# *PHẦN HAI:* HÌNH HỌC SƠ CẤP

## *CHƯƠNG I*

## PHƯƠNG PHÁP TIÊN ĐỀ

### §1. Sơ lược lịch sử

**1. Ngay từ những năm đầu ở trường tiểu học,** học sinh đã được biết các khái niệm hình học như điểm, đoạn thẳng, hình chữ nhật, hình tam giác, đường thẳng... sau đó là mặt phẳng, khối lập phương, khối hộp chữ nhật,... Tất cả các khái niệm đó chỉ được mô tả bằng hình vẽ hoặc các mô hình trực quan. Tuy nhiên trong cách trình bày hình học truyền thống, người ta chỉ mô tả một số khái niệm gọi là các *khái niệm cơ bản* như điểm, đường thẳng, mặt phẳng, điểm thuộc đường thẳng, một điểm ở giữa hai điểm, hai đoạn thẳng bằng nhau, còn các khái niệm khác của hình học đều được định nghĩa chính xác. Trong cách trình bày truyền thống của hình học, người ta cũng thừa nhận một số khẳng định của hình học, gọi là các *tiên đề*, nói lên tính chất các khái niệm cơ bản, sau đó chứng minh các khẳng định của hình học. Cách trình bày hình học như vậy được dùng để giảng dạy bộ môn hình học trong trường phổ thông không những ở nước ta mà ở hầu hết các nước khác trên thế giới. Người đặt nền móng cho cách trình bày hình học như vậy là nhà Toán học Ơcơlit sống ở Alexandri và khoảng những năm 300 trước công nguyên.

**2. Tác phẩm "Nguyên lý" của Ơcơlit**

Hình học sơ cấp là một trong những khoa học cổ nhất, được phát sinh do nhu cầu thực tiễn của đời sống con người như đo đạc ruộng đất, tính toán các công trình xây dựng. Từ thế kỷ thứ VII đến thế kỷ thứ III trước công nguyên, các kiến thức hình học dần dần được hệ thống lại mang tính chất của một bộ môn khoa học. Công lao ấy thuộc về các trường phái toán học và triết học của Talét, Pitago, Aristôt, Đêmôcret...

Những công trình nghiên cứu của các nhà toán học cổ đại đã được tổng kết và hoàn tất xuất sắc trong các tác phẩm của Ơcơlit nhan đề "Nguyên lý", viết vào khoảng 300 năm trước công nguyên.

Tác phẩm "Nguyên lý" của Ơcơlit không những tập hợp được hầu hết các kiến thức toán học đương thời mà giá trị chủ yếu của nó là phương pháp trình bày các kiến thức đó. Ở mỗi tập sách trong tác phẩm "Nguyên lý" Ơcơlit đã bắt đầu bằng việc đưa các khái niệm (sẽ dùng đến) sau đó đưa ra một số khẳng định xem như chân lý (gọi là tiên đề hoặc là định đề) về các khái niệm đã nêu ra. Phần chủ yếu của mỗi tập sách là các kiến thức cơ bản của môn học bao gồm các khái niệm, thuộc tính và quan hệ giữa chúng được phát biểu thành các định lý. Tất cả các khái niệm này đều được định nghĩa và tất cả các định lý đều được chứng minh.

Như vậy, qua tác phẩm "Nguyên lý", Ơcơlit đã thể hiện rõ ý đồ muốn toán học trở thành bộ môn khoa học trừu tượng và suy diễn, độc lập với ý niệm vật lý về không gian vật chất xung quanh. Ơcơlit muốn định nghĩa mọi khái niệm, muốn chứng minh mọi chân lý. Khi bắt tay thực hiện mới thấy rằng không thể làm được vì chứng minh điều này lại phải dựa vào điều kia và như vậy là không cùng. Và do đó dẫn đến ý tưởng phải thừa nhận một số khái niệm không định nghĩa, thừa nhận một số chân lý làm cơ sở cho các suy diễn tiếp theo.

Phương pháp trình bày của Ơcơlit đã có ảnh hưởng đến sự phát triển của hình học trong nhiều thế kỷ tiếp theo và của toán học nói chung. Với tác phẩm "Nguyên lý", Ơcơlit là người đặt nền móng cho việc xây dựng cơ sở của toán học, dẫn dắt các nhà toán học, theo những phương hướng nghiên cứu khác nhau, làm cho toán học trở thành một khoa học trừu tượng, suy diễn và đa dạng. Có thể nói Ơcơlit và tác phẩm "Nguyên lý" của mình trở thành người thầy của các thế hệ toán học sau này.

Tuy nhiên trong tác phẩm "Nguyên lý" cũng có một số thiếu sót, song chính việc khắc khắc phục các thiếu sót đó của các nhà toán học thế hệ sau đã thúc đẩy toán học phát triển.

### 3. Lôbasepxki và Hinbe

Bởi giá trị to lớn của tác phẩm "Nguyên lý" của Ơcolit, nhiều nhà toán học ở các thế hệ sau đã bỏ công nghiên cứu và hoàn thiện nó theo các phương hướng khác nhau.

Trước hết người ta cố gắng bổ sung thêm các tiên đề đủ để làm cơ sở cho các suy diễn hình học, làm cho bộ môn hình học thực sự trở thành một bộ môn khoa học chính xác và chặt chẽ. Công lao lớn thuộc về các nhà toán học Acsimet, Cangto, Pastơ.

Mặt khác, các nhà toán học cũng có cố gắng tìm kiếm rút bỏ các tiên đề mà có thể chứng minh được nhờ các tiên đề khác. Tiên đề được nhiều nhà toán học chú ý là định đề được đánh số V trong tác phẩm "Nguyên lý". Nội dung của định đề đó là:

*"Hai đường thẳng tạo với một cát tuyến hai góc trong cùng phía có tổng nhỏ hơn hai vuông thì cắt nhau về phía của hai góc đó".*

Nội dung của định đề này có hình thức phát biểu khá phức tạp so với các định đề khác và được dùng đến khá muộn trong bộ sách nên người ta nghi ngờ rằng chính Ơcolit đã cố gắng chứng minh nó, song chưa được nên đành xếp vào danh mục các mệnh đề được thừa nhận.

