Chương 2
HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Huỳnh Văn Kha

Đại Học Tôn Đức Thắng

Toán C2 - MS: C01010

Nội dung

Hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa

Hệ phương trình đại số tuyến tính là hệ có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Trong đó:

x_i là các *ẩn số*,

a_{ij} là các *hệ số*,

b_j là các *hệ số tự do*

Đặt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Thì hệ được viết lại: $AX = B$. Ta gọi:

- A là *ma trận hệ số*
- X là *ma trận ẩn*
- B là *ma trận hệ số tự do*
- $\overline{A} = (A|B)$ là *ma trận hệ số mở rộng*

Một *nghiệm* là 1 vector $(c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ mà khi thay $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$ thì tất cả phương trình đều thỏa.

Phương pháp Gauss

- Dùng phép biến đổi sơ cấp trên dòng để *đưa* $\overline{A} = (A|B)$ *về dạng bậc thang*. Suy ra nghiệm.

Ví dụ: Giải các hệ sau

$$1)\ \begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \\ -x_1 - 2x_3 = -2 \\ -x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}$$

3) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$

Định lý Kronecker – Capelli

Cho hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình, n ẩn, với ma trận hệ số mở rộng $\overline{A} = (A|B)$. *Ta có:*

- *Nếu* $r(A) < r\left(\overline{A}\right)$ *thì hệ vô nghiệm*
- *Nếu* $r(A) = r\left(\overline{A}\right) = n$ *thì hệ có nghiệm duy nhất*
- *Nếu* $r(A) = r\left(\overline{A}\right) < n$ *thì hệ vô số nghiệm*

4) $$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 7x_4 = -18 \\ 2x_1 + 6x_2 - 14x_3 - 5x_4 = -13 \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 - 8x_3 - 5x_4 = -13 \\ -x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 8 \end{cases}$$

Nếu $A \in \mathcal{M}_n$ thì:

hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow det(A) \neq 0.$