INTERPOLATION POLYNOMIAL FOR A SET POINTS ON TWO CROSSWISE LINE IN P^3

NỘI SUY ĐA THỨC CHO TẬP ĐIỂM NẰM TRÊN HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU TRONG P^3

Trần Nam Sinh, Phan Quang Như Anh
Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

ABSTRACT: *The basic problem of interpolation theory is to find the least degree of an homogeneous polynomial that vanishes to some specified order at every point of a give finite set. In this paper, we shown formula to computer for the regularity index of graded algebra that is generated by the linear forms dual of the set of points. Then, we determine problem of interpolation polynomial for this case. We determine the least degree of an homogeneous polynomial via the regularity index. The result of this paper is presentation via Theorem 3.2 and Theorem 3.3.*

Keywords: *The regularity index, the interpolation polynomial, the linear forms dual, the least degree, the initial degree.*

TÓM TẮT: *Vấn đề cơ bản của lý thuyết nội suy đa thức là tìm bậc bé nhất của một đa thức thuần nhất triệt tiêu với số bội k cho một tập điểm hữu hạn. Trong bài báo này chúng tôi chỉ ra công thức tính chỉ số chính quy của đại số phân bậc sinh ra bởi các dạng tuyến tính đối ngẫu, sau đó chúng tôi xác định vấn đề nội suy đa thức cho trường hợp này mà nó xác định được nhờ việc tính chỉ số chính quy. Kết quả của bài báo này được trình bày qua Định lý 3.2 và Định lý 3.3.*

Từ khóa: *Chỉ số chính quy, đa thức nội suy, dạng tuyến tính đối ngẫu, bậc nhỏ nhất, bậc khởi đầu.*

1. GIỚI THIỆU

Cho $Z=\{P_1,...,P_s\}$ là tập điểm trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ và $m_1,...,m_s$ là các số nguyên dương. Vấn đề cơ bản trong lý thuyết nội suy Hermite là xác định bậc bé nhất của một đa thức thuần nhất của vành đa thức triệt tiêu tại mỗi điểm P_i đến m_i lần với mọi $i=1,...,s$. Đây là một vấn đề khó. Trong trường hợp $m_1=...=m_s=k$ thì các đa thức triệt tiêu ít nhất k lần tại mọi điểm của Z tạo thành một iđêan $I_Z^{(k)}$ và được gọi là iđêan lũy thừa hình thức bậc k của iđêan $I_Z=I_Z^{(1)}$ của Z. Vấn đề nội suy ở trên đòi hỏi xác định bậc bé nhất của đa thức thuần nhất khác không thuộc iđêan này, ký hiệu $\alpha\left(I_Z^{(k)}\right)$.

Người ta đã chứng minh được vấn đề này cho các trường hợp mà số điểm bé hơn số biến, đặc biệt với tập $|Z|=n+1$ điểm không suy biến trong $\mathbf{P}^n$ thì

$$\alpha\left(I_Z^{(k)}\right)=\left\lceil\frac{(n+1)k}{n}\right\rceil.$$

Trong trường hợp số điểm nhiều hơn số biến thì kết quả đạt được rất khiêm tốn. Trong [7], Nagel và Trok đã chỉ ra bậc bé nhất của đa thức thuần nhất triệt tiêu tại mọi điểm $P_i, i=1,...,s$ của Z với ít nhất m_i lần cho trường hợp $|Z|=n+2$ điểm tùy ý, không suy biến và trường hợp $|Z|=n+3$ điểm ở vị trí tổng quát trong $\mathbf{P^n}$.

Nếu $|Z|=n+2$ điểm tùy ý không suy biến, đối với vị trí của tập điểm Z có hai khả năng xảy ra hoặc Z ở vị trí tổng quát hoặc có $j+2$ điểm của Z nằm trên j - phẳng. Gọi t là số nguyên bé nhất sao cho có $t+2$ điểm nằm trên $t-$phẳng. Khi đó

$$\alpha\left(I_Z^{(k)}\right)=\left\lceil\frac{(2n+2-t)k}{2n-t}\right\rceil$$

chú ý rằng nếu $t=0$ thì Z nằm ở vị trí tổng quát.