Nhiều nhà toán học tìm cách chứng minh định đề V. Có người đã tuyệt vọng vì nó, có người đã tưởng chứng minh được định đề V, nhưng đến phút cuối trước khi công bố đã phát hiện rằng mình đã dùng một kết quả suy ra từ định đề đó. Mãi đến thế kỷ 19, ba nhà toán học Bôlyai (Hungari), Gaoxơ (Đức) và Lôbasepxki (Nga) đã độc lập với nhau cùng đi đến kết luận: Không thể chứng minh được định đề V nhờ các định đề và tiên đề khác. Tuy nhiên do hoàn cảnh và chính kiến khác nhau chỉ có Lôbasepxki là người đã mạnh dạn công bố kết quả nghiên cứu của mình và tiến xa hơn – sáng tạo ra một bộ môn hình học mới mang tên ông. "Hình học Lôbasepxki".

Để chứng minh định đề V, nhiều nhà toán học trước Lôbasepxki thường sử dụng phương pháp phản chứng, có nghĩa là giả sử định đề đó không đúng và cố gắng tìm mâu thuẫn. Song, tiếc thay những mâu thuẫn nhận được chỉ là những điều trái với nhận thức thực tế xung quanh chứ không phải là mâu thuẫn nội tại trong các mệnh đề được thừa nhận. Thừa kế những kết quả đó, Lôbasepxki đã đi đến ý tưởng tuyệt vời là không thể chứng minh được và cũng không thể phủ nhận được nó. Vì vậy, cùng với việc thừa nhận nó là một chân lý cũng có thể thay thế nó bằng một mệnh đề phủ định nó. Lôbasepxki đã thừa nhận mệnh đề phủ định của định đề:

*"Tồn tại hai đường thẳng tạo với một cát tuyến hai góc trong cùng phía có tổng nhỏ hơn hai vuông mà không cắt nhau về phía của hai góc trong đó".*

Với việc thừa nhận mệnh đề phủ định này và các mệnh đề được thừa nhận khác của Ơcơlit, Lôbasepxki đã phát triển và xây dựng trên một bộ môn hình học mới. Tuy nhiên những kết quả nghiên cứu của ông hết sức xa lạ với nhận thức thế giới đã khá quen thuộc và bền vững, nên sinh thời ông đã bị nghi ngờ và phản đối. Chỉ đến khi ra đời lý thuyết tương đối và thiên văn học phát triển, người ta hiểu ra rằng vũ trụ là bao la và trong vũ trụ bao la đó nhiều điều nghiệm đúng hoặc gần gũi với các kết quả nghiên cứu của Lôbasepxki, thì các kết quả nghiên cứu của ông mới được thừa nhận. Công lao to lớn của Lôbasepxki là mở rộng tầm nhìn ra vũ trụ và mở đường cho các lý thuyết hình học "phi Ơcơlit".

Công lao cuối cùng trong việc hoàn thiện các tiên đề do Ơcơlit thừa nhận thuộc về nhà toán học Hinbe người Đức. Công trình của ông đã được ông trình bày trong Hội nghị Toán học thế giới năm 1901 và đã được nhận giải thưởng lớn. Chúng ta sẽ xem xét nó trong §3.

## §2 Phương pháp tiên đề

### 1. Nội dung của phương pháp tiên đề

Mỗi môn học chứa đựng những khái niệm, những mối quan hệ giữa chúng và những thuộc tính của các khái niệm. Theo tinh thần của Ơcơlit, không thể chứng minh được mọi điều, vì vậy phải chọn lọc một số tối thiểu các tính chất phải thừa nhận để làm cơ sở cho toàn bộ các suy diễn tiếp theo. Với các khái niệm cũng vậy, phải chọn lọc ra một số tối thiểu các khái niệm không định nghĩa, những thuộc tính và quan hệ giữa chúng đã được thể hiện qua một số mệnh đề được thừa nhận, rồi từ đó định nghĩa tất cả các khái niệm khác. Những khái niệm không định nghĩa gọi là các *khái niệm cơ bản;* những mệnh đề được thừa nhận không chứng minh gọi là các *tiên đề*.

Như vậy, để xây dựng một môn học bằng phương pháp tiên đề người ta đưa ra:

1. Các khái niệm cơ bản.

2. Các tiên đề (đặc trưng cho tính chất của các khái niệm cơ bản).

Và trên cơ sở đó, người ta định nghĩa các khái niệm và suy diễn ra các tính chất khác liên quan đến các khái niệm đã có. Để định nghĩa theo chủng loại, mỗi khái niệm lại thuộc vào một lớp các khái niệm rộng hơn. Các tính chất và các khẳng định khác tiên đề gọi là định lý, mệnh đề, bổ đề, hệ quả tuỳ thuộc vào nội dung và vị trí của nó. Các khẳng định này được suy diễn nhờ các quy tắc suy luận của logic. Hai quy tắc suy luận thông thường là luật bài trung, tức là mỗi khẳng định chỉ có thể đúng hoặc sai và quy tắc tam đoạn luận, tức là nếu mệnh đề A → B đúng, A đúng thì B đúng. Tập hợp các khái niệm cơ bản và các tiên đề của một môn học gọi là một *hệ tiên đề* của môn học đó.

**2. Các yêu cầu cơ bản của một hệ tiên đề**

Có nhiều cách khác nhau để lựa chọn các khái niệm cơ bản và các tiên đề, vì vậy một môn học có thể có nhiều hệ tiên đề khác nhau. Để có thể đóng vai trò nền tảng cho một môn học, mỗi hệ tiên đề cần thoả mãn các hệ tiên đề sau đây:

***a. Tính phi mâu thuẫn***

Một hệ tiên đề được gọi là phi mâu thuẫn nếu từ hệ tiên đề đó không thể suy ra hai kết quả trái ngược nhau.

