CHƯƠNG 8

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT[1]

8.1. KHÁI NIỆM:

Các đặc trưng của mẫu ngoài việc sử dụng để ước lượng các đặc trưng của tổng thể còn được dùng để đánh giá xem một giả thuyết nào đó của tổng thể là đúng hay sai. Việc tìm ra kết luận để bác bỏ hay chấp nhận một giả thuyết gọi là kiểm định giả thuyết.

Ví dụ:

1. Một nhà sản xuất cho rằng trọng lượng trung bình của 1 gói mì là 75g. Để kiểm tra điều này là đúng hay sai, chọn ngẫu nhiên một số gói mì ra để kiểm tra, tính toán.

2. Một nhà sản xuất cho rằng tỷ lệ phế phẩm là 5%. Để kiểm tra điều này là đúng hay sai, chọn ngẫu nhiên một số sản phẩm ra để kiểm tra, tính toán.

3. Một nhà quản trị Marketing muốn kiểm tra giả thuyết: "doanh thu của công ty tăng trung bình ít nhất là 7% sau đợt quảng cáo". Để kiểm tra điều này là đúng hay sai bằng cách liệt kê doanh thu trước và sau chiến dịch quảng cáo để tính toán.

8.2. GIẢ THUYẾT H_0 VÀ GIẢ THUYẾT H_1

8.2.1. Giả thuyết H_0[2]:

Giả sử tổng thể chung có đặc trưng θ chưa biết (như trung bình, tỷ lệ, phương sai). Với giá trị θ_0 cụ thể cho trước nào đó, ta cần kiểm định giả thuyết $H_0 : \theta = \theta_0$ (kiểm định hai bên) hoặc giả thuyết là một dãy giá trị, lúc đó : $H_0 : \theta \geq \theta_0$ hoặc: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ (kiểm định một bên).

8.2.2. Giả thuyết H_1[3]:

Giả thiết H_1 là kết quả ngược lại của giả thuyết H_0; nếu giả thuyết H_0 đúng thì giả thuyết H_1 sai và ngược lại. H_1 còn được gọi là giả thuyết đối.

---

[1] Hypothesis testing

[2] Null hypothesis

[3] Alternative hypothesis

Vậy cặp giả thuyết H_0 và H_1 được thể hiện trong các trường hợp kiểm định như sau:

- Trong trường hợp kiểm định hai bên [1]

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

- Trong trường hợp kiểm định một bên[2]

$$\begin{cases} H_0 : \theta \geq \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases}$$

$$\text{hoặc: } \begin{cases} H_0 : \theta \leq \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$$

Ví dụ: Một nhà sản xuất cho rằng trọng lượng trung bình của một gói mì là 75gam, để kiểm tra lời tuyên bố này là đúng hay sai ta có thể đặt giả thuyết :

$$\begin{cases} H_0 : \theta = 75 \\ H_1 : \theta \neq 75 \end{cases}$$

8.2.3. Sai lầm loại 1 [3] và sai lầm loại 2 [4]:

Vì chỉ dựa trên một mẫu để kết luận đến các giá trị của tổng thể, nên ta có thể phạm sai lầm khi đưa ra kết luận về giả thuyết H_0. Các sai lầm đó là:

1. Giả thuyết H_0 đúng (tức thực tế $\theta = \theta_0$) nhưng qua kiểm định ta kết luận giả thuyết sai tức là $\theta \neq \theta_0$, và do vậy ta bác bỏ H_0.

2. Giả thuyết H_0 sai nhưng qua kiểm định ta kết luận giả thuyết đúng và do vậy ta chấp nhận giả thuyết H_0.

Người ta quy ước gọi sai lầm ở trường hợp 1 là sai lầm loại I tức là bác bỏ giả thuyết H_0 khi giả thuyết này đúng, còn sai lầm ở trường hợp 2 là sai lầm loại 2 tức là chấp nhận giả thuyết H_0 khi giả thuyết này sai. Như vậy khi ta bác bỏ một giả thuyết là ta có thể mắc phải sai lầm loại I, còn khi ta chấp nhận một giả thuyết là ta có thể phạm phải sai lầm loại II . Thực ra

---

[1] Two- tail test

[2] One- tail test

[3] Type I error

[4] Type II error

sai lầm loại 1 và loại 2 rất tương đối, nó chỉ được xác định khi ta đã đặt giả thuyết H_0 và thông thường sai lầm nào gây ra tổn thất lớn hơn người ta sẽ đặt giả thuyết H_0 sao cho sai lầm đó là loại 1 và định trước khả năng mắc phải sai lầm loại 1 không vượt quá một số α nhỏ nào đó, tức là thực hiện kiểm định giả thuyết H_0 ở mức ý nghĩa α cho trước. Nếu α càng bé thì khả năng phạm phải sai lầm loại I càng ít, tuy nhiên trong trường hợp này xác suất sai lầm loại II sẽ tăng lên. Chẳng hạn nếu lấy $\alpha = 0$ thì sẽ không bác bỏ bất kỳ giả thuyết nào, có nghĩa là không mắc phải sai lầm loại 1 và như vậy xác suất sai lầm loại II sẽ đạt cực đại.

Nếu quyết định xác suất bác bỏ giả thuyết H_0 khi giả thuyết này đúng là α thì xác suất để chấp nhận nó là $(1 - \alpha)$. Người ta gọi α là mức ý nghĩa của kiểm định[1].

