Xác Suất Thống Kê

Ngày 16 tháng 2 năm 2014

XÁC SUẤT & THỐNG KÊ
ĐẠI HỌC
PHÂN PHỐI CHƯƠNG TRÌNH

PHẦN I. LÝ THUYẾT XÁC SUẤT
(Probability theory)

PHẦN II. LÝ THUYẾT THỐNG KÊ

(Statistical theory)

Chương 5. Mẫu thống kê và Ước lượng tham số
Chương 6. Kiểm định Giả thuyết Thống kê

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Phú Vinh – *Giáo trình Xác suất – Thống kê và Ứng dụng* – NXB Thống kê.
2. Đinh Ngọc Thanh – *Giáo trình Xác suất Thống kê* – ĐH Tôn Đức Thắng Tp.HCM.
3. Đặng Hùng Thắng – *Bài tập Xác suất; Thống kê* – NXB Giáo dục.
4. Lê Sĩ Đồng – *Xác suất – Thống kê và Ứng dụng* – NXB Giáo dục.
5. Đào Hữu Hồ – *Xác suất Thống kê* – NXB Khoa học & Kỹ thuật.

6. Đậu Thế Cấp – *Xác suất Thống kê – Lý thuyết và các bài tập* – NXB Giáo dục.

7. Phạm Xuân Kiều – *Giáo trình Xác suất và Thống kê* – NXB Giáo dục.

8. Nguyễn Cao Văn – *Giáo trình Lý thuyết Xác suất & Thống kê* – NXB Ktế Quốc dân.

9. Nguyễn Đức Phương – *Xác suất & Thống kê* – Lưu hành nội bộ.

10. F.M.Dekking – *A modern introduction to Probability and Statistics* – Springer Publication (2005).

➤ Bổ túc về Đại số Tổ hợp

1. Tính chất của các phép toán $\cap, \cup$

a) Tính giao hoán:

$$A \cap B = B \cap A,\ A \cup B = B \cup A.$$

b) Tính kết hợp:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

c) Tính phân phối:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

d) Tính đối ngẫu (De–Morgan):

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

➢ Bổ túc về Đại số Tổ hợp

2. Quy tắc nhân

- Giả sử một công việc nào đó được chia thành k giai đoạn. Có n_1 cách thực hiện giai đoạn thứ 1,..., có n_k cách thực hiện giai đoạn thứ k. Khi đó ta có:

  $n = n_1 \ldots n_k$ cách thực hiện toàn bộ công việc.

- Giả sử có k công việc $A_1, \ldots, A_k$ khác nhau. Có n_1 cách thực hiện A_1,..., có n_k cách thực hiện A_k. Khi đó ta có:

  $n = n_1 \ldots n_k$ cách thực hiện toàn bộ k công việc đó.

3. Quy tắc cộng

- Giả sử một công việc có thể thực hiện được k cách (trường hợp) loại trừ lẫn nhau: cách thứ nhất cho n_1 kết quả,..., cách thứ k cho n_k kết quả. Khi đó việc thực hiện công việc trên cho $n = n_1 + \ldots + n_k$ kết quả.

➢ Bổ túc về Đại số Tổ hợp

4. Phân biệt cách chọn *k* phần tử từ tập có *n* phần tử

Có 4 cách chọn ra *k* phần tử từ tập có *n* phần tử, *n* phần tử này luôn được coi là khác nhau mặc dù bản chất của chúng có thể giống nhau. Đó là:

- Chọn 1 lần ra *k* phần tử và *không* để ý đến thứ tự của chúng (Tổ hợp).
- Chọn 1 lần ra *k* phần tử và để ý đến thứ tự của chúng (Chỉnh hợp).
- Chọn *k* lần, mỗi lần 1 phần tử và *không hoàn lại* (số cách chọn như Chỉnh hợp).
- Chọn *k* lần, mỗi lần 1 phần tử và *có hoàn lại* (Chỉnh hợp lặp).

➢ Bổ túc về Đại số Tổ hợp

a) Tổ hợp

- Tổ hợp chập k của n phần tử $(0 \le k \le n)$ là một nhóm (bộ) *không phân biệt thứ tự* gồm k phần tử khác nhau được chọn từ n phần tử đã cho.
  Số tổ hợp chập k của n phần tử được ký hiệu và tính theo công thức: $\boxed{C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}}$. Quy ước: $0! = 1$.

  Tính chất: $C_n^k = C_n^{n-k}$; $\quad C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

b) Chỉnh hợp

- Chỉnh hợp chập k của n phần tử $(0 \le k \le n)$ là một nhóm (bộ) *có thứ tự* gồm k phần tử khác nhau được chọn từ n phần tử đã cho.