Nếu một hệ tiên đề có mâu thuẫn thì không thể phân biệt được đúng, sai và lý thuyết dựa trên hệ tiên đề đó trở nên vô nghĩa. Vì vậy, tính phi mâu thuẫn là yêu cầu cơ bản nhất của một hệ tiên đề.

***b. Tính độc lập***

Một hệ tiên đề được gọi là độc lập nếu mỗi tiên đề của hệ không thể được chứng minh nhờ các tiên đề còn lại. Như vậy, với yêu cầu này, một hệ tiên đề độc lập là hệ tiên đề mà không thể rút bớt một tiên đề nào, đó là số tối thiểu các khẳng định phải thừa nhận.

*c. Tính đầy đủ*

Một hệ tiên đề được gọi là đầy đủ nếu mọi khẳng định của môn học đều được suy diễn từ nó.

Tính phi mâu thuẫn là yêu cầu bắt buộc của một hệ tiên đề, còn hai yêu cầu tính độc lập và tính đầy đủ trong thực tiễn đôi khi có thể châm chước. Chẳng hạn, một hệ tiên đề không độc lập vẫn được dùng cho một lý thuyết nhằm giảm bớt quá trình suy diễn và do đó giúp người học sớm tiếp cận những kiến thức tinh tế của môn học.

**3. Mô hình một hệ tiên đề**

Vì các khái niệm cơ bản không được định nghĩa, nên nếu có thể gán cho mỗi khái niệm cơ bản của hệ tiên đề một khái niệm đã có của một môn học nào đó sao cho mỗi tiên đề của hệ tiên đề được "dịch" sang ngôn ngữ của môn học đó đều là chân lý, thì người ta coi là đã tìm được một *thể hiện* (hay một *mô hình*) của hệ tiên đề trong môn học đó. Điều đó có thể ví như ý tưởng của con người được thể hiện bằng một thứ ngôn ngữ. Như vậy một hệ tiên đề có thể có nhiều mô hình trong các môn học khác nhau hay thậm chí trong cùng một bộ môn. Khi một hệ tiên đề đã có mô hình thì mỗi định lý trừu tượng suy ra từ hệ tiên đề cho ta các định lý cụ thể của mô hình, tức là các định lý của các môn học mà hệ tiên đề được thể hiện. Đó là ý nghĩa thực tiễn quan trọng của phương pháp tiên đề.

Bằng mô hình, ta còn có thể xét xem một hệ tiên đề có thoả mãn các yêu cầu cơ bản đặt ra cho nó hay không. Ta biết rằng "chưa có" không đủ để khẳng định là "không có". Với một hệ tiên đề đến nay chưa tìm thấy mâu thuẫn thì hoàn toàn chưa đủ để nói rằng nó là phi mâu thuẫn. Tuy nhiên, dễ thấy rằng một hệ tiên đề có mâu thuẫn mà lại có một số mô hình trong một bộ môn nào đó thì bản thân lý thuyết đó cũng có mâu thuẫn. Vì vậy, một hệ tiên đề là phi mâu thuẫn nếu có một mô hình trong một lý thuyết đã được chứng minh (hay giả thiết) là phi mâu thuẫn.

Một tiên đề của một hệ tiên đề phi mâu thuẫn sẽ là độc lập nếu khi thay nó bằng một khẳng định phủ định nó ta vẫn nhận được một hệ tiên đề phi mâu thuẫn. Vì vậy muốn chứng minh một tiên đề của một hệ tiên đề là độc lập, ta chỉ cần tìm một mô hình của hệ tiên đề trong một lý thuyết đã được xem là phi mâu thuẫn sao cho tất cả các tiên đề khác thể hiện thành các định lý của lý thuyết đó, duy có tiên đề đó thể hiện trên mô hình là một kết quả phi lý (trong lý thuyết đó).

Bằng mô hình người ta cũng xem xét được một cách tương đối về tính đầy đủ của một hệ tiên đề. Hai mô hình của cùng một hệ được gọi là *đẳng cấu* nếu có một tương ứng một một giữa các khái niệm cơ bản của hệ tiên đề và bảo tồn những quan hệ cơ bản giữa các đối tượng. Một hệ tiên đề được coi là *đầy đủ* nếu bất cứ hai mô hình nào của nó đều đẳng cấu. Như vậy nếu một hệ tiên đề đầy đủ thì từ một định lý trên mô hình bằng cách "dịch ngược", ta sẽ có một định lý trừu tượng của hệ tiên đề.

## §3. Hệ tiên đề Hinbe của hình học Ơcơlit

### 1. Giới thiệu tiên đề Hinbe

Hệ tiên đề Hinbe của hình học Ơcơlit gồm:

a) Sáu khái niệm cơ bản: điểm, đường thẳng, mặt phẳng, thuộc, ở giữa, toàn đẳng.

b) Các tiên đề được phân thành 5 nhóm.

Nhóm I (Các tiên đề về "thuộc")

$I_1$: Có ít nhất hai điểm thuộc mỗi đường thẳng.

$I_2$: Có một và chỉ một đường thẳng thuộc hai điểm phân biệt cho trước.

$I_3$: Có ít nhất ba điểm không thuộc một đường thẳng.

$I_4$: Có một và chỉ một mặt phẳng thuộc ba điểm không thẳng hàng (không cùng thuộc một đường thẳng). Mặt phẳng có ít nhất một điểm.

$I_5$: Đường thẳng có hai điểm thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

$I_6$: Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì còn có một điểm chung thứ hai khác nữa.

$I_7$: Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Nhóm II (Các tiên đề về thứ tự)

$II_1$: Nếu điểm B ở giữa hai điểm A và C thì A, B, C là ba điểm phân biệt cùng thuộc một đường thẳng và điểm B ở giữa hai điểm C và A.

$II_2$: Bất kỳ hai điểm A và C nào cũng có một điểm B sao cho C ở giữa A và B.

$II_3$: Trong ba điểm cùng thuộc một đường thẳng có không quá một điểm ở giữa hai điểm kia.