Ngược lại với sai lầm loại 1, sai lầm loại II là loại sai lầm của việc chấp nhận giả thuyết H_0 khi giả thuyết này sai. Nếu xác suất của việc quyết định chấp nhận một giả thuyết H_0 sai được ký hiệu là β thì xác suất để bác bỏ giả thuyết này là $(1 - \beta)$.

Những quyết định dựa trên giả thuyết H_0 được tóm tắt như sau:

	Giả thuyết H_0 đúng	**Giả thuyết H_0 sai**
1. Chấp nhận giả thuyết H_0	Xác suất quyết định đúng là $(1 - \alpha)$	Xác suất sai lầm loại 2 là β
2. Bác bỏ giả thuyết H_0	Xác suất sai lầm loại 1 là α	Xác suất quyết định đúng là $(1 -\beta)$

Ví dụ: Một nhà kinh doanh sau khi áp dụng các biện pháp khuyến mãi muốn tìm hiểu xem lợi nhuận có tăng lên hay không. Để thực hiện việc kiểm định giả thuyết ta xét các trường hợp cho trong bảng sau:

[1] Significance level

Giả thuyết H_o	Thực tế	Bác bỏ giả thuyết H_o	Chấp nhận giả thuyết H_o
"Lợi nhuận có tăng"	Lợi nhuận có tăng	Mắc sai lầm loại I Xác suất = α	Kết luận đúng Xác suất = $1-\beta$
	Lợi nhuận không tăng	Kết luận đúng Xác suất = $1-\alpha$	Mắc sai lầm loại II Xác suất = β
"Lợi nhuận không tăng"	Lợi nhuận có tăng	Kết luận đúng Xác suất = $1-\alpha$	Mắc sai lầm loại II Xác suất = β
	Lợi nhuận không tăng	Mắc sai lầm loại I Xác suất = α	Kết luận đúng Xác suất = $1-\beta$

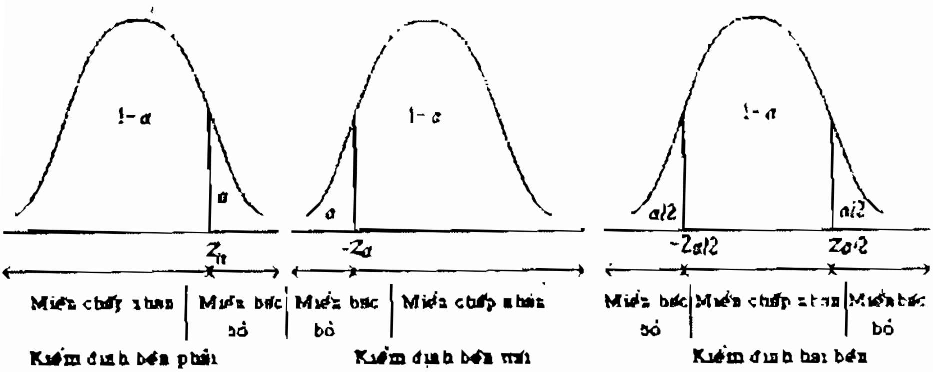
Ở đây ta nên đặt giả thuyết như thế nào? Muốn vậy người ta phải xem xét sai lầm nào quan trọng hơn, tức là khi mắc phải sẽ chịu tổn thất lớn hơn và sẽ đặt bài toán để sai lầm đó là sai lầm loại I. Rõ ràng lợi nhuận không tăng mà bảo có là sai lầm "nghiêm trọng" hơn sai lầm: lợi nhuận có tăng mà bảo không. Do vậy nên đặt giả thuyết H_o: "Lợi nhuận không tăng".

Trong thực tế đôi khi người ta kiểm định giả thuyết với giả thuyết đối dạng $\theta > \theta_o$ hoặc $\theta < \theta_o$. Nếu bằng kinh nghiệm hoặc qua phân tích ta biết được chiều hướng là $\theta > \theta_o$ thì ta có thể đặt giả thuyết đối dạng $\theta > \theta_o$, hoặc ta biết được chiều hướng $\theta < \theta_o$ thì ta có thể đặt giả thuyết đối dạng $\theta < \theta_o$.

Nếu giả thuyết đối có dạng $H_1 : \theta > \theta_o$ thì được gọi là kiểm định bên phải (Vì miền bác bỏ nằm về phía bên phải của miền chấp nhận).

Nếu giả thuyết đối có dạng $H_1 : \theta < \theta_o$ thì được gọi là kiểm định bên trái (Vì miền bác bỏ nằm về phía bên trái của miền chấp nhận).

Nếu giả thuyết đối có dạng $H_1 : \theta \neq \theta_o$ thì được gọi là kiểm định hai bên (Vì miền bác bỏ nằm về hai phía của miền chấp nhận).



Hình 8.1 Miền bác bỏ, miền chấp nhận trong kiểm định

Ví dụ: Một công ty sau khi áp dụng các biện pháp khuyến mãi muốn nghiên cứu xem mức lợi nhuận có tăng lên hay không. Trước khi áp dụng các biện pháp khuyến mãi lợi nhuận trung bình của công ty trong ngày là 10 triệu đồng.

Ở đây ta nên đặt giả thuyết H_0 như thế nào? Rõ ràng bằng kinh nghiệm ta thấy việc áp dụng các biện pháp khuyến mãi sẽ làm tăng lợi nhuận. Do vậy ta đặt giả thuyết đối H_1 : "Lợi nhuận trung bình > 10 triệu đồng" và ta có giả thuyết.

