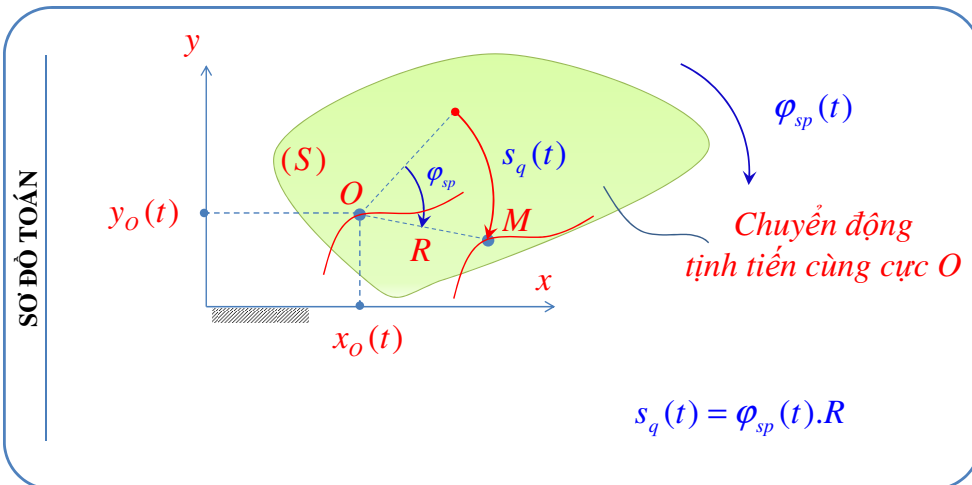
+ Chuyển động của M trên (S) theo cung tròn tâm O bán kính R là chuyển động tương đối. Phương trình chuyển động: $s_r(t) = \varphi(t) \cdot R$

+ Trường tượng dùng M lại trên (S), khi (S) chuyển động kéo theo M chuyển động. Chuyển động của M lúc này so với (x,y) là chuyển động theo.

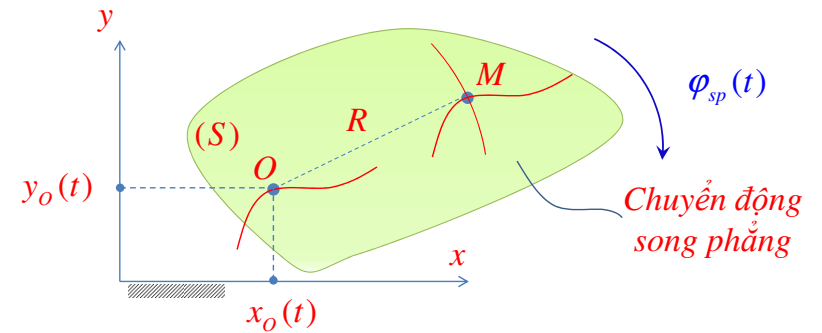
+ Gia tốc Coriolis tại M luôn bằng 0

Về toán học, ta có thể xem điểm M chuyển động trên (S) với quỹ đạo là cung tròn tâm là cực O, bán kính OM; trong lúc (S) đang chuyển động tịnh tiến cùng với cực O.

(S) chuyển động tịnh tiến cùng cực O – M chuyển động trên (S)



Với phân tích trên, quay lại sơ đồ cơ học, ta có kết luận về chuyển động của điểm M thuộc (S) như sau:



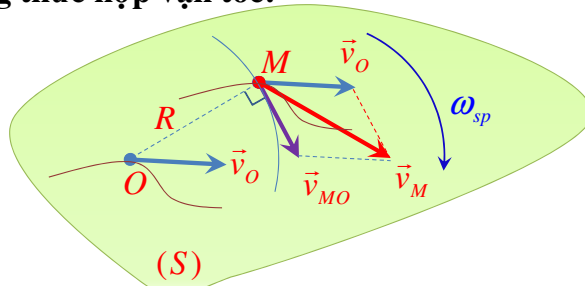
+ Chuyển động của M khi (S) chuyển động quay quanh cực O là chuyển động tương đối.

+ Chuyển động của M khi (S) chuyển động tịnh tiến cùng với cực O là chuyển động theo.