➢ Bổ túc về Đại số Tổ hợp

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử được ký hiệu và tính theo công thức:

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}.$$

c) Chỉnh hợp lặp

- Chỉnh hợp lặp k của n phần tử là một nhóm (bộ) *có thứ tự* gồm phần k tử *không nhất thiết* khác nhau được chọn từ n phần tử đã cho.
  Số các chỉnh hợp lặp k của n phần tử là $\boldsymbol{n^k}$.

Nhận xét:

Tổ hợp	Chỉnh hợp	Chỉnh hợp lặp

$$C_n^k < A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) < n^k$$

PHẦN I. LÝ THUYẾT XÁC SUẤT
(*Probability theory*)

Chương 1. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

§1. Biến cố ngẫu nhiên
§2. Xác suất của biến cố
§3. Công thức tính xác suất

....

§1. BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN

1.1. Hiện tượng ngẫu nhiên

Người ta chia các hiện tượng xảy ra trong đời sống hàng này thành hai loại: *tất nhiên* và *ngẫu nhiên*.

➢ Chương 1. Xác suất của Biến cố

- Những hiện tượng mà khi được thực hiện trong cùng một điều kiện sẽ cho ra kết quả như nhau được gọi là những hiện tượng tất nhiên.

  Chẳng hạn, đun nước ở điều kiện bình thường đến 100^0C thì nước sẽ bốc hơi; một người nhảy ra khỏi máy bay đang bay thì người đó sẽ rơi xuống là tất nhiên.

- Những hiện tượng mà cho dù khi được thực hiện trong cùng một điều kiện vẫn có thể sẽ cho ra các kết quả khác nhau được gọi là những hiện tượng ngẫu nhiên.

  Chẳng hạn, gieo một hạt lúa ở điều kiện bình thường thì hạt lúa có thể nảy mầm cũng có thể không nảy mầm.

  Hiện tượng ngẫu nhiên chính là đối tượng khảo sát của lý thuyết xác suất.

➢ Chương 1. Xác suất của Biến cố

1.2. Phép thử và biến cố

- Để quan sát các hiện tượng ngẫu nhiên, người ta cho các hiện tượng này xuất hiện nhiều lần. Việc thực hiện một quan sát về một hiện tượng ngẫu nhiên nào đó, để xem hiện tượng này có xảy ra hay không được gọi là một ***phép thử*** (test).
- Khi thực hiện một phép thử, ta không thể dự đoán được kết quả xảy ra. Tuy nhiên, ta có thể liệt kê tất cả các kết quả có thể xảy ra.
  - Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là ***không gian mẫu*** của phép thử đó. Ký hiệu là Ω.

➤ Chương 1. Xác suất của Biến cố

- Mỗi phần tử $\omega \in \Omega$ được gọi là một ***biến cố sơ cấp***.
- Mỗi tập $A \subset \Omega$ được gọi là một ***biến cố*** (events).

VD 1. Xét một sinh viên thi hết môn XSTK, thì hành động của sinh viên này là một phép thử.

Tập hợp tất cả các điểm số:

$$\Omega = \{0;\ 0,5;\ 1;\ 1,5; \ldots;\ 9,5;\ 10\}$$

mà sinh viên này có thể đạt là không gian mẫu.

Các phần tử:

$$\omega_1 = 0 \in \Omega,\ \omega_2 = 0,5 \in \Omega, \ldots,\ \omega_{21} = 10 \in \Omega$$

là các biến cố sơ cấp.

Các tập con của Ω:

➢ Chương 1. Xác suất của Biến cố

$$A = \{4;\ 4,5;\ldots;\ 10\},\ B = \{0;\ 0,5;\ldots;\ 3,5\},\ldots$$

là các biến cố.

Các biến cố A, B có thể được phát biểu lại là:

- A : "sinh viên này thi đạt môn XSTK";
- B : "sinh viên này thi hỏng môn XSTK".

- Trong một phép thử, biến cố mà chắc chắn sẽ xảy ra được gọi là ***biến cố chắc chắn***. Ký hiệu là Ω.
  Biến cố không thể xảy ra được gọi là biến cố ***rỗng***. Ký hiệu là $\varnothing$.

VD 2. Từ nhóm có 6 nam và 4 nữ, ta chọn ngẫu nhiên ra 5 người. Khi đó, biến cố "*chọn được ít nhất 1 nam*" là chắc chắn; biến cố "*chọn được 5 người nữ*" là rỗng.

➢ Chương 1. Xác suất của Biến cố

1.3. Quan hệ giữa các biến cố

a) Quan hệ tương đương

Trong 1 phép thử, biến cố A được gọi là *kéo theo* biến cố B nếu khi A xảy ra thì B xảy ra. Ký hiệu là $A \subset B$.

Hai biến cố A và B được gọi là *tương đương* với nhau nếu $A \subset B$ và $B \subset A$. Ký hiệu là $A = B$.