H_0 : " Lợi nhuận trung bình ≤ 10 triệu đồng"

H_1 : " Lợi nhuận trung bình > 10 triệu đồng"

Dĩ nhiên để kiểm định giả thuyết trên ta phải thu thập số liệu trên mẫu để tính toán.

8.3. KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT VỀ TỶ LỆ TỔNG THỂ:

Giả sử tổng thể chia hai loại phần tử. Tỷ lệ phần tử có tính chất A là p chưa biết. Gọi $\hat{p}$ là tỷ lệ các đơn vị có tính chất A trong mẫu. Với mẫu lớn, $n \geq 40$, tỷ lệ mẫu $\hat{p}$ có phân phối chuẩn. Kiểm định giả thuyết về p được thực hiện như sau:

- Đặt giả thuyết: Có thể thực hiện theo 1 trong 3 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $H_0 : p = p_0$ (p_0 là giá trị cho trước)

$H_1 : p \neq p_0$

Trường hợp 2: $H_0 : p = p_0$ hoặc $H_0: p \geq p_0$

$H_1 : p < p_0$

Trường hợp 3: $H_0 : p = p_0$ hoặc $H_0: p \leq p_0$

$H_1 : p > p_0$

- Tính giá trị của tiêu chuẩn kiểm định (gọi tắt là giá trị kiểm định):

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_o(1-p_o)}{n}}} \qquad (8.1)$$

- Quy tắc kiểm định: Được tóm tắt trong bảng sau:

Giả thuyết	Bác bỏ Ho khi:
$H_o: p = p_o$ $H_1: p \neq p_o$	$z > z_{\alpha/2}$ hoặc $z < -z_{\alpha/2}$ Hay $\lvert z \rvert > z_{\alpha/2}$
$H_o: p = p_o$ hoặc Ho: $p \geq p_0$ $H_1: p < p_o$	$z < -z_\alpha$
$H_o: p = p_o$ hoặc Ho: $p \leq p_0$ $H_1: p > p_o$	$z > z_\alpha$

Giả sử ta có kiểm định hai bên: $H_o: p = p_o$ (p_o là giá trị cho trước)

$H_1: p \neq p_o$

Ta thực hiện như sau:

Từ α đã biết ta tìm $z_{\alpha/2}$ bằng cách tra bảng hoặc dùng hàm **NORMSINV** trong EXCEL

+ Nếu $\lvert z \rvert \leq z_{\alpha/2}$ ta chấp nhận giả thuyết, coi $p = p_o$.

+ Nếu $\lvert z \rvert > z_{\alpha/2}$ ta bác bỏ giả thuyết, coi $p \neq p_o$.

Và khi đó: - nếu $\hat{p} > p_o$ ta xem $p > p_o$.

- nếu $\hat{p} < p_o$ ta xem $P < P_o$.

Ví dụ: Một nhà máy sản xuất sản phẩm với tỷ lệ sản phẩm loại 1 lúc đầu là 0,20. Sau khi áp dụng phương pháp sản xuất mới, kiểm tra 500 sản phẩm thấy số sản phẩm loại 1 là 150 sản phẩm. Cho kết luận về phương pháp sản xuất mới này với mức ý nghĩa α = 1%.

Giải

Tỷ lệ sản phẩm loại 1 lúc đầu là $p_o = 0,2$.

Tỷ lệ sản phẩm loại 1 khi áp dụng phương pháp mới là p chưa biết:

- Ta đặt giả thuyết: $H_0 : p = p_0 = 0,2$

$H_1 : p \neq p_0 = 0,2$

- Kiểm tra giả thuyết:

Giá trị kiểm định : $$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Ta có : $$\hat{p} = \frac{150}{500} = 0,3; \quad n = 500; \quad z_{0,005} = 2,58$$

$$z = \frac{0.3 - 0.2}{\sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{500}}} \approx 5,59$$

vì $|z| = 5,59 > z_{\alpha/2} = 2,58$ nên ta bác bỏ giả thuyết tức là $p \neq p_0 = 0,2$ nghĩa là phương pháp sản xuất mới đã làm thay đổi tỷ lệ sản phẩm loại 1. Do $\hat{p} = 0,3 > p_0 = 0,2$ nên $p > p_0 = 0,2$. Vậy phương pháp sản xuất mới có hiệu quả tốt.

Thực ra với giá trị kiểm định tính được khá lớn, giả thuyết Ho bị bác bỏ ở hầu hết các mức ý nghĩa α cho trước.

8.4. KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT VỀ TRUNG BÌNH TỔNG THỂ CHUNG:

Giả sử tổng thể có trung bình là μ chưa biết. Ta cần kiểm tra giả thuyết :

H_0: $\mu = \mu_0$ (μ_0 cho trước).

H_1: $\mu \neq \mu_0$

Căn cứ vào mẫu gồm n quan sát độc lập ta đưa ra quy tắc chấp nhận hay bác bỏ giả thuyết trên với mức ý nghĩa α.

Ta chia thành hai trường hợp:

a) $n \geq 30$:

a1) σ^2 đã biết; Ta tính giá trị kiểm định:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad (8.2)$$

Dựa vào α ta tìm $z_{\alpha/2}$.

Nếu $|z| > z_{\alpha/2}$ ta bác bỏ giả thuyết.