Nếu $|Z|=n+3$ điểm ở vị trí tổng quát, trong [7], Nagel và Trok đã chỉ ra được công thức tính $\alpha\left(I_Z^{(k)}\right)$ như sau:

$\alpha(\mathrm{I}_Z^{(k)})=\left\lceil\frac{(n+2)\,\mathrm{k}}{n}\right\rceil$ nếu n chẵn và k>0,

$\alpha(\mathrm{I}_Z^{(k)})=\left\lceil\frac{(n+1)(\mathrm{n}+3)\,\mathrm{k}}{n^2+2n-1}\right\rceil$ nếu n lẻ và k chia hết cho $\frac{1}{2}(\mathrm{n}^2+2\,\mathrm{n}+1)$

hoặc $k\geq\frac{(\mathrm{n}^2+\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}^2+2\,\mathrm{n}-1)}{2(\mathrm{n}+2)}$.

Cho P là một điểm trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P^n}$ với tọa độ tương ứng là $(a_0:a_1:\ldots:\mathrm{a}_n)$. Ta gọi một dạng tuyến tính ℓ_P đối ngẫu với P nếu ℓ_P có dạng $a_0x_0+a_1x_1+\ldots+\mathrm{a}_n\,x_n$ trong vành đa thức $R=k\left[x_0,\ldots,x_n\right]$ trên trường k. Kết hợp với đối ngẫu Matlis-Macaulay cho ta một mối quan hệ giữa iđêan lũy thừa hình thức $I_Z^{(k)}$ với các iđêan sinh bởi lũy thừa của các dạng tuyến tính đối ngẫu của Z.

Cho $Z=\{P_1,\ldots,P_s\}$ là tập điểm trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P^n}$, gọi $\ell_1,\ldots,\ell_s$ là các dạng tuyến tính đối ngẫu với các điểm của Z. Với mọi số nguyên *d*, *k*-đại số phân bậc $A=R/\left(\ell_1^d,\ldots,\ell_s^d\right)$ là một vành Artin và người ta quan tâm đến hàm Hilbert $h_A(j)=\dim_k\left[A\right]_j$.

Ta xác định bậc lớn nhất của *j* sao cho phần phân bậc $\left[A\right]_j\neq 0$. Số nguyên này được gọi là chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của *A*, ký hiệu là $\operatorname{reg}(A)$. Vấn đề tìm bậc bé nhất của đa thức thuần nhất triệt tiêu tại mọi điểm của Z được suy ra trực tiếp từ việc đánh giá được $\operatorname{reg}(A)$ thông qua Bổ đề 2.1.

Trong bài báo này chúng tôi tính chỉ số chính quy của đại số phân bậc xác định bởi các dạng tuyến tính đối ngẫu của tập 6 điểm nằm trên hai đường thẳng chéo nhau, tiếp theo chúng tôi xác định bậc bé nhất của đa thức thuần nhất đi qua tập điểm này đủ số bội.

2. MỘT SỐ KẾT QUẢ ĐÃ BIẾT

Bổ đề 2.1 ([7, Lemma 3.1]). Cho $\ell_1,\ldots,\ell_{n+2}\in R=k\left[x_0,\ldots,x_n\right]$ là $n+2$ dạng tuyến tính tổng quát. Cho *d* là số nguyên dương và $r=\left\lfloor\frac{(n+1)(\mathrm{d}-1)}{2}\right\rfloor$. Khi đó $\left[R/\left(\ell_1^d,\ldots,\ell_{n+2}^d\right)\right]_{r+1}=0$.

Bổ đề 2.2 ([7, Lemma 3.2]). Cho một số nguyên $d\geq 2$, xét $B=R/\left(x_0^d,\ldots,x_n^d\right)$. Khi đó chỉ số chính quy của B là $r=(n+1)(d-1)$. Hơn nữa, hàm Hilbert của tăng chặt trên đoạn $\left[0,\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor\right]$. Nó đạt giá trị cực đại tại $\frac{r}{2}$ nếu r chẵn và tại $\frac{r-1}{2},\frac{r+1}{2}$ nếu r lẻ.

Bổ đề 2.3 ([7, Theorem 2.1]). Cho $\wp_1,...,\wp_s$ là các ideal của s điểm phân biệt trong P^n các dạng tuyến tính đối ngẫu tương ứng $\ell_1,...,\ell_{n+2}\in R$. Cho $\left(\ell_1^{\alpha_1},...,\ell_s^{\alpha_s}\right)\subset R$. là ideal sinh bởi lũy thừa của các dạng tuyến tính với $\alpha_1,...,\alpha_s$ là các số nguyên dương. Khi đó với mỗi $j\ge -1+\max\{a_1,...,a_s\}$,

$$\dim\left[R/\left(\ell_1^{\alpha_1},...,\ell_s^{\alpha_s}\right)\right]_j=\dim_k\left[\bigcap_{\alpha_i\le j}\wp_i^{j-\alpha_i+1}\right]_j.$$