1. Sự liên hệ vận tốc giữa hai điểm thuộc vật

* Theo sơ đồ toán, dùng công thức hợp vận tốc:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_M^r + \vec{v}_M^e$$



Mà $\begin{cases} \vec{v}_M^e = \vec{v}_O \text{ (Vận tốc của M khi (S) chuyển động tịnh tiến cùng với cực O)} \\ \vec{v}_M^r = \vec{v}_{MO} \text{ (Vận tốc của M khi (S) chuyển động quay quanh cực O)} \end{cases}$ 6.6

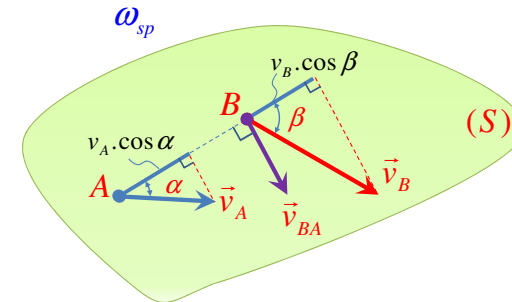
Với $\vec{v}_{MO} \begin{cases} v_{MO}(t) = \dot{s}_r(t) = \omega_{sp}(t) \cdot MO \\ \text{Theo chiều } \omega_{sp} \text{ đối với O} \\ v_{MO} = MO \cdot \omega_{sp} \end{cases}$ 6.7

Nên $\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO}$ 6.8

Chú ý: Vì có thể chọn điểm cực một cách tùy ý nên công thức liên hệ vận tốc của hai điểm A, B bất kỳ thuộc (S):

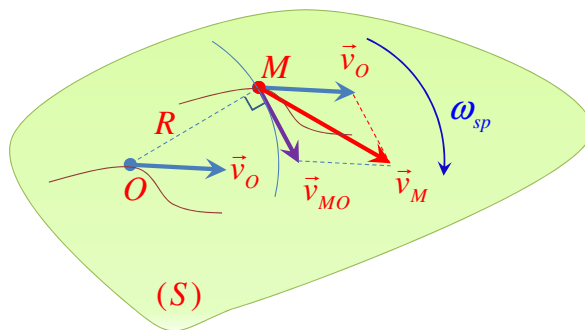
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \quad 6.9$$

b. Định lý 2: Hình chiếu vận tốc của hai điểm bất kỳ thuộc hình phẳng (S) chuyển động song phẳng lên trục qua hai điểm ấy thì bằng nhau.



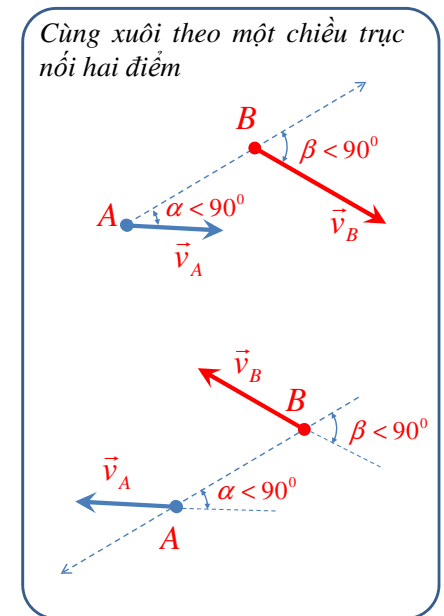
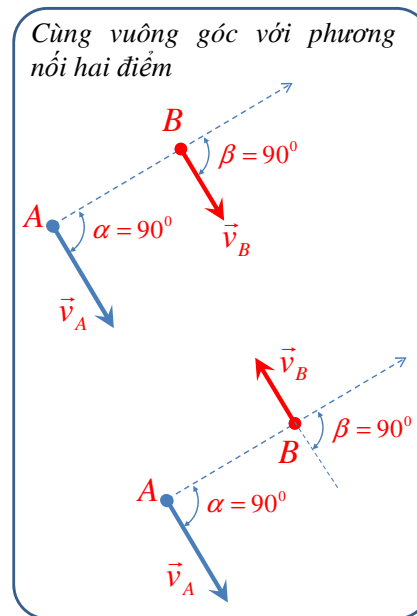
$$hc|_{AB} \vec{v}_A = hc|_{AB} \vec{v}_B \Rightarrow v_A \cdot \cos \alpha = v_B \cdot \cos \beta \quad 6.10$$

a. Định lý 1: Vận tốc của điểm M thuộc (S) chuyển động song phẳng bằng tổng hình học vận tốc của điểm cực O và vận tốc của điểm M trong chuyển động quay tương đối của hình phẳng (S) quanh điểm cực O.



$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO} \quad 6.8$$

* Từ công thức $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$, chiều véc tơ vận tốc tại hai điểm bất kỳ có những trường hợp sau:



2. Tâm vận tốc tức thời và sự phân bố vận tốc

a. Tâm vận tốc tức thời:

* **Định nghĩa:** Điểm P thuộc mặt phẳng chứa hình phẳng (S) mà tại thời điểm khảo sát có vận tốc bằng không, gọi là tâm vận tốc tức thời.