$II_4$: (Tiên đề Patsơ) Cho ba điểm A, B và C không cùng thuộc một đường thẳng và cho đường thẳng a không đi qua hai điểm nào trong ba điểm đó. Khi đó nếu đường thẳng a thuộc một điểm ở giữa A và B thì khi đó nó còn thuộc một điểm ở giữa B và C hoặc ở giữa C và A.

Nhóm III (Các tiên đề về toàn đẳng)

$III_1$: Cho điểm A thuộc đường thẳng a. Ngoài ra cho CD là một đoạn thẳng bất kỳ (đoạn thẳng hiểu là tập hợp gồm hai điểm). Khi đó có hai điểm $B_1$, $B_2$ thuộc a sao cho $AB_1$ và $AB_2$ bằng đoạn CD. Ký hiệu $AB_1 = CD$, $AB_2 = CD$. Với mỗi đoạn thẳng AB ta đều có $AB = BA$.

$III_2$: Quan hệ bằng giữa các đoạn thẳng có tính phản xạ, đối xứng, bắc cầu, cụ thể là:

1. $AB = AB$.

2. Nếu $AB = CD$, thì $CD = AB$.

3. Nếu $AB = CD$, $CD = EF$ thì $AB = EF$.

$III_3$: Cho điểm B ở giữa hai điểm A và C, điểm B' ở giữa hai điểm A' và C'. Khi đó nếu $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ thì $BC = B'C'$.

$III_4$: Cho góc $(\widehat{k,l})$ và nửa đường thẳng a có gốc O (Các khái niệm này được định nghĩa nhờ khái niệm điểm, đường thẳng, ở giữa. Xem chương II).

Khi đó có duy nhất hai nửa đường thẳng b' và b'' cùng có gốc O sao cho $(\widehat{k,l}) = (\widehat{a,b'})$ và $(\widehat{k,l}) = (\widehat{a,b''})$.

$III_5$: Quan hệ bằng đối với các góc có tính chất phản xạ, đối xứng, bắc cầu, cụ thể là:

1. $(\widehat{k,l}) = (\widehat{k,l})$.

2. $(\widehat{k,l}) = (\widehat{m,n})$ thì $(\widehat{m,n}) = (\widehat{k,l})$.

3. Nếu $(\widehat{k,l}) = (\widehat{m,n}), (\widehat{m,n}) = (\widehat{p,q})$ thì $(\widehat{k,l}) = (\widehat{p,q})$.

Ngoài ra $(\widehat{k,l}) = (\widehat{l,k})$.

$III_6$: Nếu hai tam giác ABC và A'B'C' (Tam giác ABC là tập hợp gồm ba đoạn thẳng AB, BC, CA và A, B, C không thẳng hàng), có AB = A'B', AC = A'C', $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ thì $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ và BC = B'C'.

Nhóm IV (Các tiên đề liên tục)

$IV_1$: (Tiên đề Acsimet) Với bất kỳ hai đoạn thẳng AB và CD bao giờ cũng có số tự nhiên n sao cho nAB > CD.

$IV_2$: (Tiên đề Cangto) Giả sử trên đường thẳng a cho một dãy vô hạn các đoạn thẳng $A_1B_1$, $A_2B_2$,..., $A_nB_n$,... sao cho mỗi đoạn thẳng nằm trong đoạn thẳng trước nó và bất kỳ đoạn thẳng CD nào cho trước bao giờ cũng có số tự nhiên n để $A_nB_n$ < CD. Khi đó trên đường thẳng a có một điểm X thuộc mọi đoạn thẳng của dãy đã cho.

Nhóm V (Tiên đề về đường thẳng song song)

V. Qua mỗi điểm A không thuộc đường thẳng a có không quá một đường thẳng b cùng nằm trong mặt phẳng P = (A,a) không có điểm chung với a.

**2. Một vài mô hình của tiên đề Hinbe**

***a. Mô hình vật lý***

Các kiến thức hình học có được chính là sự mô hình hoá và trừu tượng hoá không gian vật chất mà chúng ta đang sống. Người ta bắt đầu hình dung điểm như một cái gì đó "không có chiều dài, không có chiều rộng" như đầu mũi kim, đường thẳng là một cái gì đó chỉ có chiều dài được chiếu thẳng như các tia sáng, mặt phẳng là một cái gì đó "chỉ có bề rộng không có bề dày" như mặt hồ yên lặng. Để biểu diễn "điểm" người ta vẽ một cái "chấm" trên tờ giấy, để biểu diễn đường thẳng, người ta đặt kẻ một đường trên tờ giấy, còn mặt phẳng thì biểu diễn bởi một hình bình hành trên tờ giấy. Bằng những hình vẽ như vậy, ta mô tả khái niệm thuộc, ở giữa.


Điểm A thuộc đường thẳng a


Điểm B ở giữa A và C

Khái niệm bằng nhau của các hình được mô tả bởi việc đem chồng khít lên nhau. Đó là mô hình vật lý của hệ tiên đề Hinbe.

Mô hình vật lý của hệ tiên đề Hinbe đã là công cụ để giảng dạy hình học Ơcơlit ở tất cả các nước.

***b. Mô hình số học***

Từ đại số ta có một mô hình sau đây của hệ tiên đề Hinbe và gọi là mô hình số học.

Điểm được hiểu là bộ ba số thực có số thứ tự (x,y,z). Mặt phẳng được hiểu là một phương trình bậc nhất ba ẩn $Ax + By + Cz + D = 0$ (1), trong đó $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Đường thẳng là hệ phương trình $\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$ (2)

trong đó t thay đổi, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$.

