Chương 3
TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

Huỳnh Văn Kha

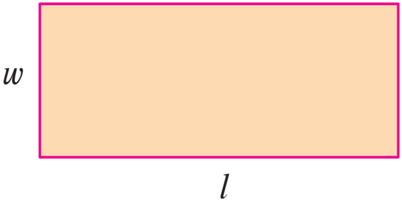
Khoa Toán – Thống Kê

Toán C1 - MS: C01009

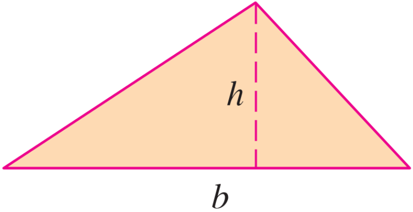
Nội dung

1. Tích phân
   - Bài toán tính diện tích – Định nghĩa tích phân
   - Định lý cơ bản của vi tích phân
   - Nguyên hàm
   - Đổi biến và tích phân từng phần – Tính tích phân
2. Tích phân suy rộng
   - Tích phân suy rộng loại I
   - Tích phân suy rộng loại II
   - Các tiêu chuẩn hội tụ
3. Ứng dụng của tích phân
   - Tính diện tích, thể tích vật thể tròn xoay, độ dài đường cong

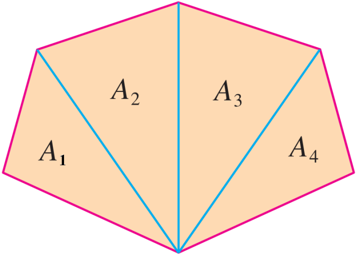
Bài toán tìm diện tích

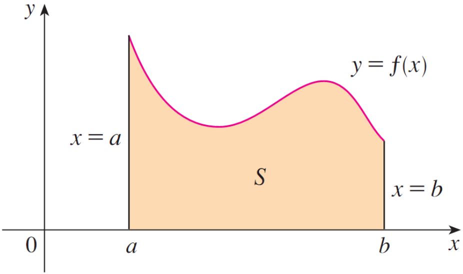


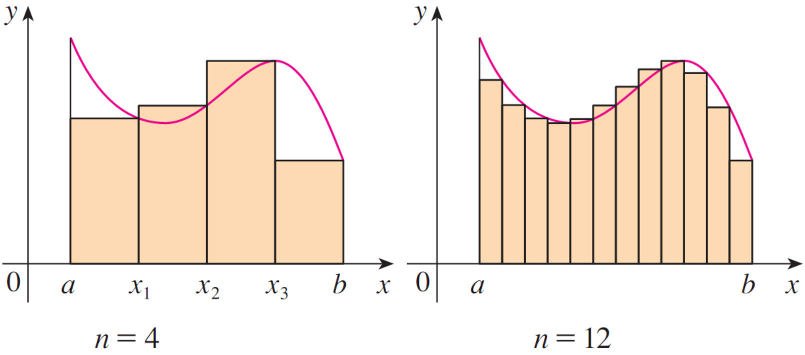
$$A = lw$$



$$A = \frac{1}{2} bh$$





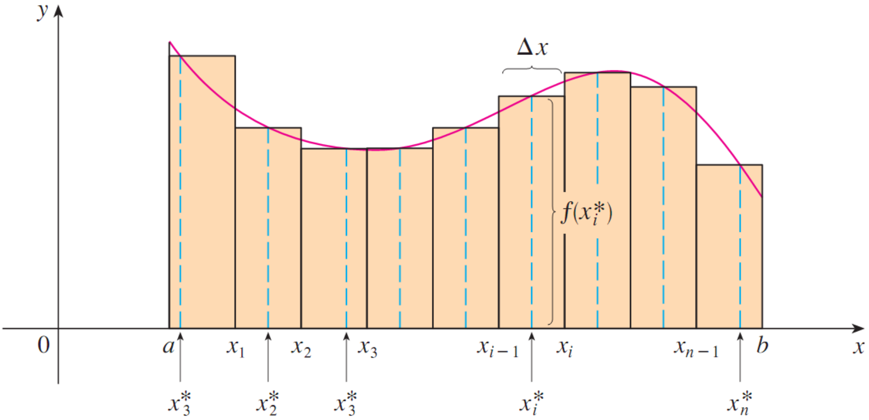


$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$

Thay vì lấy giá trị của f tại các đầu mút x_i như trên, ta có thể chọn tại điểm bất kỳ $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.

$$A = \lim_{n \to \infty} \left[f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x \right]$$



Định nghĩa tích phân

Định nghĩa tích phân

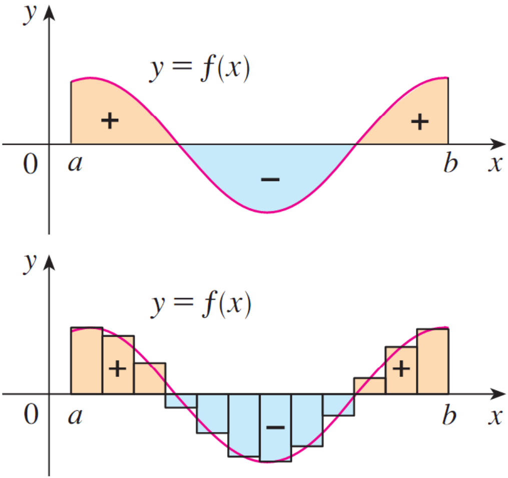
Cho f là hàm xác định trên $[a, b]$, ta chia $[a, b]$ thành n khoảng con với độ rộng $\Delta x = (b - a)/n$. Gọi $x_0(= a) < x_1 < x_2 < \cdots < x_n(= b)$ là các đầu mút của của các khoảng con đó. Trên mỗi khoảng con ta lấy $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Thì *tích phân (xác định) của f từ a tới b* được định nghĩa là:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

nếu nó tồn tại.