Nếu $|z| \le z_{\alpha/2}$ ta chấp nhận giả thuyết.

a2) σ^2 chưa biết: Ta thay $\sigma^2 = s^2$ (phương sai hiệu chỉnh mẫu).

b) n < 30:

b1) X có phân phối chuẩn; σ^2 đã biết; ta làm giống như trường hợp a1

b2) X có phân phối chuẩn, σ^2 chưa biết:

Ta tính giá trị kiểm định:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \tag{8.3}$$

và tìm $t_{n-1,\alpha/2}$ trong bảng phân phối t student hoặc dùng hàm **TINV** trong EXCEL

+ Nếu $|t| > t_{n-1,\alpha/2}$ ta bác bỏ giả thuyết.

+ Nếu $|t| \le t_{n-1,\alpha/2}$ ta chấp nhận giả thuyết.

Chú ý: trong tất cả các trường hợp trên nếu giả thuyết đã bị bác bỏ, tức là $\mu \ne \mu_0$ khi đó:

- Nếu $\overline{x} > \mu_0$ ta kết luận $\mu > \mu_0$.
- Nếu $\overline{x} < \mu_0$ ta kết luận $\mu < \mu_0$.

Trên đây là trường hợp kiểm định hai bên, trong trường hợp kiểm định một bên với $n \ge 30$, ta có bảng tóm tắt sau:

Giả thuyết	Bác bỏ Ho khi:
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \ne \mu_0$	$z > z_{\alpha/2}$ hoặc $z < -z_{\alpha/2}$ Hay $|z| > z_{\alpha/2}$
$H_0: \mu = \mu_0$ hoặc Ho: $\mu \ge \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$z < -z_\alpha$
$H_0: \mu = \mu_0$ hoặc Ho: $\mu \le \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$z > z_\alpha$

Trường hợp kiểm định một bên với n < 30, σ^2 chưa biết, ta có bảng tóm tắt sau:

Giả thuyết	Bác bỏ Ho khi:
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$t > t_{n-1,\alpha/2}$ hoặc $t < -t_{n-1,\alpha/2}$ Hay $\|t\| > t_{n-1,\alpha/2}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ hoặc Ho: $\mu \geq \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$t < -t_{n-1,\alpha}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ hoặc Ho: $\mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$t > t_{n-1,\alpha}$

Ví dụ 1: Một máy đóng mì gói tự động quy định trọng lượng trung bình là $\mu_0 = 75g$, độ lệch chuẩn là $\sigma = 15g$. Sau một thời gian sản xuất kiểm tra 80 gói ta có trọng lượng trung bình mỗi gói là 72g. Cho kết luận về tình hình sản xuất với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$.

Giải

Trọng lượng trung bình quy định cho mỗi gói mì là $\mu_0 = 75g$.

Trọng lượng trung bình thực tế sản xuất là μ chưa biết.

- Ta đặt giả thuyết: $H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

- Kiểm tra giả thuyết:

$$n = 80 > 30;\ \sigma = 15;\ \alpha = 5\% \Rightarrow z_{\alpha/2} = z_{2,5\%} = 1,96$$

Giá trị kiểm định:

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{72 - 75}{\frac{15}{\sqrt{80}}} \approx -1,79$$

Vì $|z| = 1,79 < 1,96$ nên ta chấp nhận giả thuyết H_0, tức là sản xuất diễn ra bình thường.

Giá trị p[1] **:**

Giả sử trong ví dụ trên ta kiểm định giả thuyết H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 10\%$, ta có cùng kết luận như trên không?

Nếu $\alpha = 10\% \Rightarrow z_{\alpha/2} = z_{5\%} = 1{,}645 < z = 1{,}79$ ta bác bỏ giả thuyết H_0. Như vậy có một vấn đề đặt ra ở đây là xác định mức ý nghĩa nhỏ nhất mà ở đó giả thuyết H_0 bị bác bỏ. Mức ý nghĩa nhỏ nhất đó gọi là giá trị p.

Trở lại ví dụ trên với giá trị kiểm định $z = 1{,}79$ như vậy giả thuyết H_0 bị bác bỏ ở bất cứ giá trị nào của α mà ở đó $z_\alpha < 1{,}79$.

Cụ thể ta tìm giá trị p bằng cách tra bảng z, ta có kết quả như sau:

$$\varphi(1{,}79) = 0{,}4633 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}5 - 0{,}4633 = 0{,}0367$$

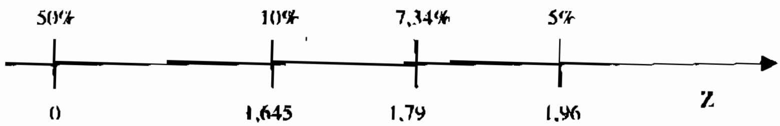
$$\alpha = 2 \times 0{,}0367 = 7{,}34\%$$

Do vậy, giả thuyết H_0 sẽ bị bác bỏ ở bất kỳ mức ý nghĩa α nào lớn hơn 7,34%.

Ta cũng có thể tính p-value bằng cách dùng hàm **NORMSDIST** trong EXCEL

Ta có : p-value = P(Z > 1,79) = P(Z < -1,79) = **1- NORMSDIST(1.79)** = 0,0367269

Ta có sơ đồ sau:



Hình 8.1 Miền chấp nhận, miền bác bỏ theo p-value

Trong thực tế việc tính toán được thực hiện bằng các phần mềm thống kê, các kết quả xử lý số liệu bằng máy tính thường luôn thể hiện giá trị p.