Điểm $(x_1, y_1, z_1)$ thuộc mặt phẳng $Ax + By + Cz + D = 0$ nếu $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, còn phụ thuộc đường thẳng (2) nếu có $t = t_1$ để $x_1 = x_0 + a_1t_1$, $y_1 = y_0 + a_2t_1$, $z_1 = z_0 + a_3t_1$. Ba điểm $A = (x_1,y_1,z_1)$, $B = (x_2,y_2,z_2)$, $C = (x_3,y_3,z_3)$ thuộc đường thẳng (2) ứng với các số $t_1$, $t_2$, $t_3$ tức là $x_i = x_0 + a_1t_i$, $y_i = y_0 + a_2t_i$, $z_i = z_0 + a_3t_i$, $i = 1, 2, 3$. Khi đó điểm B ở giữa A và C nếu $t_1 < t_2 < t_3$ hoặc $t_3 < t_2 < t_1$. Đường thẳng (2) thuộc mặt phẳng (1) nếu:

$$A(x_0 + a_1t) + B(y_0 + a_2t) + C(z_0 + a_3t) + D = 0 \text{ với mọi } t.$$

Cũng bằng đại số, người ta thể hiện được khái niệm bằng nhau và ta nhận được mô hình số học của hệ tiên đề Hinbe.

Người ta dùng mô hình số học để nghiên cứu hình học Ơcơlit, đó chính là phương pháp toạ độ trong hình học Ơcơlit.

**3. Một số định lý suy ra từ hệ tiên đề Hinbe**

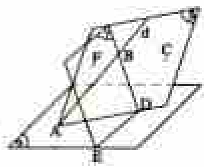
***a. Các kết quả suy ra từ nhóm I, II***

Từ nhóm tiên đề I ta biết rằng mỗi đường thẳng có ít nhất hai điểm (tiên đề $I_1$), không gian có ít nhất bốn điểm (tiên đề $I_7$).

*1) Định lý. Mỗi mặt phẳng có ít nhất ba điểm.*

*Chứng minh.* Với mặt phẳng $(\alpha)$, có điểm $A \in (\alpha)$ (tiên đề $I_3$), có điểm $B \notin (\alpha)$ (tiên đề $I_7$). Có đường thẳng (d) đi qua A, B (tiên đề $I_2$). Có điểm $C \notin (d)$ (tiên đề $I_1$). Có mặt phẳng $(\beta)$ đi qua A, B, C (tiên đề $I_4$). Có điểm chung $D \neq A$ của hai mặt phẳng $(\alpha)$, $(\beta)$ (tiên đề $I_6$). Có điểm $F \notin (\beta)$ (tiên đề $I_7$).

Có mặt phẳng $(\gamma)$ đi qua A, D, F. Có hai điểm E và D là điểm chung của $(\alpha)$ và $(\gamma)$. Như vậy mặt phẳng $(\alpha)$ có ít nhất ba điểm A, D, E.

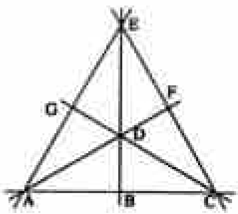


Hình 1

*2) Định lý. Trong ba điểm cùng thuộc một đường thẳng có đúng một điểm ở giữa hai điểm kia.*

*Chứng minh.* Xét ba điểm phân biệt thẳng hàng A, B, C. Giả sử A không ở giữa B và C, điểm C không ở giữa A và B. Ta sẽ chứng minh B ở giữa A và C.

Thật vậy, có điểm D không thuộc đường thẳng AB (tiên đề $I_3$). Có điểm E sao cho D ở giữa B và E (tiên đề $II_2$). Đường thẳng AD cắt đường thẳng EC ở F, điểm ở giữa E và C (tiên đề $II_4$). Xét tam giác AEF và đường thẳng CDG, ta có D ở giữa A, F (vì đã có G ở giữa A, E, điểm C không ở giữa E, F)



Hình 2

Xét tam giác FEA và đường thẳng EBD, vì D ở giữa A, F, điểm E không ở giữa F, C nên B ở giữa A và C.

*3) Định lý. Mỗi đường thẳng có vô số điểm (do đó mỗi mặt phẳng và cả không gian có vô số điểm).*

Ta bỏ qua chứng minh định lý này và lưu ý rằng việc chứng minh sự kiện "hiển nhiên" này không phải là đơn giản.

4) Mỗi điểm trên đường thẳng tạo nên sự "phân lớp" tập điểm còn lại của đường thẳng. Giả sử O là một điểm của đường thẳng (d), các điểm của đường thẳng d khác O được chia thành hai tập con sau:

Điểm O ở giữa hai điểm thuộc hai tập con đó.

Điểm O không ở giữa hai điểm của cùng một tập con.

Mỗi tập con như vậy gọi là một nửa đường thẳng mở. Bổ sung thêm điểm O vào mỗi *nửa đường thẳng mở* đó ta được một *nửa đường thẳng đóng* hay còn gọi là một *tia với gốc O*. Tương tự, ta xây dựng được khái niệm *nửa mặt phẳng, nửa không gian.* Trong các kết quả trên, tiên đề Patsơ ($II_4$) đóng vai trò cơ bản.

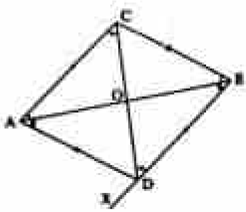
***b. Những kết quả suy từ nhóm I, II, III***

Với nhóm tiên đề III ta đã có dấu hiệu bằng nhau của tam giác. Từ đó ta có thể suy ra các kết quả sau:

*1) Định lý. Mỗi đoạn thẳng có một và chỉ một trung điểm.*

*Chứng minh.*

Xét đoạn thẳng AB. Có điểm C không thuộc đường thẳng AB. Có tia Bx khác phía với C đối với AB sao cho $\widehat{ABx} = \widehat{CAB}$. Có điểm D thuộc Bx sao cho BD = AC. Đoạn thẳng CD cắt AB tại O.




Hình 3

Ta có $\Delta ABC = \Delta BAD$ (c.g.c) nên $BC = DA$, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD}$

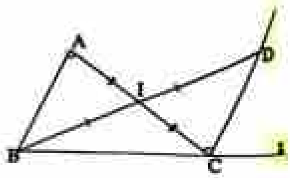
Từ đó suy ra $\Delta ACD = \Delta BCD$. Do đó $\widehat{ACO} = \widehat{BDO}$.

Vậy $\Delta OAC = \Delta OBD$ và suy $OA = OB$.