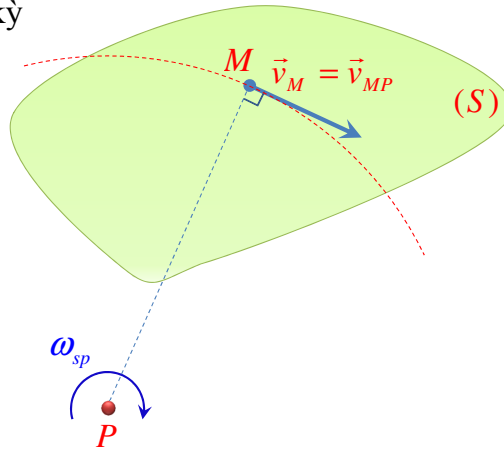
Gọi P là tâm vận tốc tức thời, thì: $\vec{v}_P = 0$

Chọn P làm cực, vận tốc tại M bất kỳ thuộc (S):

$$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_{MP} = \vec{v}_{MP}$$

Trong đó:

$$v_M = v_{MP} = \omega_{sp} \cdot PM$$



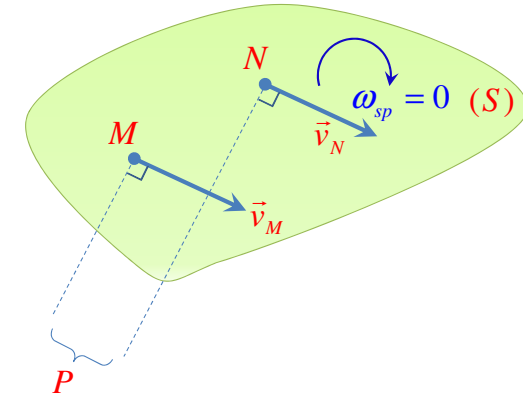
- Tại thời điểm khảo sát mà $\omega_{sp} = 0$ thì tâm vận tốc tức thời P ở xa vô cùng. Chuyển động của vật lúc này được gọi là tịnh tiến tức thời. Khi vật chuyển động tịnh tiến tức thời, véc tơ vận tốc tại mọi điểm là bằng nhau.

Thật vậy, xét 2 điểm M, N bất kỳ. Chọn N làm cực, ta có:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_N + \vec{v}_{MN}$$

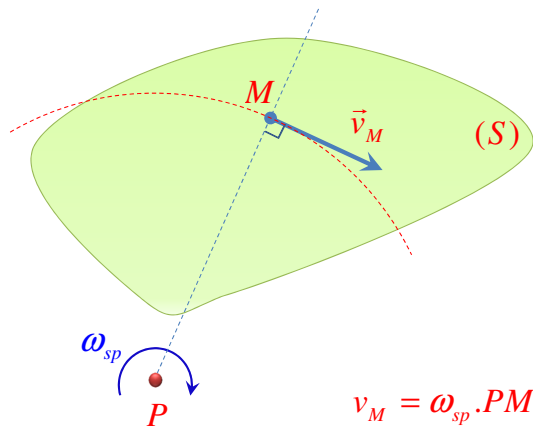
$$\text{Mà } \omega_{sp} = 0 \text{ nên } \vec{v}_{MN} = 0$$

$$\text{Do đó: } \vec{v}_M = \vec{v}_N$$



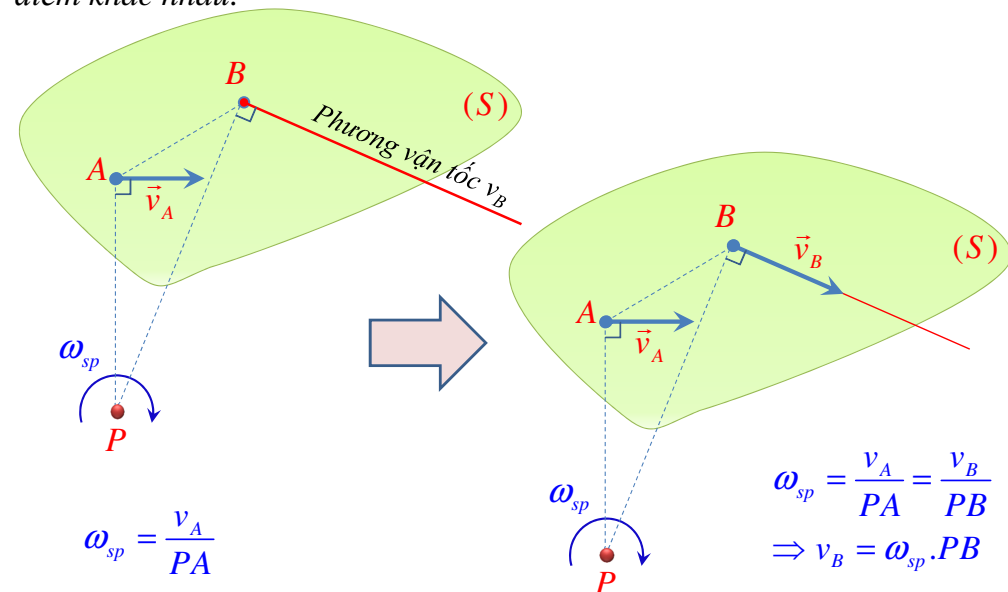
- Tại thời điểm khảo sát, vận tốc tại M và vận tốc góc ω_{sp} là xác định nên tồn tại duy nhất một tâm vận tốc tức thời P.