VD 3. Cho trước 5 hộp trong đó 2 hộp có quà. Ông X mở lần lượt 3 hộp. Gọi:

A_i: "hộp được mở lần thứ i có quà" $(i = 1, 2, 3)$;

B: "Ông X mở được hộp có quà";

C: "Ông X mở được 2 hộp có quà";

D: "Ông X mở được ít nhất 1 hộp có quà".

Khi đó, ta có: $A_i \subset B$, $B \not\subset C$, $C \subset B$ và $B = D$.

➢ Chương 1. Xác suất của Biến cố

b) Tổng và tích của hai biến cố

- Tổng của hai biến cố A và B là một biến cố, biến cố này xảy ra khi A xảy ra hay B xảy ra trong một phép thử (ít nhất một trong hai biến cố xảy ra).
  Ký hiệu là $A \cup B$ hay $A + B$.
- Tích của hai biến cố A và B là một biến cố, biến cố này xảy ra khi cả A và B cùng xảy ra trong một phép thử. Ký hiệu là $A \cap B$ hay AB.

VD 4. Một người thợ săn bắn hai viên đạn vào một con thú và con thú sẽ chết nếu nó bị trúng cả hai viên đạn.

Gọi A_i : "viên đạn thứ i trúng con thú" ($i = 1, 2$);

A : "con thú bị trúng đạn"; B : "con thú bị chết".

➢ Chương 1. Xác suất của Biến cố

Khi đó, ta có: $A = A_1 \cup A_2$ và $B = A_1 \cap A_2$.

VD 5. Xét phép thử gieo hai hạt lúa.

Gọi N_i : "hạt lúa thứ i nảy mầm";

K_i : "hạt lúa thứ i không nảy mầm" ($i = 1, 2$);

A : "có 1 hạt lúa nảy mầm".

Khi đó, không gian mẫu của phép thử là:

$$\Omega = \{K_1K_2;\ N_1K_2;\ K_1N_2;\ N_1N_2\}.$$

Các biến cố tích sau đây là các biến cố sơ cấp:

$$\omega_1 = K_1K_2,\ \omega_2 = N_1K_2,\ \omega_3 = K_1N_2,\ \omega_4 = N_1N_2.$$

Biến cố A không phải là sơ cấp vì $A = N_1K_2 \cup K_1N_2$.

➢ Chương 1. Xác suất của Biến cố

c) Biến cố đối lập

Trong 1 phép thử, biến cố $\overline{A}$ được gọi là biến cố *đối lập* (hay biến cố bù) của biến cố A nếu và chỉ nếu khi A xảy ra thì $\overline{A}$ không xảy ra và ngược lại, khi A không xảy ra thì $\overline{A}$ xảy ra. Vậy ta có

$$\boxed{\overline{A} = \Omega \setminus A}$$

VD 6. Từ 1 lô hàng chứa 12 chính phẩm và 6 phế phẩm, người ta chọn ngẫu nhiên ra 15 sản phẩm.

Gọi A_i : "chọn được i chính phẩm", $i = 9, 10, 11, 12$.

Ta có không gian mẫu là:

$$\Omega = A_9 \cup A_{10} \cup A_{11} \cup A_{12},$$

và $\overline{A}_{10} = \Omega \setminus A_{10} = A_9 \cup A_{11} \cup A_{12}$.

➢ Chương 1. Xác suất của Biến cố

1.4. Hệ đầy đủ các biến cố

a) Hai biến cố xung khắc

Hai biến cố A và B được gọi là *xung khắc với nhau* trong một phép thử nếu A và B không cùng xảy ra.

VD 7. Hai sinh viên A và B cùng thi môn XSTK.

Gọi A : "sinh viên A thi đỗ";

B : "chỉ có sinh viên B thi đỗ";

C : "chỉ có 1 sinh viên thi đỗ".

Khi đó, A và B là xung khắc; B và C không xung khắc.

Chú ý

Trong VD 7, A và B xung khắc nhưng không đối lập.

➢ Chương 1. Xác suất của Biến cố

b) Hệ đầy đủ các biến cố

Trong một phép thử, họ gồm n biến cố $\{A_i\}$, $i = \overline{1, n}$ được gọi là hệ đầy đủ khi và chỉ khi có ***duy nhất*** biến cố A_{i_0}, $i_0 \in \{1; 2; \ldots; n\}$ của họ xảy ra. Nghĩa là:

1) $A_i \cap A_j = \varnothing, \forall\ i \neq j$ và 2) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

VD 8. Trộn lẫn 4 bao lúa vào nhau rồi bốc ra 1 hạt.

Gọi A_i: "hạt lúa bốc được là của bao thứ i", $i = \overline{1, 4}$.

Khi đó, hệ $\{A_1; A_2; A_3; A_4\}$ là đầy đủ.

Chú ý

Trong 1 phép thử, hệ $\{A; \overline{A}\}$ là đầy đủ với A tùy ý.

…………………………………………………………