*2) Định lý. Góc ngoài của tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó.*

*Chứng minh.*

Xét $\Delta ABC$ với $\widehat{ACx}$ là góc ngoài tại C. Ta so sánh nó với góc A. Lấy trung điểm I của AC và điểm D đối xứng với B qua I. Ta có $\Delta IAB = \Delta ICD$. Suy ra $\widehat{A} = \widehat{ACD} < \widehat{ACx}$




Hình 4

*3) Định lý. Trong mặt phẳng có một và chỉ một đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng khác.*

*4) Định lý. Qua điểm A ở ngoài đường thẳng a có đường thẳng nằm trong mặt phẳng $\alpha = (A,a)$ không có điểm chung với a.*

*5) Định lý. Tổng các góc trong của một tam giác không vượt quá hai lần góc vuông.*

Chứng minh các định lý này dựa vào kết quả của định lý 2. Chẳng hạn ta chứng minh định lý 5 (dùng hình 4 trong chứng minh định lý 2).

Giả sử tổng các góc trong của $\Delta ABC$ là $180^\circ + \alpha$, $\alpha > 0$ thì tổng các góc trong của $\Delta BCD$ cũng bằng $180^\circ + \alpha$.

Vì $\widehat{A} = \widehat{ACD}$, nên $\widehat{B} = \widehat{DCx} + \alpha$. Suy ra $\widehat{B} > \alpha$.

Làm như vậy đối với $\Delta BCD$ ta được $\dfrac{\widehat{B}}{2} > \alpha$. Tiếp tục quá trình đó n lần ta được $\dfrac{1}{2^n}\widehat{B} > \alpha$. Điều này vô lý vì $\dfrac{1}{2^n}\widehat{B}$ có thể nhỏ tuỳ ý.

***c. Những kết quả suy từ nhóm IV, V***

Đến nhóm IV, ta có thể đưa ra khái niệm số đo đoạn thẳng. Nếu chọn trước một đoạn thẳng làm thước đo, thì có thể gán cho mỗi đoạn thẳng một số thực dương gọi là số đo của nó sao cho hai đoạn thẳng toàn đẳng thì có cùng số đo. Ngoài ra, số đo của tổng hai đoạn thẳng bằng tổng hai số đo của hai đoạn đó.

Cũng từ nhóm IV ta cũng nhận thấy rằng trên mỗi nửa đường thẳng Ox bao giờ cũng có một và chỉ một điểm A sao cho số đo của đoạn OA bằng một số thực dương cho trước. Tập các điểm của một đường thẳng lấp đầy đường thẳng đó (đường thẳng và do đó mặt phẳng và không gian không có "kẽ hở"). Chính kết quả này giải thích tên gọi đặt cho nhóm tiên đề IV.

Từ ba nhóm tiên đề đầu ta suy ra được sự tồn tại của đường thẳng đi qua điểm A ở ngoài đường thăngr a không có điểm chung với a. Sau khi có tiên đề V, ta định nghĩa được khái niệm song song của hai đường thẳng.

## §4. Hệ tiên đề Pôgôrelôp của hình học Ơcolit

Hệ tiên đề Hinbe của hình học Ơcolit rất hoàn hảo song quá phức tạp. Nhà toán học Nga Pôgôrelôp đã đưa ra hệ tiên đề sau đây của hình học Ơcolit (đã được dùng trong một thời gian để giảng dạy hình học Ơcolit trong các trường phổ thông trung học ở Liên Xô cũ).

**1. Các khái niệm cơ bản**

Điểm, đường thẳng, mặt phẳng, thuộc, ở giữa, độ dài (đoạn thẳng), số đo (góc).

**2. Các tiên đề**

*Tiên đề của hình học phẳng*

***I. Nhóm tiên đề liên thuộc***

$I_1$: Tồn tại một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

$I_2$: Mỗi đường thẳng chứa ít nhất hai điểm. Tồn tại ba điểm không cùng thuộc một đường thẳng.

***II. Nhóm tiên đề thứ tự***

$II_1$: Trong ba điểm thẳng hàng có một và chỉ một điểm ở giữa hai điểm kia.

$II_2$: Mỗi đường thẳng phân tập điểm của mặt phẳng không thuộc đường thẳng ấy thành hai tập con sao cho đoạn thẳng nối bất kỳ hai điểm của cùng một tập không cắt đường thẳng ấy, đoạn thẳng nối hai điểm thuộc hai tập khác nhau bao giờ cũng cắt đường thẳng.

***III. Nhóm tiên đề về độ đo***

$III_1$: Mỗi đoạn thẳng có một độ dài là một số số thực dương. Nếu C ở giữa A và B thì độ dài đoạn thẳng AB bằng tổng các độ dài của AC và BC.

$III_2$: Mỗi góc có một độ đo xác định. Độ đo góc bẹt bằng $180°$. Nếu tia Oz nằm trong miền góc xOy thì độ đo góc xOy bằng tổng độ đo các góc xOz và zOy.

***IV. Tiên đề tồn tại các tam giác bằng nhau***

Với tam giác ABC bất kỳ, trong nửa mặt phẳng có bờ chứa tia $A_1x$ có điểm $B_1 \in A_1x$, $C_1 \in A_1x$ sao cho $\Delta ABC$ và $\Delta A_1B_1C_1$ có các cạnh tương ứng có độ dài bằng nhau và các góc tương ứng có số đo bằng nhau.

*V. Tiên đề tồn tại đoạn thẳng có độ dài cho trước*

Với mọi số thực a > 0 tồn tại đoạn thẳng có không quá một đường thẳng không cắt đường thẳng đã cho.

*VI. Tiên đề song song*

Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có không quá một đường thẳng không cắt đường thẳng đã cho.

*Tiên đề của hình học không gian*

$C_1$: Mỗi mặt phẳng có điểm thuộc nó và có điểm không thuộc nó.

$C_2$: Hai mặt phẳng phân biệt đã có một điểm chung thì có một đường thẳng chung.

$C_3$: Có một vài và chỉ một mặt phẳng đi qua hai đường thẳng cắt nhau.

**3. Hệ tiên đề của Pôgôrêlốp** cũng có mô hình vật lý như mô hình vật lý của hệ tiên đề Hinbe, thêm vào số đo đoạn thẳng và số đo góc.