3. CHỈ SỐ CHÍNH QUY VÀ NỘI SUY ĐA THỨC CHO TẬP ĐIỂM NẰM TRÊN HAI ĐƯỜNG THẲNG

Trong phần này chúng tôi tìm bậc bé nhất của đa thức thuần nhất cho một trường hợp của tập 6 điểm không nằm ở vị trí tổng quát trong P^3. Trong không gian xạ ảnh P^3, xét hai tập hợp điểm $X_1=\{P_1,P_2,P_3\}$ và $X_2=\{P_1',P_2',P_3'\}$ nằm trên hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2.

Trước tiên, ta nhắc lại một số khái niệm về tập điểm trong P^n. Cho $Z=\{P_1,...,P_s\}$ là tập điểm trong không gian xạ ảnh P^n, gọi $\ell_1,...,\ell_s$ là các dạng tuyến tính đối ngẫu với các điểm của Z.

Tập điểm Z được gọi là không suy biến nếu nó không nằm trên một siêu phẳng. Tập Z được gọi là ở vị trí tổng quát nếu không có $j+1$ điểm nào của Z nằm trên j-phẳng. $\ell_1,...,\ell_s$ được gọi là các dạng tuyến tính tổng quát nếu tập điểm $Z=\{P_1,...,P_s\}$ ở vị trí tổng quát.

Kết quả sau đây được sử dụng để chứng minh các kết quả chính của bài báo.

Bổ đề 3.1 ([7, Proposition 3.3]). *Cho $\ell_1,...,\ell_{n+2}\in R=k[x_0,...,x_n]$ là $n+2$ dạng tuyến tính tổng quát. Với mọi số nguyên d thì*

$$\operatorname{reg} R/\left(\ell_1^d,...,\ell_{n+2}^d\right)=\left[\frac{(n+2)(\mathrm{d}-1)}{2}\right].$$

Chứng minh:

Đặt $r=\left[\frac{(n+2)(\mathrm{d}-1)}{2}\right]$, $B=R/(\ell_1^d,\ell_2^d,...,\ell_{n+1}^d)$ và xét ánh xạ bội $\times\ell_{n+2}^d:[B]_{r-d}\to[B]_r$. Hàm Hilbert của B là hàm đối xứng, tức là $h_B(\mathrm{j})=\mathrm{h}_B((\mathrm{n}+1)(\mathrm{d}-1)-\mathrm{j})$, với mọi *j*. Do đó theo Bổ đề 2.2 ta có $h(\mathrm{r}-\mathrm{d})<\mathrm{h}(\mathrm{r})$.

Xét dãy khớp

$$0\to[B]_{r-d}\xrightarrow{\times\ell_{n+2}^d}[B]_r\xrightarrow{p}\left[B/\ell_{n+2}^dB\right]_r\to 0$$

suy ra $h_B(\mathrm{r})=\mathrm{h}_B(\mathrm{r}-\mathrm{d})+\mathrm{h}_{B/\ell_{n+2}^dB}(\mathrm{r})$ hay $h_{B/\ell_{n+2}^dB}(\mathrm{r})=\mathrm{h}_B(\mathrm{r})-\mathrm{h}_B(\mathrm{r}-\mathrm{d})\ne 0$. Vì vậy, $reg(\mathrm{B}/\ell_{n+2}^d\mathrm{B})\ge\mathrm{r}$.

Do $B/l_{n+2}^dB\cong R/(\ell_1^d,\ell_2^d,...,\ell_{n+2}^d)$. Từ Bổ đề 2.1, ta có

$$reg(\mathrm{R}/(\ell_1^d,\ell_2^d,...,\ell_{n+2}^d))=\left[\frac{(\mathrm{n}+2)(\mathrm{d}-1)}{2}\right].$$

