Chương 5
LÝ THUYẾT CHUỖI

Huỳnh Văn Kha

Đại Học Tôn Đức Thắng

Toán C2 - MS: C01010

Nội dung

1. Chuỗi số hội tụ – Chuỗi hình học $\sum ar^n$
2. Các tiêu chuẩn hội tụ
   - Tiêu chuẩn tích phân – Chuỗi $\sum 1/n^p$
   - Các tiêu chuẩn so sánh
   - Chuỗi đan dấu - Tiêu chuẩn Leibnitz
   - Hội tụ tuyệt đối – Tiêu chuẩn trị tuyệt đối
   - Tiêu chuẩn tỷ số (của d'Alembert)
   - Tiêu chuẩn căn số (của Cauchy)
   - Một số bài tập
3. Chuỗi hàm
   - Chuỗi hàm - miền hội tụ
   - Chuỗi lũy thừa, bán kính hội tụ, khoảng hội tụ

Chuỗi số

Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, biểu thức $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$ được gọi là một *chuỗi số*.

Ký hiệu: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hoặc $\sum a_n$.

Ví dụ 1.

- Với $a_n = n$, ta có chuỗi
$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n + \ldots.$$
- Với $a_n = \frac{1}{2^n}$, ta có chuỗi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \ldots.$$

Tổng riêng phần - Tổng chuỗi

Các *tổng riêng phần* của chuỗi $\sum a_n$ được định nghĩa là:

$$s_1 = a_1, \qquad s_2 = a_1 + a_2, \qquad s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\ldots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, thì ta nói $\sum a_n$ *có tổng là s* và viết

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Như vậy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.

Ví dụ 2. Tính riêng phần và tổng (nếu có) các chuỗi:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ 2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.

Chuỗi số hội tụ

- Nếu tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tồn tại và hữu hạn, ta nói chuỗi này *hội tụ*.
- Ngược lại, nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$ hoặc tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ không tồn tại, ta nói chuỗi này *phân kỳ*.

Ví dụ 3. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau đây.

1. Các chuỗi số trong Ví dụ 2.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k}{k+1}$

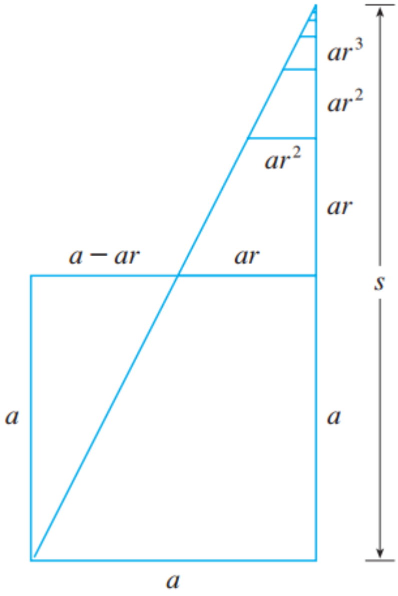
Chuỗi hình học

Cho $a \neq 0, r \in \mathbb{R}$, *chuỗi hình học* là chuỗi số có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \ldots.$$

Với giá trị nào của a và r thì chuỗi hình học hội tụ?

- Nếu $|r| < 1$ thì chuỗi hình học *hội tụ*, và khi đó
$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}.$$
- Ngược lại, nếu $|r| \geq 1$ thì chuỗi hình học *phân kỳ*.


ar^3
ar^2
ar^2
ar
a − ar
ar
s
a
a
a

Ví dụ 4. Các chuỗi số sau có hội tụ không? Tính tổng (nếu có) của nó.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$
2. $4 - \frac{8}{3} + \frac{16}{9} - \frac{32}{27} + \cdots$

Ví dụ 5. Tính tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, với $|x| < 1$.

Ví dụ 6. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây thành dạng phân số.

1. $2.3\overline{17} = 2.3171717...$
2. $0.\overline{9} = 0.99999...$

Các tính chất

TC1. Nếu $\sum a_n$ *hội tụ* thì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Chú ý. Chiều ngược lại chưa chắc đúng. *Nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *thì* $\sum a_n$ *cũng có thể hội tụ, cũng có thể phân kỳ.*
Ví dụ dãy $1/n \to 0$ nhưng $\sum 1/n$ phân kỳ (đọc thêm).

(Kiểm tra sự phân kỳ) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *không tồn tại* hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ*.

Ví dụ 7. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{2n^2+n}$.

TC2. Nếu các chuỗi $\sum a_n$, $\sum b_n$ đều hội tụ thì các chuỗi $\sum ca_n$ $(c \in \mathbb{R})$, $\sum(a_n + b_n)$ và $\sum(a_n - b_n)$ cũng hội tụ, và:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

Ví dụ 8. Tính tổng (nếu có) của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n(n+1)} + \frac{1}{3^n}\right].$$