- Đường thẳng đi qua M bất kỳ mà vuông góc với vận tốc tại M chứa tâm vận tốc tức thời P. Tâm vận tốc tức thời P luôn nằm về phía đường thẳng đối với M mà vận tốc tại M quay quanh P theo chiều của ω_{sp} , $PM = v_M / \omega_{sp}$

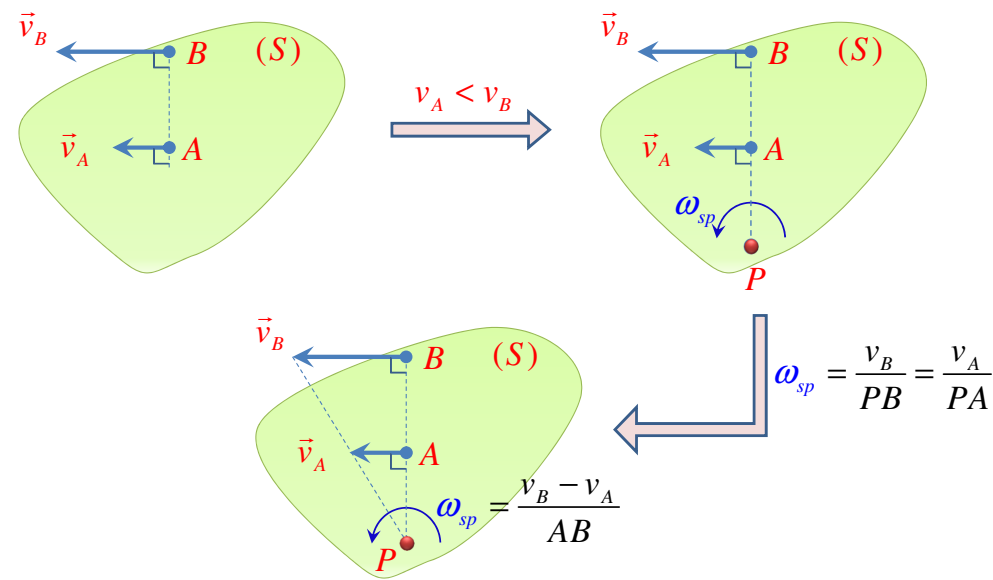


* Cách xác định tâm vận tốc tức thời P

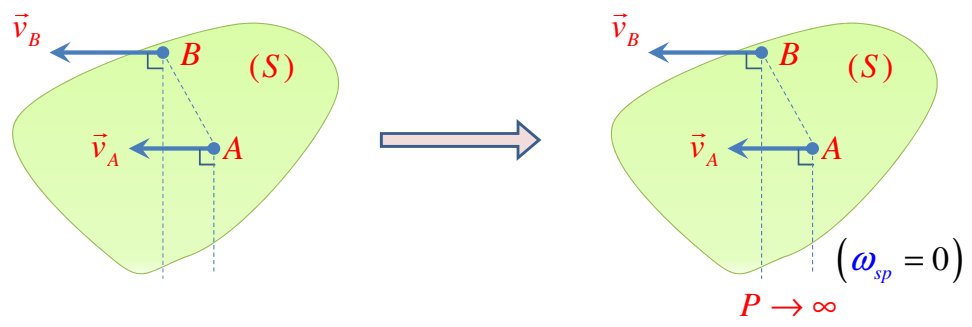
TH1: Biết vận tốc 1 điểm, phương vận tốc điểm khác, phương vận tốc hai điểm khác nhau:



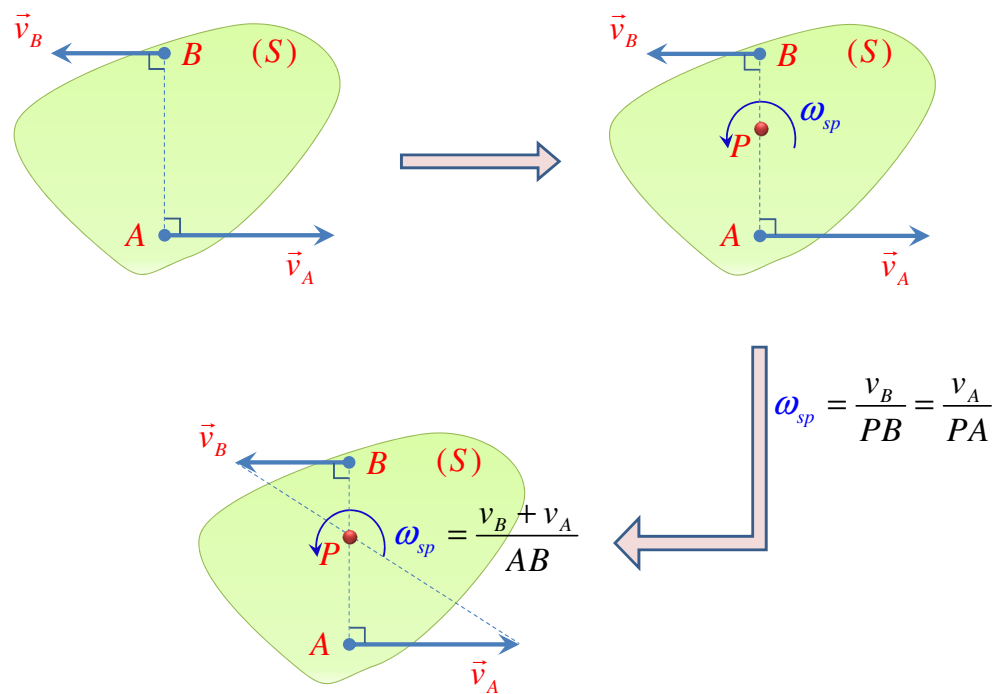
TH2: Biết hai véc tơ vận tốc $\vec{v}_A // \vec{v}_B$



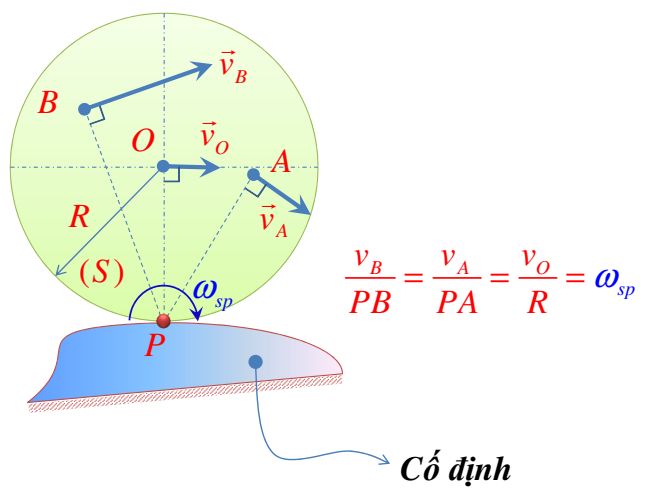
Tại thời điểm đang xét mà $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ thì vật chuyển động tịnh tiến tức thời.



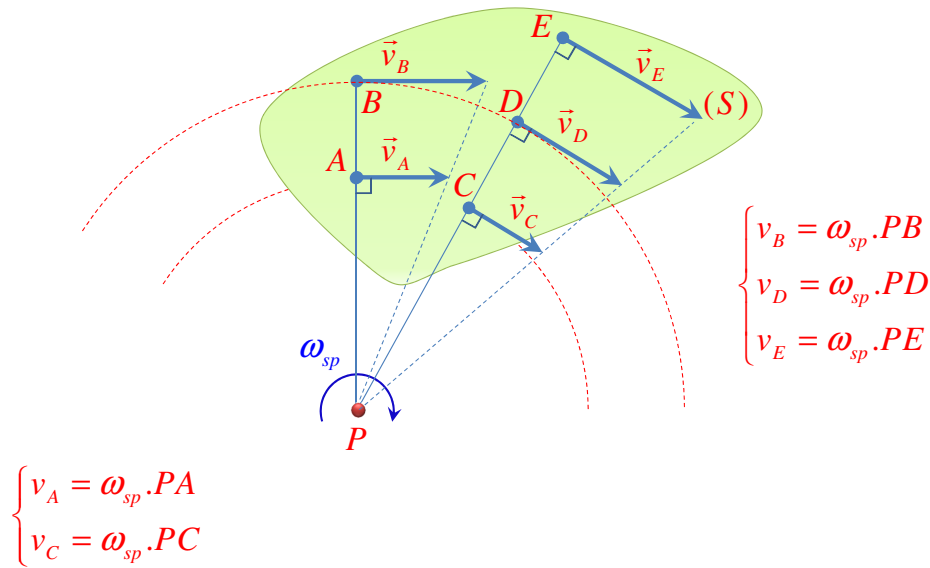
Vật chuyển động tịnh tiến tức thời $\vec{v}_A = \vec{v}_B$



TH3: Đĩa tròn lăn không trượt trên vật cố định



b. Phân bố vận tốc khi biết tâm vận tốc tức thời P:

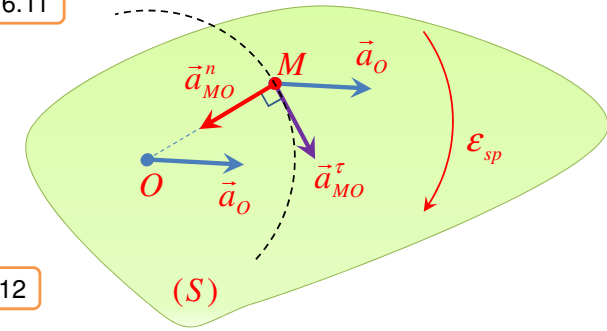


a. Định lý: Gia tốc của điểm M thuộc (S) chuyển động song phẳng bằng tổng hình học gia tốc của điểm cực O và gia tốc của điểm M trong chuyển động quay tương đối của hình phẳng (S) quanh điểm cực O.