Định lý 3.2. *Trong không gian xạ ảnh P^3, xét hai tập hợp điểm*

$X_1 = \{P_1, P_2, P_3\}$ *và* $X_2 = \{P'_1, P'_2 .P'_3\}$ *nằm trên hai đường thẳng chéo nhau* d_1 *và* d_2. *Gọi* $\ell_i, \ell'_j, \mathrm{i}, \mathrm{j} = 1,2,3,$ *là các dạng tuyến tính đối ngẫu của các điểm* $P_i, P'_j, i, j = 1,2,3.$ *Cho* d *là một số nguyên dương. Khi đó*

$$\operatorname{reg} R/\left(\ell_1^d, \ell_2^d, \ell_3^d, \ell_1^{'d}, \ell_2^{'d}, \ell_3^{'d}\right) = 2\left[\frac{3(d-1)}{2}\right].$$

a) d = 2t-1:

$$\operatorname{reg} R/\left(\ell_1^d, \ell_2^d, \ell_3^d, \ell_1^{'d}, \ell_2^{'d}, \ell_3^{'d}\right) = 3d-3.$$

b) d=2t:

$$\operatorname{reg} R/\left(\ell_1^d, \ell_2^d, \ell_3^d, \ell_1^{'d}, \ell_2^{'d}, \ell_3^{'d}\right) = 3d-4.$$

Chứng minh: Xét đường thẳng d_1, bằng phép biến đổi Cremona ta có thể giả sử rằng các điểm P_1, P_2, P_3 là các điểm phụ thuộc tuyến tính sinh ra $P^1 = V(x_2, x_3)$, nghĩa là các dạng tuyến tính đối ngẫu là $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in k[x_0, x_1] = S$. Tương tự, ta cũng có P_1', P_2', P_3' là các điểm phụ thuộc tuyến tính sinh ra $P^1 = V(x_0, x_1)$, nghĩa là các dạng tuyến tính đối ngẫu là $\ell_1', \ell_2', \ell_3' \in k[x_2, x_3] = S'$. Do d_1, d_2 là hai đường thẳng chéo nhau trong P^3 nên ta có

$$R/\left(\ell_1^d, \ell_2^d, \ell_3^d, \ell_1^{'d}, \ell_2^{'d}, \ell_3^{'d}\right)$$
$$\cong S/\left(\ell_1^d, \ell_2^d, \ell_3^d\right) \otimes_k S'/\left(\ell_1^{'d}, \ell_2^{'d}, \ell_3^{'d}\right),$$

suy ra

$$\operatorname{reg}\left(R/\left(\ell_1^d, \ell_2^d, \ell_3^d, \ell_1^{'d}, \ell_2^{'d}, \ell_3^{'d}\right)\right)$$
$$= \operatorname{reg}\left(S/\left(\ell_1^d, \ell_2^d, \ell_3^d\right)\right) + \operatorname{reg}\left(S'/\left(\ell_1^{'d}, \ell_2^{'d}, \ell_3^{'d}\right)\right).$$

Từ Bổ đề 3.1 ta có

$$\operatorname{reg}\left(R/\left(\ell_1^d, \ell_2^d, \ell_3^d, \ell_1^{'d}, \ell_2^{'d}, \ell_3^{'d}\right)\right)$$
$$= \left[\frac{3(d-1)}{2}\right] + \left[\frac{3(d-1)}{2}\right] = 2\left[\frac{3(d-1)}{2}\right].$$

a) Nếu $d = 2t-1$ thì

$$2\left[\frac{3(d-1)}{2}\right] = 2\left[\frac{3(2t-1-1)}{2}\right] = 2\left[\frac{3(2t-2)}{2}\right]$$
$$= 2[3(\mathrm{t}-1)] = 6t-6 = 3d-3$$

b) Nếu $d = 2t$ thì

$$2\left[\frac{3(d-1)}{2}\right] = 2\left[\frac{3(2t-1)}{2}\right] = 2\left[\frac{6t-3}{2}\right]$$
$$= 2\left[3t-2+\frac{1}{2}\right] = 2(3\mathrm{t}-2) = 3\mathrm{d}-4$$
$$= 2\left[3t-2+\frac{1}{2}\right] = 2(3\mathrm{t}-2) = 3\mathrm{d}-4.$$

Định lý 3.2 đã được chứng minh □

Bây giờ, xét $Z = \{P_1, ..., P_s\}$ là tập điểm trong không gian xạ ảnh P^n. Gọi $\wp_1, ..., \wp_s$ là các ideal nguyên tố thuần nhất xác định bởi các điểm $P_j, j = 1, ..., s$. Cho $m_1, ..., m_s$ là các số nguyên dương, ideal $I = \wp_1^{m_1} \cap ... \cap \wp_s^{m_s}$ gồm các đa thức $f \in R$ triệt tiêu tại P_j với số bội $\geq m_j$ lần. $I = \oplus_{j \geq 0} I_j$ là một ideal phân bậc, gọi t là số nguyên bé nhất sao cho $I_t \neq 0$ thì bậc bé nhất của đa thức thuần nhất triệt tiêu tại mọi điểm của Z với bội lớn hơn bằng $m_j, j = 1, ..., s$ được gọi là bậc khởi của một ideal thuần nhất của $I \neq 0$, ký hiệu $\alpha(I)$, tức là

$$\alpha(I) = min\{j \in Z | [I]_j \neq 0\}.$$

Từ Bổ đề 2.1 ta thấy được mối quan hệ giữa $\operatorname{reg}(A)$ và $\alpha(I)$. Vì vậy, nếu tính được $\operatorname{reg}(A)$ ta xác định được bậc bé nhất của đa thức thuần nhất đi qua các điểm của Z với số bội tương ứng.