Nếu qui định trước mức ý nghĩa α thì có thể dùng p-value để kết luận theo α. Khi đó nguyên tắc kiểm định như sau:

- Nếu p-value < α thì bác bỏ Ho, thừa nhận H_1.
- Nếu p-value $\geq \alpha$ thì chưa có cơ sở để bác bỏ Ho.

---

[1] Probability value (p-value)

Ngoài ra người ta cũng có thể kiểm định giả thuyết theo p-value và được tiến hành theo nguyên tắc sau:

- Nếu p-value > 0,1 thì thường người ta chấp nhận Ho.
- Nếu 0,05 < p-value ≤ 0,1 thì cần cân nhắc cẩn thận trước khi bác bỏ Ho.
- Nếu 0,01 < p-value ≤ 0,05 thì nghiêng về hướng bác bỏ Ho nhiều hơn.
- Nếu 0,001 < p-value ≤ 0,01 thì ít băn khoăn khi bác bỏ Ho nhiều hơn.
- Nếu p-value < 0,001 thì có thể yên tâm khi bác bỏ Ho.

Ví dụ 2: Một nhà máy sản xuất đèn chụp hình cho biết tuổi thọ trung bình của sản phẩm là 100 giờ. Người ta chọn ngẫu nhiên ra 15 bóng thử nghiệm thấy tuổi thọ trung bình là 99,7 giờ, $s^2 = 0,15$.

Giả thuyết tuổi thọ của đèn có phân phối chuẩn. Cho kết luận về tình hình sản xuất của nhà máy với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$.

Giải:

Trung bình quy định là $\mu_0 = 100$ giờ.

Trung bình thực tế sản xuất là μ chưa biết.

- Đặt giả thuyết: $H_0 : \mu = \mu_0$.

$H_1 : \mu \neq \mu_0$.

- Kiểm tra giả thuyết:

$$n = 15 < 30;\ s^2 = 0,15;\ \overline{x} = 99,7,\ \mu_0 = 100,\ t_{14;0,025} = 2,145$$

Giá trị kiểm định:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{99,7 - 100}{\frac{\sqrt{0,15}}{\sqrt{15}}} = 3$$

vì $|t| = 3 > 2,145$ nên ta bác bỏ giả thuyết.

Do $\overline{x} = 99,7 < \mu_0 = 100$ nên $\mu < \mu_0 = 100$

Nghĩa là thực tế sản phẩm có tuổi thọ thấp hơn quy định là 100 giờ. Kết luận này đưa ra ở mức ý nghĩa 5%, nghĩa là khả năng ta có thể phạm sai lầm loại I trong kết luận của mình là 5%.

Ta cũng có thể tìm giá trị p bằng cách dùng hàm **TDIST(t,k,1)** p-value = P(T<-3) = P(T>3) = TDIST(3,14,1) = 0,004776

$\alpha/2 = 0{,}004776 \Rightarrow \alpha = 2 \times 0{,}004776 = 0{,}009552 = 0{,}95\%$

Ta cũng có cùng kết luận như trên, nghĩa là giả thuyết Ho sẽ bị bác bỏ ở bất kỳ giá trị nào của $\alpha > 0{,}95\%$.

8.5. KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT VỀ PHƯƠNG SAI TỔNG THỂ:

Giả sử ta có mẫu gồm n quan sát được chọn ngẫu nhiên từ tổng thể có phân phối chuẩn với phương sai σ^2 chưa biết.

- Ta cần kiểm định giả thuyết:

$$H_o : \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

Dựa vào mẫu ta đưa ra quy tắc chấp nhận hay bác bỏ giả thuyết trên với mức ý nghĩa α.

- Quy tắc thực hành:

Ta tính giá trị kiểm định: $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_o^2}$ (8.4)

Biết α, từ bảng χ^2_{n-1} ta tra được $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ và $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$

+ Nếu $\chi^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ hay $\chi^2 > \chi^2_{n-1,\alpha/2}$ ta bác bỏ giả thuyết.

+ Nếu $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} < \chi^2 < \chi^2_{n-1,\alpha/2}$ ta chấp nhận giả thuyết.

Trong trường hợp giả thuyết bị bác bỏ:

+ Nếu $s^2 > \sigma_o^2$ ta kết luận $\sigma^2 > \sigma_0^2$

+ Nếu $s^2 < \sigma_o^2$ ta kết luận $\sigma^2 < \sigma_0^2$

Trong nhiều trường hợp ta thường quan tâm đến việc kiểm tra xem phương sai của tổng thể σ^2 có vượt quá một giá trị nào đó hay không. Khi đó ta thực hiện kiểm định một bên và là bên phải với giả thuyết.

$$H_o : \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ hoặc } H_o : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$$
$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

Và H_0 sẽ bị bác bỏ ở mức ý nghĩa α nếu :

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1,\alpha}$$

Trường hợp kiểm định bên trái, với giả thuyết:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ hoặc } H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

H_0 sẽ bị bác bỏ ở mức ý nghĩa α nếu :

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,1-\alpha}$$

Ví dụ: Một máy tiện tự động quy định phương sai của đường kính trục máy bằng σ_0^2 =36. Người ta tiến hành 25 quan sát về đường kính của trục máy và tính được s^2 = 35,266. Với mức ý nghĩa α = 5% ta có thể kết luận như thế nào về quá trình sản xuất.