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}_{MO}^r + \vec{a}_{MO}^n \quad 6.11$$

$$\vec{a}_{MO}^n \begin{cases} \in MO, M \rightarrow O \\ a_{MO}^n = \omega_{sp}^2 \cdot MO \end{cases} \quad 6.12$$

$$\vec{a}_{MO}^r \begin{cases} a_{MO}^r(t) = \ddot{s}_r(t) = \varepsilon_{sp}(t) \cdot MO \\ \perp MO, \text{ theo chiều } \varepsilon_{sp} \text{ đối với O} \\ a_{MO}^r = \varepsilon_{sp} \cdot MO \end{cases} \quad 6.13$$

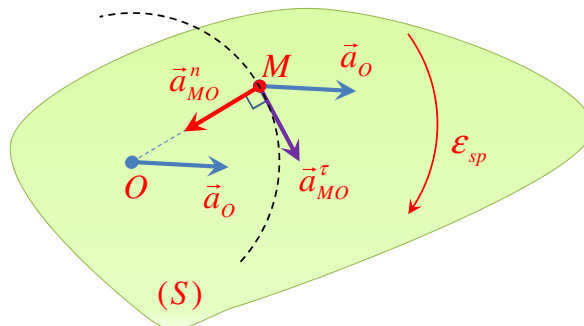


3. Sự liên hệ gia tốc của hai điểm thuộc vật rắn

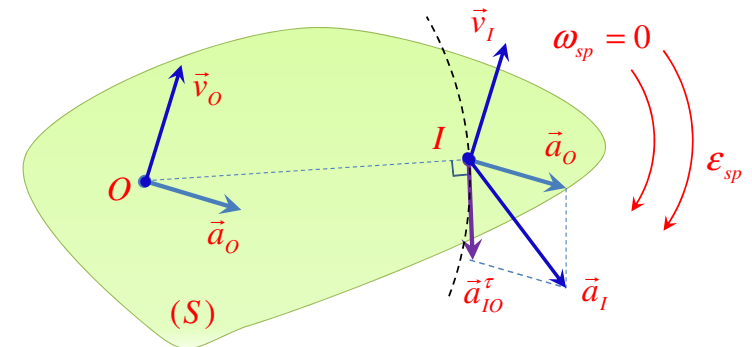
* Theo sơ đồ toán: $\vec{a}_M = \vec{a}_M^r + \vec{a}_M^e + \vec{a}_M^c$

- $\vec{a}_M^c = \vec{0}$
- $\vec{a}_M^e = \vec{a}_O$
- $\vec{a}_M^r = \vec{a}_{MO}^r + \vec{a}_{MO}^n$

Do đó: $\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}_{MO}^r + \vec{a}_{MO}^n$



* Lưu ý khi vật chuyển động tịnh tiến tức thời:



+ Vận tốc tại các điểm là như nhau:

$$\vec{v}_I = \vec{v}_O + \vec{v}_{IO} \xrightarrow{\omega_{sp}=0 \Rightarrow v_{IO}=0} \vec{v}_I = \vec{v}_O, \forall I$$

+ Gia tốc mọi điểm bằng nhau **khi và chỉ khi** $\varepsilon_{sp} = 0$:

$$\vec{a}_I = \vec{a}_O + \vec{a}_{IO}^n + \vec{a}_{IO}^r \xrightarrow[\varepsilon_{sp}=0 \Rightarrow a_{IO}^r=0]{\omega_{sp}=0 \Rightarrow a_{IO}^n=0} \vec{a}_I = \vec{a}_O, \forall I$$



BÀI TẬP CHƯƠNG 6 SINH VIÊN CẦN GIẢI QUYẾT

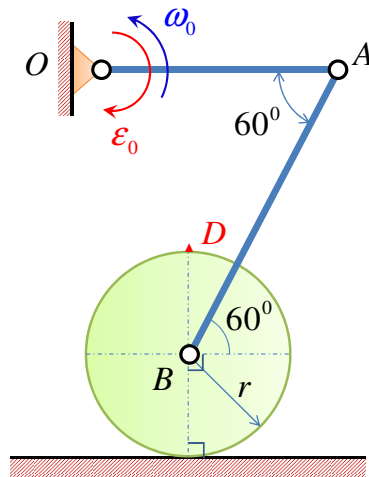
Các đại lượng cần tìm trong bài toán song phẳng

- Tìm vận tốc góc hình phẳng, tìm vận tốc của điểm bất kỳ thuộc vật phẳng.
- Tìm gia tốc góc hình phẳng, tìm gia tốc của điểm bất kỳ thuộc vật phẳng.