Tiếp theo, chúng ta tìm bậc bé nhất của đa thức thuần nhất đi qua các điểm đủ số bội trong P^3.

Định lý 3.3. Trong không gian xạ ảnh P^3, xét hai tập hợp điểm $X_1 = \{P_1, P_2, P_3\}$ và $X_2 = \{P_1', P_2', P_3'\}$ nằm trên hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2.

Xét tập điểm $Z = \{P_1, P_2, P_3, P_1', P_2', P_3'\}$. Khi đó với mọi số nguyên $k > 0$,

$$\alpha\left(I_Z^{(k)}\right) \leq \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil.$$

Chứng minh.

Từ Bổ đề 2.3 ta có

$$\left[R/\left(\ell_1^d, \ell_2^d, \ell_3^d, \ell_1'^d, \ell_2'^d, \ell_3'^d\right)\right]_j \cong \left[I_Z^{(j+1-d)}\right]_j \ (1).$$

(i) Nếu $d = 2t$ thì $reg(R/(\ell_1^d, \ell_2^d, \ell_3^d, \ell_1'^d, \ell_2'^d, \ell_3'^d)) = 3d - 4$.

Từ (1) và Bổ đề 2.1 ta có $j \leq 3d - 4$ (2), thì $\left[I_Z^{(j+1-d)}\right]_j \neq 0$. Đặt k = *j+1-d* hay *d=j+1-k*. Từ (2) suy ra $j \leq 3(j+1-k) - 4 \Leftrightarrow j \geq \frac{3k+1}{2}$. Vậy $\alpha(I_Z^{(k)}) = \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil$.

(ii) Nếu *d = 2t-1* thì $reg(R/(\ell_1^d, \ell_2^d, \ell_3^d, \ell_1'^d, \ell_2'^d, \ell_3'^d)) = 3d - 3$.

Từ (1) và Bổ đề 2.1 ta có $j \leq 3d - 3$ (3), thì $\left[I_Z^{(j+1-d)}\right]_j \neq 0$. Đặt *k=j + 1-d* hay *d=j+1-k.* Từ (3) suy ra $j \leq 3(j+1-k) - 3 \Leftrightarrow j \geq \frac{3k}{2}$. Vậy, $\alpha(I_Z^{(k)}) = \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil$.

Định lý 3.3 đã được chứng minh. □

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] C. Bocci, B. Harbourne, (2010), Comparing power and symbolic power of ideals. *J. Algebra Geom,* **19**, 399-417.

[2] B. Harbourne, (2001), On Nagata's conjecture. *J. Algebra,* **236**, 692-702.

[3] D. Eisenbud, (2005), *The geometry of syzygies,* Graduate Text in Mathematics, **299**, Springer, New York.

[4] J. Emsalem and Iarrobino, (1995), Inverse system of a symbolic power I, *J. Algebraic*, **174**, 1080-1090.

[5] T. Harima, J. Miglione, U. Nagel and J. Watanabe, (2003), The weak and strong Lefschetz properties for Artinian K-Algebra, J. Algebra, **262**, *J. Pure Appl. Algebra*, 161, 99-126.

[6] J. Migliore, R. Miro-Roig and U. Nagel, (2012), On the weak Lefschetz property for power of linear form, Algebra Number Theory 6, 487-526.

[7] U. Nagel and B. Trok, (2019), Interpolation and the weak Lefschetz property, *Trans. Amer. Math. Soc,* **372**, 8849-8870.

Liên hệ:

TS. Trần Nam Sinh

Khoa Toán học, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

Địa chỉ: 459 Tôn Đức Thắng, Quận Liên Chiểu, TP. Đà Nẵng

Email: trannamsinh80@gmail.com

Ngày nhận bài: 12/6/2021

Ngày gửi phản biện: 15/6/2021

Ngày duyệt đăng: 17/12/2021