Giải

Ta đặt giả thuyết:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

Giá trị kiểm định: $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1)35,266}{36} = 23,5106$

Tra bảng phân phối χ^2 ta có $\chi^2_{24,0,025} = 39,3641$

$$\chi^2 = 23,0156 < 39,3641$$

Nên ta chấp nhận giả thuyết H_O, nghĩa là tình hình sản xuất bình thường.

8.6. KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT VỀ SỰ KHÁC NHAU GIỮA 2 SỐ TRUNG BÌNH CỦA HAI TỔNG THỂ:

8.6.1. Kiểm định trong trường hợp mẫu phối hợp từng cặp:

Giả sử ta có mẫu gồm n cặp quan sát lấy ngẫu nhiên từ hai tổng thể X và Y: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$

Gọi μ_x, μ_y là trung bình của hai tổng thể.

$\bar{d}$: là trung bình của n khác biệt $(x_i - y_i)$.

s_d: là độ lệch tiêu chuẩn của n khác biệt ($(x_i - y_i)$).

Giả sử rằng các khác biệt giữa x và y trong tổng thể có phân phối chuẩn.

- Ta cần kiểm định giả thuyết:

$H_0 : \mu_x - \mu_y = D_0$ (D_0 là giá trị cho trước)

$H_1 : \mu_x - \mu_y \neq D_0$

(khi muốn kiểm định giả thuyết $\mu_x = \mu_y$ ta đặt $D_0 = 0$)

Dựa vào mẫu ta đưa ra quy tắc chấp nhận hay bác bỏ giả thuyết trên với mức ý nghĩa α.

- Quy tắc thực hành:

Tính giá trị kiểm định : $$t = \frac{\bar{d} - D_0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} \quad (8.5)$$

Biết α từ bảng phân phối student ta tìm $t_{n-1,\alpha/2}$

+ $|t| > t_{n-1,\alpha/2}$ ta bác bỏ giả thuyết.

+ $|t| \leq t_{n-1,\alpha/2}$ ta chấp nhận giả thuyết.

Trường hợp kiểm định một bên, ta có bảng tóm tắt sau:

Giả thuyết	Bác bỏ Ho khi:
$H_0 : \mu_x - \mu_y = D_0$ $H_1 : \mu_x - \mu_y \neq D_0$	$t > t_{n-1,\alpha/2}$ hoặc $t < -t_{n-1,\alpha/2}$ Hay $\lvert t\rvert > t_{n-1,\alpha/2}$
$H_0 : \mu_x - \mu_y = D_0$ hoặc Ho: $\mu_x - \mu_y \geq D_0$ $H_1 : \mu_x - \mu_y < D_0$	$t < -t_{n-1,\alpha}$
$H_0 : \mu_x - \mu_y = D_0$ hoặc Ho: $\mu_x - \mu_y \leq D_0$ $H_1 : \mu_x - \mu_y > D_0$	$t > t_{n-1,\alpha}$

Ví dụ: Một công ty thực hiện các biện pháp tăng NSLĐ. Số liệu về NSLĐ của 10 công nhân được thu thập trước và sau khi thực hiện các biện pháp tăng NSLĐ.

Công nhân	NSLĐ trước và sau khi thực hiện các biện pháp tăng NSLĐ (kg/ngày)	
	Trước khi	Sau khi
A	50	52
B	48	46
C	45	50
D	60	65
E	70	78
F	62	61
G	55	58
H	62	70
I	58	67
K	53	65

Quản đốc phân xưởng cho rằng không có sự khác nhau về NSLĐ trung bình trước và sau khi áp dụng các biện pháp tăng NSLĐ. Với mức ý nghĩa 5% có thể kết luận gì về lời tuyên bố của quản đốc?

Giải

Gọi μ_x , μ_y là NSLĐ trung bình sau khi và trước khi thực hiện các biện pháp tăng NSLĐ.

Ta đặt giả thuyết : $H_0 : \mu_x - \mu_y = D_0$

$H_1 : \mu_x - \mu_y \neq D_0$

Từ số liệu trên ta tính được $\overline{d} = 4{,}9$; $s_d = 4{,}4833$; $D_0 = 0$.

Giá trị kiểm định : $t = \dfrac{4{,}9 - 0}{\dfrac{4{,}4833}{\sqrt{10}}} = \dfrac{4{,}9}{1{,}4177} = 3{,}456$

$t_{n-1,\alpha/2} = t_{9,0{,}025} = 2{,}262$ Vì $|t| = 3{,}456 > 2{,}262$ nên ta bác bỏ giả thuyết H_0. Như vậy ta có thể kết luận lời tuyên bố của quản đốc phân xưởng là sai.

Vì $\overline{d} = 4{,}9 > D_0 = 0$ nên $\mu_x - \mu_y > 0$. Nghĩa là ở mức ý nghĩa 5% các biện pháp tăng NSLĐ đã làm tăng năng suất trung bình.

8.6.2. Kiểm định trong trường hợp mẫu độc lập:

Gọi n_x . n_y là các mẫu được chọn ngẫu nhiên độc lập từ hai tổng thể có phân phối chuẩn X và Y. Có trung bình là μ_x , μ_y ; phương sai là σ_x^2, σ_y^2 ; và trung bình mẫu là $\overline{x}, \overline{y}$.

- Ta cần kiểm định giả thuyết: $H_0 : \mu_x - \mu_y = D_0$ (D_0 cho trước).