Bài tập 6.1

Cho cơ cấu sau, tại thời điểm khảo sát, tay quay OA có $\omega_0 = 1$ (rad/s), $\varepsilon_0 = 1$ (rad/s²), OA = 3r = 3 (m), AB = 4 (m), bánh xe B lăn không trượt trên đường ngang cố định. Thanh OA song song với mặt đường lăn của bánh xe, yêu cầu xác định:

1. $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_D$
2. $\omega_{AB}, \omega_{b.xe}$
3. $\vec{a}_A, \vec{a}_B, \varepsilon_{AB}, \varepsilon_{bx}$



* OA chuyển động quay quanh O

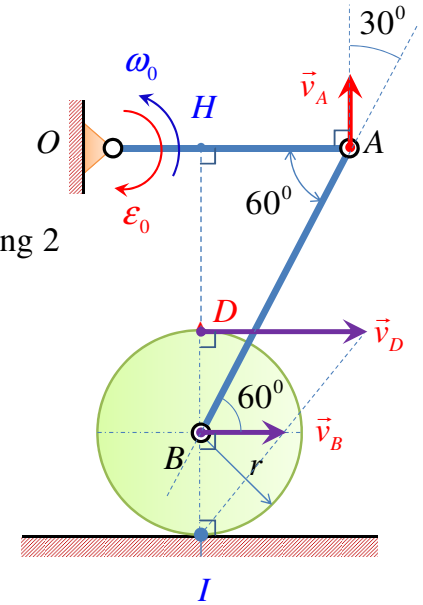
$$\vec{v}_A \left\{ \begin{array}{l} \text{Có chiều như hình vẽ} \\ v_A = \omega_0 \cdot OA = 3 \text{ (m/s)} \end{array} \right.$$

* AB chuyển động song phẳng:

Để xác định vận tốc tại B, ta có thể dùng 2 dạng công thức:

+ Công thức chiếu

$$\vec{v}_B \left\{ \begin{array}{l} \text{Có chiều như hình vẽ} \\ v_B = \frac{v_A \cdot \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 3\sqrt{3} \text{ (m/s)} \end{array} \right.$$

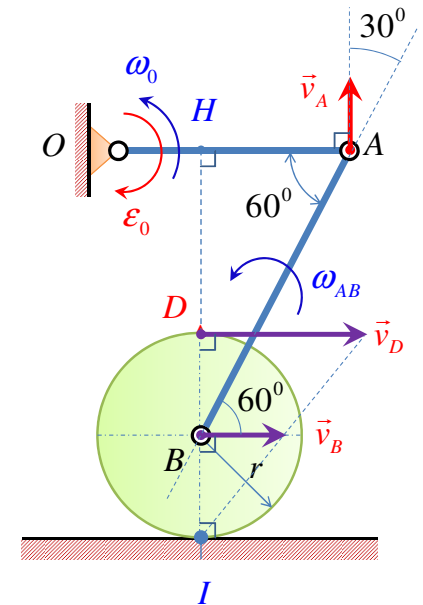


+ Tâm vận tốc tức thời là H

$$\vec{\omega}_{AB} \left\{ \begin{array}{l} \text{Có chiều như hình vẽ} \\ \omega_{AB} = \frac{v_A}{HA} = \frac{3}{2} \text{ (rad/s)} \end{array} \right.$$



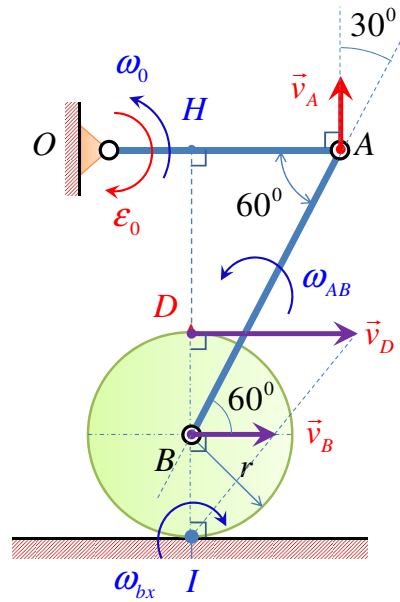
$$\vec{v}_B \left\{ \begin{array}{l} \text{Có chiều như hình vẽ} \\ v_B = \omega_{AB} \cdot HB = 3\sqrt{3} \text{ (m/s)} \end{array} \right.$$