Ở trường phổ thông, dạy hình học Ơcơlit bằng phương pháp tổng hợp là dạy hình học trên cơ sở hệ tiên đề của Hinbe hay Pôgôrêlốp trên mô hình vật lý của nó. Song thực tế không thể để học sinh học hết các tiên đề rồi từ đó suy luận, nên người ta đã thừa nhận nhiều điều kể cả các định lý, rồi đưa học sinh đến các kiến thức cần thiết của hình học.

## §5. Hệ tiên đề không gian vectơ của hình học Ơcơlit

### 1. Định nghĩa không gian vetơ

***a. Định nghĩa***

Tập hợp V≠ 0 cùng với phép toán cộng trên V và phép nhân với một số thực.

$+: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$

$(x,y) \mapsto x + y$

$\mathbf{R} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$

$(\lambda,x) \mapsto \lambda x$

được gọi là một *không gian vectơ* nếu thoả mãn các tiên đề sau đây:

$V_1$: $(x + y) + z = x + (y + z) \qquad \forall x, y, z \in \mathbf{V}$

$V_2$: $x + y = y + z$ , $\forall x, y \in \mathbf{V}$

$V_3$: Có phần tử $0 \in \mathbf{V}$ sao cho $x + 0 = 0 + x$ , $\forall x \in \mathbf{V}$

$V_4$: Với mỗi $x \in \mathbf{V}$ có phần tử $-x \in \mathbf{V}$ sao cho $x + (-x) = (-x) + x = 0$

$N_1$: $k(lx) = (kl)x$, $\forall k, l \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{V}$

$N_2$: $(k+l)x = kx + lx$

$N_3$: $k(x + y) = kx + ky$, $\forall k \in \mathbf{R}$, $x, y \in \mathbf{V}$

$N_4$: $lx = x$

Các phần tử thuộc tập **V** gọi là các vectơ và khi $x \in \mathbf{V}$ thì ký hiệu là $\bar{x}$ và đọc là *vectơ x.*

***b. Ví dụ***

*1) Trên tập* $\mathbf{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3)\ ;\ x_i \in \mathbf{R}\ ,\ i = 1, 2, 3\}$ ta định nghĩa phép cộng:

$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

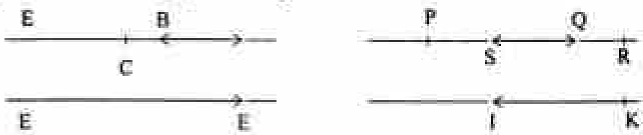
và phép nhân với một số thực:

$\lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$

Dễ thử lại rằng $\mathbf{R}^3$ cùng với hai phép toán trên là một không gian vetơ.

*2) Trong mô hình vật lý hình học Ơcơlit ta hiểu*

2.1) *Vectơ* là một cặp điểm (A, B) có thứ tự và ký hiệu $\overline{AB}$, A gọi là *điểm đầu*, B gọi là *điểm cuối* của vectơ. Hai vectơ $\overline{AB}$ và $\overline{CD}$ được gọi là *cùng phương* nếu đường thẳng AB song song hoặc trùng với đường thẳng CD. Hai vectơ cùng phương $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ gọi là *cùng hướng* nếu hướng đi từ điểm đầu đến cuối như nhau, còn ngược lại thì gọi là hai vectơ *ngược hướng*.




$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}$ cùng hướng

$\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS}$ ngược hướng

$\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{KI}$ ngược hướng

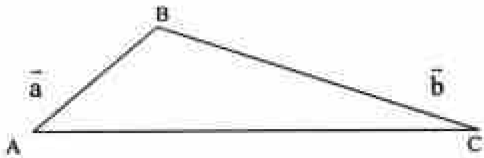
*Hình 5*

Độ dài đoạn thẳng AB được gọi là *độ dài của* $\overrightarrow{AB}$ và ký hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, như vậy: $|\overrightarrow{AB}| = AB$.

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ được gọi là *bằng nhau* nếu $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ và $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ cùng hướng.

Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau gọi là *vectơ không* và ký hiệu $\vec{0}$. Vectơ có độ dài bằng 1 gọi là *vectơ đơn vị*. Người ta còn dùng các chữ cái thường trên đó có mũi tên để ký hiệu vectơ: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}$ ...

2.2) Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ta định nghĩa vectơ mới $\vec{a} + \vec{b}$ bằng cách sau đây. Từ một điểm A tuỳ ý xác định được điểm B sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và điểm C sao cho $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, ta có vectơ mới $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.




Hình 6

Vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ gọi là *tổng của hai vectơ* $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Dễ thấy định nghĩa đó không phụ thuộc vào việc chọn điểm A (nếu thay cho A ta chọn A' thì xác định được B' và C' sao cho $\overrightarrow{A'B'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{B'C'} = \vec{b}$, và khi đó $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$).

Từ định nghĩa trên ta thấy với ba điểm tuỳ ý trong không gian M, N, P ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}$.

Ta cũng dễ nhận thấy các tính chất sau đây của phép cộng vectơ. Với bất kỳ các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ta có:

i) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán)

ii) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính chất kết hợp)

iii) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

iv) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$, trong đó $-\vec{a}$ là vectơ có cùng độ dài, cùng phương nhưng ngược hướng với $\vec{a}$. Vectơ gọi là *vectơ đối* của vectơ $\vec{a}$.

2.3) Cho vectơ $\vec{a}$ và một số thực k, ta định nghĩa vectơ mới $k\vec{a}$ như sau:

i) $|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$

ii) $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng nếu $k > 0$ và ngược hướng nếu $k < 0$.

Nếu k = 0 ta định nghĩa $0.\vec{a}=\vec{0}$ Vectơ $k\vec{a}$ còn gọi là tích của số k và vectơ $\vec{a}$.

Dễ thấy các tính chất sau đây của phép nhân vectơ với một số thực.

i) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

ii) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

iii) $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

iv) $1.\vec{a}=\vec{a}$

2.4) Ký hiệu V là tập hợp các vectơ trong không gian, như vậy tập hợp V cùng với hai phép toán cộng vectơ và nhân vectơ với một số thực là một không gian vectơ.