$H_1 : \mu_x - \mu_y \neq D_0$

Dựa vào mẫu ta đưa ra quy tắc chấp nhận hay bác bỏ giả thuyết trên với mức ý nghĩa α.

- Quy tắc thực hành:

Tính giá trị kiểm định :

$$z = \frac{\overline{x} - \overline{y} - D_0}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{ny}}} \qquad (8.6)$$

Biết α ta tìm được $z_{\alpha/2}$.

+ Nếu $|z| > z_{\alpha/2}$ ta bác bỏ giả thuyết.

+ Nếu $|z| \leq z_{\alpha/2}$ ta chấp nhận giả thuyết.

Trường hợp nếu chưa biết phương sai tổng thể, kích thước mẫu lớn (n_x, . $n_y \geq 30$) ta vẫn có thể dùng công thức như trên và thay $\sigma_x^2 = s_x^2, \sigma_y^2 = s_y^2$.

Trường hợp kiểm định một bên, ta có bảng tóm tắt sau:

Giả thuyết	Bác bỏ Ho khi:
$H_0 : \mu_x - \mu_y = D_0$ $H_1 : \mu_x - \mu_y \neq D_0$	$z > z_{\alpha/2}$ hoặc $z < -z_{\alpha/2}$ Hay $\lvert z\rvert > z_{\alpha/2}$
$H_0 : \mu_x - \mu_y = D_0$ hoặc Ho: $\mu_x - \mu_y \geq D_0$ $H_1 : \mu_x - \mu_y < D_0$	$z < -z_\alpha$
$H_0 : \mu_x - \mu_y = D_0$ hoặc Ho: $\mu_x - \mu_y \leq D_0$ $H_1 : \mu_x - \mu_y > D_0$	$z > z_\alpha$

Ví dụ: Một trại chăn nuôi chọn 1 giống gà để tiến hành nghiên cứu hiệu quả của hai loại thức ăn mới A và B. Sau một thời gian nuôi thử nghiệm người ta chọn 50 con gà nuôi bằng thức ăn A và thấy trọng lượng trung bình 1 con là 2,2kg độ lệch chuẩn là 1,25 kg và 40 con gà nuôi bằng thức ăn B, trọng lượng trung bình 1 con là 1,2 kg độ lệch chuẩn là 1,02 kg. Giả sử ta muốn kiểm định giả thuyết H_0 cho rằng trọng lượng trung bình của 1 con gà sau một thời gian nuôi trong hai trường hợp là như nhau với mức ý nghĩa $\alpha = 0{,}05$.

Giải:

Gọi μ_x, μ_y là trọng lượng trung bình của 1 con gà nuôi bằng thức ăn A và B.

Ta đặt giả thuyết: $H_0 : \mu_x - \mu_y = 0$

$H_1 : \mu_x - \mu_y \neq 0$

Ta có : $\overline{x} = 2{,}2$; $s_x = 1{,}25$; $n_x = 50$

$\overline{y} = 1{,}2$; $s_y = 1{,}02$; $n_y = 40$ $\quad z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

Giá trị kiểm định : $$z = \frac{2{,}2 - 1{,}2}{\sqrt{\dfrac{1{,}25^2}{50} + \dfrac{1{,}02^2}{40}}} = 4{,}179$$

Vì $|z| = 4{,}179 > 1{,}96$ nên ta bác bỏ giả thiết H_0.

Do $\overline{x} > \overline{y}$ nên $\mu_x > \mu_y$.

Như vậy với mức ý nghĩa $\alpha = 0{,}05$ ta có thể nói rằng trọng lượng trung bình của 1 con gà nuôi bằng thức ăn A lớn hơn nuôi bằng thức ăn B.

Trong trường hợp mẫu nhỏ n_x hoặc n_y hoặc cả hai < 30.

Ta có thể thực hiện kiểm định về sự khác nhau giữa hai số trung bình của hai tổng thể với giả định cả hai tổng thể có phân phối chuẩn và phương sai của hai tổng thể bằng nhau.

- Ta cần kiểm định giả thuyết: $H_0 : \mu_x - \mu_y = D_0$

$H_1 : \mu_x - \mu_y \neq D_0$

- Quy tắc thực hành:

Tính giá trị kiểm định : $$t = \frac{\overline{x} - \overline{y} - D_0}{\sqrt{s^2\left(\dfrac{1}{n_x} + \dfrac{1}{n_y}\right)}} \qquad (8.7)$$

Trong đó: $$s^2 = \frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}{(n_x + n_y - 2)}$$

Từ α, tra bảng phân phối student với $n_x + n_y - 2$ bậc tự do để tìm $t_{n_x+n_y-2,\alpha/2}$

+ Nếu $|t| > t_{n_x+n_y-2,\alpha/2}$ ta bác bỏ giả thuyết.

+ Nếu $|t| \le t_{n_x+n_y-2,\alpha/2}$ ta chấp nhận giả thuyết.