* Bánh xe chuyển động song phẳng với tâm vận tốc tức thời là I:

Có chiều như hình vẽ
 $\vec{v}_D \left\{ \begin{aligned} v_D = 2 \cdot v_B = 6\sqrt{3} \text{ (m/s)} \end{aligned} \right.$

Có chiều như hình vẽ
 $\vec{\omega}_{bx} \left\{ \begin{aligned} \omega_{bx} = \frac{v_B}{r} = 3\sqrt{3} \text{ (rad/s)} \end{aligned} \right.$



* AB chuyển động song phẳng, trong đó phương của gia tốc tại B đã biết. Chọn A làm cực:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n$$

$$\Rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n \quad (*)$$

+ Chiếu (*) lên trục AB:

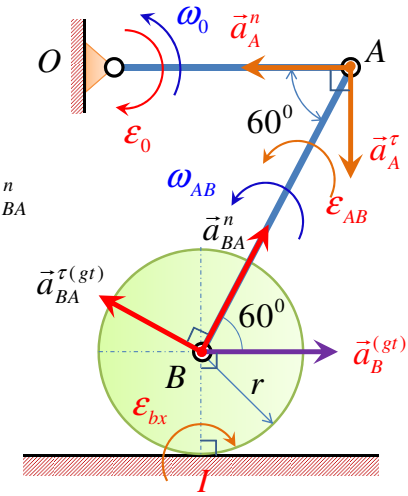
$$-\vec{a}_B \cdot \cos 60^\circ = a_A^\tau \cdot \cos 30^\circ + a_A^n \cdot \cos 60^\circ - a_{BA}^n$$

$$\Rightarrow \vec{a}_B = \frac{a_{BA}^n}{\cos 60^\circ} - a_A^\tau \cdot \tan 60^\circ - a_A^n$$

$$\Rightarrow \vec{a}_B = \frac{\omega_{AB}^2 \cdot AB}{\cos 60^\circ} - a_A^\tau \cdot \tan 60^\circ - a_A^n$$

$$\Rightarrow \vec{a}_B = 3(5 - \sqrt{3}) \text{ (m/s}^2\text{)} > 0$$

Có chiều như đã giả thiết
 $\Rightarrow \vec{a}_B \left\{ \begin{aligned} a_B = 3(5 - \sqrt{3}) \text{ (m/s}^2\text{)} \end{aligned} \right.$

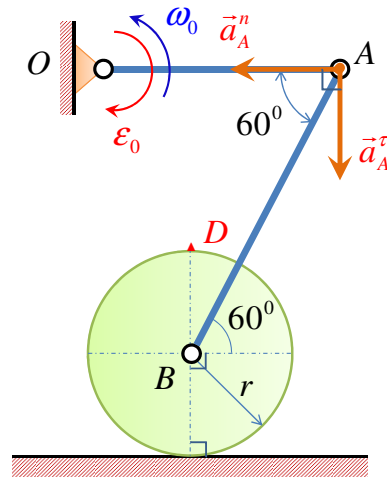
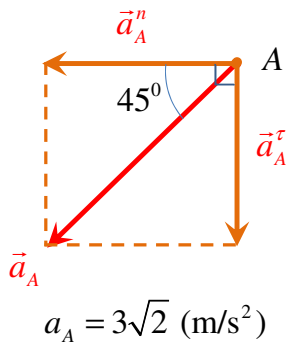


* OA chuyển động quay quanh O

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n$$

$\vec{a}_A^\tau, \vec{a}_A^n$ có chiều như hình vẽ

$$\left\{ \begin{aligned} a_A^\tau &= \epsilon_0 \cdot OA = 3 \text{ (m/s}^2\text{)} \\ a_A^n &= \omega_0^2 \cdot OA = 3 \text{ (m/s}^2\text{)} \end{aligned} \right.$$



+ Chiếu (*) lên trục thẳng đứng hướng lên:

$$0 = -a_A^\tau + \vec{a}_{BA}^\tau \cdot \cos 60^\circ + a_{BA}^n \cdot \cos 30^\circ$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{BA}^\tau = \frac{a_A^\tau}{\cos 60^\circ} - a_{BA}^n \cdot \tan 60^\circ$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{BA}^\tau = 6 - 9\sqrt{3} \text{ (m/s}^2\text{)} < 0$$

Có chiều ngược với chiều đã giả thiết
 $\Rightarrow \vec{a}_{BA}^\tau \left\{ \begin{aligned} a_{BA}^\tau = 9\sqrt{3} - 6 \text{ (m/s}^2\text{)} \end{aligned} \right.$

+ Gia tốc góc của thanh AB

Có chiều như hình vẽ
 $\vec{\epsilon}_{AB} \left\{ \begin{aligned} \epsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{9\sqrt{3} - 6}{4} \text{ (rad/s}^2\text{)} \end{aligned} \right.$