Nếu tích phân của f tồn tại, ta nói f *khả tích*.

Ký hiệu dx chỉ nói lên rằng x là biến độc lập. Bản thân dx trong ký hiệu tích phân không mang nghĩa gì cả. Cho nên: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt = \dots$



Chú ý:

Nếu f *không dương* trên [a,b] thì tích phân chính là *tổng diện tích trên Ox* **trừ** *tổng diện tích dưới Ox*

Các tính chất của tích phân

$$\int_a^b k\mathrm{d}x = k(b-a) \text{ với } c \text{ là hằng số.}$$

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x; \qquad \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

Cho f, g khả tích trên $[a, b]$, $k \in \mathbb{R}$ khi đó:

1. $$\int_a^b [f(x) + kg(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + k\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$
2. Nếu $c \in (a, b)$ thì f cũng khả tích trên các khoảng $[a, c]$ và $[c, b]$. Và khi đó:
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

3. Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

   Suy ra nếu $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$ thì
   $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

4. Hàm $|f|$ khả tích và $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \geq \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$

Định lý

Nếu f liên tục trên $[a, b]$ hoặc chỉ gián đoạn (loại 1) tại một số hữu hạn các điểm, thì f khả tích trên $[a, b]$

Như vậy các hàm sơ cấp đều khả tích.

Định lý cơ bản của vi tích phân

Định lý cơ bản của vi tích phân 1

Cho f liên tục trên $[a, b]$, đặt: $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ $(a \leq x \leq b)$. Thì F *liên tục trên* $[a, b]$, *khả vi trên* (a, b) và $F'(x) = f(x)$.

Ví dụ: Tính đạo hàm của

1. $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1 + t^2}dt$.
2. $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^4} \frac{dt}{2 + \cos(e^t)}$.

Định lý cơ bản của vi tích phân 2 (Công thức Newton - Leibnitz)

Cho f liên tục trên $[a, b]$, thì:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Trong đó F là một *nguyên hàm* bất kỳ của f, nghĩa là $F'(x) = f(x)$.

Ví dụ:

$$\text{Tính } \int_0^{\pi/4} \sin x \, dx.$$

Nguyên hàm

- F được gọi là *nguyên hàm* của f nếu $F' = f$.
- Định lý cơ bản của phép tính vi tích phân khẳng định *sự tồn tại nguyên hàm của các hàm liên tục*.
- Nếu F là một nguyên hàm của f thì khi đó mọi nguyên hàm G của f đều có dạng $G(x) = F(x) + C$.
- Tập các nguyên hàm của f được ký hiệu là:
$$\int f(x)\mathrm{d}x$$
- Nguyên hàm còn được gọi là *tích phân bất định*.

Bảng một số nguyên hàm

1. $\displaystyle\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, với $a \neq -1$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\displaystyle\int e^x \, dx = e^x + C$
4. $\displaystyle\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\displaystyle\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
6. $\displaystyle\int \cos x \, dx = \sin x + C$

7. $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

8. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

9. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

10. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0$$

11. $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

12. $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0$$

Đổi biến

Quy tắc đổi biến cho tích phân bất định

Cho $u = g(x)$ là hàm khả vi, miền giá trị của nó là I, và f liên tục trên I. Khi đó:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

Nhờ công thức này mà người ta xem dx như là vi phân.

Ví dụ: Tính

1. $\displaystyle\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx$
2. $\displaystyle\int x^5 \sqrt{1 + x^2}\, dx$

Quy tắc đổi biến cho tích phân xác định

Giả sử g' là hàm liên tục trên $[a, b]$ và f liên tục trên miền xác định của $u = g(x)$. Khi đó:

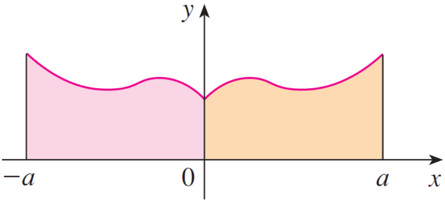
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

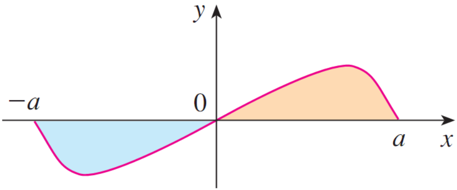
Ví dụ: Tính

3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$
4. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$

Giả sử f liên tục trên $[-a, a]$, ta có:

1. Nếu f *chẵn* (nghĩa là $f(-x) = f(x)$) thì
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$
2. Nếu f *lẻ* (nghĩa là $f(-x) = -f(x)$) thì
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$$





Tích phân từng phần

Từ công thức đạo hàm một tích, ta có công thức sau.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

hay
$$\int udv = uv - \int vdu$$

Ví dụ: Tính

1. $\displaystyle\int (2x-1)\cos(3x)\, dx$
2. $\displaystyle\int \ln x\, dx$
3. $\displaystyle\int e^{2x}\sin(3x)\, dx$

Áp dụng công thức Newton-Leibnitz ta được:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

hay
$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Ví dụ: Tính

4. $\displaystyle\int_0^2 \arctan\frac{x}{2}\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\,dx$

Một số ví dụ.

1. $\displaystyle\int \sin^5 x \cos^2 x \; dx$
2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} \; dx$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$, với $x > 3$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$
5. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3+x}{x-1} dx$
6. $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+x-2} \; dx$