Trường hợp kiểm định một bên, ta có bảng tóm tắt sau:

Giả thuyết	Bác bỏ Ho khi:
$H_0: \mu_x - \mu_y = D_0$ $H_1: \mu_x - \mu_y \ne D_0$	$t > t_{n_x+n_y-2,\alpha/2}$ hoặc $t < -t_{n_x+n_y-2,\alpha/2}$ Hay $\lvert t\rvert > t_{n_x+n_y-2,\alpha/2}$
$H_0: \mu_x - \mu_y = D_0$ hoặc Ho: $\mu_x - \mu_y \ge D_0$ $H_1: \mu_x - \mu_y < D_0$	$t < -t_{n_x+n_y-2,\alpha}$
$H_0: \mu_x - \mu_y = D_0$ hoặc Ho: $\mu_x - \mu_y \le D_0$ $H_1: \mu_x - \mu_y > D_0$	$t > t_{n_x+n_y-2,\alpha}$

Ví dụ: Ban lãnh đạo một công ty cho rằng doanh số tăng lên sau khi thực hiện các biện pháp khuyến mãi. Chọn ngẫu nhiên 13 tuần trước khi thực hiện các biện pháp khuyến mãi và 14 tuần sau khi thực hiện các biện pháp khuyến mãi. Doanh số trung bình và độ lệch chuẩn tính được lần lượt là 1234, 1864 và 324,289 (triệu đồng). Hãy kiểm định ý kiến trên với mức ý nghĩa α = 5%.

Giải

Gọi μ_x, μ_y lần lượt là doanh số trung bình sau và trước khi thực hiện các biện pháp khuyến mãi.

- Ta đặt giả thuyết:

$$H_0: \mu_x - \mu_y = 0$$
$$H_1: \mu_x - \mu_y \ne 0$$

Trong trường hợp này n_x, n_y < 30, ta giả định phương sai của hai tổng thể về doanh số trước và sau khi thực hiện các biện pháp khuyến mãi là bằng nhau.

- Để ước lượng phương sai ta tính:

$$s^2 = \frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}{(n_x + n_y - 2)} = \frac{(14-1)289^2 + (13-1)324^2}{(14+13-2)}$$

$$= \frac{2345485}{25} = 93819.4$$

Tính giá trị kiểm định:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - D_0}{\sqrt{s^2(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y})}} = \frac{1864 - 1234}{\sqrt{93819.4(\frac{1}{14} + \frac{1}{13})}} = 5.34$$

$$\alpha = 5\%, \quad t_{n_x + n_y - 2, \alpha/2} = t_{25, 2.5\%} = 1,708$$

Vì $|t| = 5.34 > 1.708$ nên ta bác bỏ giả thuyết H_0 nghĩa là $\mu_x \neq \mu_y$, do $\bar{x} > \bar{y}$ nên $\mu_x > \mu_y$. Như vậy với mức ý nghĩa 5% ta có thể nói rằng doanh số trung bình sau khi áp dụng các biện pháp khuyến mãi đã tăng lên.

8.7. KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT VỀ SỰ BẰNG NHAU GIỮA HAI PHƯƠNG SAI CỦA TỔNG THỂ:

Giả sử ta có hai tổng thể phân phối chuẩn với phương sai tương ứng là σ_x^2, σ_y^2. Ta cần kiểm định giả thuyết:

$$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$$

$$H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$$

Căn cứ vào hai mẫu n_x, n_y được chọn ngẫu nhiên độc lập từ hai tổng thể với phương sai mẫu tương ứng s_x^2, s_y^2, ta đưa ra quy tắc để kết luận là chấp nhận hay bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa α.

- Quy tắc thực hành:

Từ hai mẫu cụ thể ta tính giá trị kiểm định: $\dfrac{s_x^2}{s_y^2}$ (8.8) (với giả thiết $s_x^2 > s_y^2$, nếu không ta đặt ngược lại).

Ta tra bảng Fisher – Snedecor với n_x-1 và n_y-1 bậc tự do để tìm $F_{n_x-1,n_y-1,\alpha/2}$.

+ Nếu $\frac{s_x^2}{s_y^2} \le F_{n_x-1,n_y-1,\alpha/2}$ ta chấp nhận giả thuyết.

+ Nếu $\frac{s_x^2}{s_y^2} > F_{n_x-1,n_y-1,\alpha/2}$ ta bác bỏ giả thuyết.

Trong trường hợp bác bỏ giả thuyết nghĩa là $\sigma_x^2 \ne \sigma_y^2$, vì $s_x^2 > s_y^2$ nên ta kết luận $\sigma_x^2 > \sigma_y^2$.

Trường hợp kiểm định một bên, ta có giả thuyết:

$$Ho: \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \text{ hoặc } Ho: \sigma_x^2 \le \sigma_y^2$$

$$H_1: \sigma_x^2 > \sigma_y^2$$

Giả thuyết Ho bị bác bỏ nếu $\frac{s_x^2}{s_y^2} > F_{n_x-1,n_y-1,\alpha}$

Ví dụ: để kiểm tra độ chính xác của hai chiếc máy tiện người ta chọn ngẫu nhiên từ máy 1 (x) ra 15 sản phẩm, từ máy 2 (y) ra 13 sản phẩm, phương sai về đường kính sản phẩm tính được lần lượt là 17 và 26. Với mức ý nghĩa α = 5% có thể kết luận hai máy có độ chính xác như nhau không?

Giải:

Ta đặt giả thuyết: $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$

$$H_1: \sigma_x^2 \ne \sigma_y^2$$

Giá trị kiểm định: $\frac{s_y^2}{s_x^2} = \frac{26}{17} = 1{,}529$

Tra bảng phân phối F ta có $F_{12,14,0.025} = 3{,}05$ vì 1,529 < 3,05 nên ta chấp nhận giả thuyết nghĩa là hai máy có độ chính xác như nhau.