***c. Cơ sở và số chiều của không gian vectơ***

*1) Sự phụ thuộc tuyến tính và độc lập tuyến tính*

Cho không gian vectơ V. Nếu xét đồng thời các vectơ $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ của V thì ta gọi chúng là một *hệ vectơ* và vectơ $k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+\ldots+k_n\vec{a}_n$ với $k_i \in \mathbf{R}$ tuỳ ý, i = 1, 2, ..., n, gọi là một *tổ hợp tuyến tính* của các vectơ $\vec{a}_i$, các $k_i$ gọi là các *hệ số*.

Hệ vectơ $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n\}$ gọi là hệ vectơ *độc lập tuyến tính* nếu mỗi tổ hợp tuyến tính của chúng là vectơ không khi và chỉ khi các hệ số đều bằng 0.

$$k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+\ldots+k_n\vec{a}_n=\vec{0} \Leftrightarrow k_1=k_2=\ldots=k_n=0$$

Hệ vectơ không độc lập tuyến tính gọi là *hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính*.

*2) Cơ sở không gian của vectơ*

Hệ vectơ $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ được gọi là *cơ sở* của không gian vectơ V nếu:

i) $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính.

ii) Với mỗi vectơ $\vec{x} \in V$, có duy nhất các số $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sao cho $\vec{x} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n$. Bộ số $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ gọi là toạ độ của vectơ $\vec{x}$ đối với cơ sở $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$.

Người ta chứng minh được rằng nếu không gian vectơ V có một cơ sở gồm n vectơ thì mọi cơ sở khác của nó cũng có đúng n vectơ. Số không đổi n ấy gọi là *chiều* của không gian vectơ V và ký hiệu $\dim V = n$.

*3) Ví dụ*

Ta lấy các ví dụ minh hoạ cho các khái niệm trên trong không gian vectơ được xây dựng từ mô hình vật lý của hình học Ơcơlít.

*Ví dụ 1.* Hệ hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương là phụ thuộc tuyến tính. Nếu $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ thì $\overrightarrow{CD} = \frac{CD}{AB}\overrightarrow{AB}$.

Nếu $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ thì tập hợp các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ có dạng $k\overrightarrow{AB}$ và tập hợp này làm thành không gian vectơ một chiều, mọi vectơ khác không là cơ sở của không gian này.

*Ví dụ 2.* Ba vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{CD}, \vec{w} = \overrightarrow{EF}$ gọi là *đồng phẳng* nếu ba đường thẳng AB, CD, EF cùng song song với một mặt phẳng nào đó.

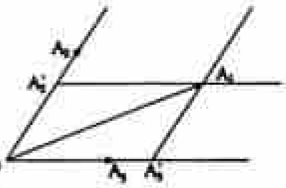
Ta có: ba vectơ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ đồng phẳng khi và chỉ khi chúng phụ thuộc tuyến tính.

Thật vậy, nếu $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ phụ thuộc tuyến tính thì có tổ hợp tuyến tính $k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + k_n\vec{a}_3 = \vec{0}$ mà các $k_i$ không đồng thời bằng 0. Giả sử $k_1 \neq 0$ thì $\vec{a}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\vec{a}_2 - \frac{k_3}{k_1}\vec{a}_3 = \lambda_1\vec{a}_2 + \lambda_2\vec{a}_3$.

Nếu $\vec{a}_2$ và $\vec{a}_3$ cùng phương thì hiển nhiên ba vectơ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ cùng phương và do đó chúng đồng phẳng.

Trường hợp $\vec{a}_2$ và $\vec{a}_3$ không cùng phương. Từ một điểm O nào đó, xét vectơ $\overline{OA_2} = \vec{a}_2, \overline{OA_3} = \vec{a}_3$. Khi đó ba điểm O, $A_2$, $A_3$ không thẳng hàng. Gọi α là mặt phẳng đi qua ba điểm O, $A_2$, $A_3$. Lấy $\overline{OA'_2} = \lambda\overline{a_2}$, $\overline{OA'_3} = \lambda\overline{a_3}$ thì $A'_2$ nằm trên đường thẳng $OA_2$, điểm $A'_3$ nằm trên đường thẳng $OA_3$. Do đó vì vectơ $\vec{a}_1 = \overline{OA_1} = \overline{OA'_2} + \overline{OA'_3}$ nên đường thẳng $OA_1$ nằm trên mặt phẳng α. Vậy ba vectơ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ đồng phẳng.

Ngược lại, giả sử $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ và $\vec{a}_3$ đồng phẳng. Nếu hai trong ba vectơ đó cùng phương thì hiển nhiên ba vectơ đó phụ thuộc tuyến tính. Giả sử không có hai vectơ nào trong ba vectơ đó cùng phương, từ một điểm O tuỳ ý xét các vectơ $\overline{OA_1} = \vec{a}_1$, $\overline{OA_2} = \vec{a}_2$, $\overline{OA_3} = \vec{a}_3$ thì bốn điểm O, $A_1$, $A_2$, $A_3$ cùng thuộc một mặt phẳng α. Trong mặt phẳng α ta dựng hình bình hành có đường chéo $OA_1$ và hai cạnh nằm trên các đường $OA_2$, $OA_3$.



Hình 7

Từ hình bình hành $OA'_2A_1A'_3$ dựng được ta có:

$$\overline{OA_1} = \overline{OA'_2} + \overline{OA'_3} + \lambda_1\overline{OA_2} + \lambda_2\overline{OA_3}\text{, tức là } \vec{a}_1 = \lambda_1\vec{a}_2 + \lambda_2\vec{a}_3.$$

Từ đó suy ra ba vectơ $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ và $\vec{a}_3$ phụ thuộc tuyến tính.

Nhận xét rằng nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương thì tập hợp các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ mà ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng lập thành một không gian vectơ hai chiều, mọi cặp vectơ không cùng phương đều là cơ sở của không gian này.