Chương 1
VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

Huỳnh Văn Kha

Khoa Toán – Thống Kê

Toán C1 - MS: C01009

Nội dung

1. Giới hạn dãy số
   - Định nghĩa giới hạn – Một số tính chất
   - Số e – Các giới hạn cơ bản – Tính giới hạn
2. Giới hạn hàm số
   - Định nghĩa giới hạn
   - Tính chất – Giới hạn cơ bản – Các dạng vô định
3. Hàm số liên tục
4. Đạo hàm – Vi phân – Tính gần đúng
5. Ứng dụng của đạo hàm
   - Định lý giá trị trung bình
   - Quy tắc L'Hospital – Công thức Taylor, Mac Laurin

Dãy số

Tập hợp các con số được đánh số từ 1 (hoặc 0) đến ∞ gọi là một *dãy số*:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \quad (\text{hoặc } x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$$

Ví dụ:

- Dãy các tăng số nguyên dương: $1, 2, 3, \ldots$
- Dãy các giảm các số nguyên âm chẵn: $-2, -4, -6, \ldots$
- Dãy xác định bởi: $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, $\quad x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Dãy số là ánh xạ $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, với $x(n) \equiv x_n$

Ký hiệu: $\{x_n\}_{n\geq 1}$ (hoặc đơn giản $\{x_n\}$)

Giới hạn dãy số

- Giới hạn là khái niệm cơ bản của giải tích. Mỗi khái niệm của giải tích đều là một giới hạn theo một nghĩa nào đó.
- *Giới hạn của dãy số* có thể hiểu là "*phần tử cuối cùng*" của dãy số.
- Nói cách khác $\{x_n\}$ gọi là có giới hạn bằng a nếu x_n *đủ gần a khi n đủ lớn*.
- Ký hiệu: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ hoặc đơn giản $\lim x_n = a$.

Ví dụ: Tính giá trị dãy số sau tại $n = 5, 101, 500, 10^3, 10^8$ để dự đoán về giới hạn của nó.

$$x_n = \frac{2n+1}{n}.$$

Giới hạn dãy số (tt)

$\lim \dfrac{\ln n}{n} =$ a) 0 b) 1 c) -1 d) ∞

$\lim \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} =$ a) 2 b) 3 c) 4 d) 0

Dãy số x_n được gọi là *có giới hạn bằng a* nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \varepsilon, \forall n > n_0$$

Dãy số x_n được gọi là *có giới hạn bằng* $+\infty$ nếu:

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n > M, \forall n > n_0$$

Tương tự cho $\lim x_n = -\infty$.

Nếu $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$ thì ta nói nó *hội tụ*, ngược lại gọi là *phân kỳ*.

Một số tính chất

Giới hạn của *tổng, hiệu, tích, thương, căn, ...* bằng *tổng, hiệu, tích, thương, căn, ... của giới hạn* (miễn là tính được). Ví dụ nếu $\lim x_n$ và $\lim y_n$ đều tồn tại thì:

- $\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n$
- $\lim(x_n y_n) = (\lim x_n)(\lim y_n)$
- $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim x_n}{\lim y_n}$ (với $y_n \neq 0$, $\lim y_n \neq 0$)
- $\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim x_n}$ (với $x_n \geq 0$, $\lim x_n \geq 0$)

Tiêu chuẩn giới hạn kẹp

Nếu $x_n \leq y_n \leq z_n$ mà $\lim x_n = \lim z_n = a$ thì $\lim y_n = a$

Dãy đơn điệu - Dãy bị chặn

Dãy $\{x_n\}$ gọi là *dãy tăng* nếu: $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Dãy $\{x_n\}$ gọi là *dãy giảm* nếu: $x_n \geq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Nếu $\{x_n\}$ là dãy tăng hoặc giảm thì ta nói $\{x_n\}$ *đơn điệu*.

Ví dụ: xét tính đơn điệu của các dãy số sau.

$$x_n = n^2, \qquad x_n = \frac{n+1}{n}, \qquad x_n = (-1)^n\sqrt{n+1}$$

$\{x_n\}$ gọi là *bị chặn trên* nếu: $\exists M \in \mathbb{R}, x_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.
$\{x_n\}$ gọi là *bị chặn dưới* nếu: $\exists N \in \mathbb{R}, x_n \geq N, \forall n \in \mathbb{N}$.
Nếu $\{x_n\}$ bị chặn trên và dưới thì ta nói nó *bị chặn*.

Ví dụ: Xét tính bị chặn của các dãy số trên.

Tiêu chuẩn Weierstrass – Số e

Tiêu chuẩn Weierstrass

Một dãy số *tăng và bị chận trên* thì hội tụ.
Một dãy số *giảm và bị chận dưới* thì hội tụ.

Xét dãy: $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Người ta chứng minh được nó là dãy tăng và bị chận trên. Suy ra nó hội tụ.

Ta định nghĩa $e = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Các giới hạn cơ bản

1. Nếu $a > 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^a} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^a = +\infty$.
2. Nếu $|a| < 1$ thì: $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

   Nếu $a > 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$.
3. Nếu $a > 1$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ thì: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$.
4. Nếu $a > 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

   Đồng thời $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
5. Giới hạn liên quan số e: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$

Tính giới hạn

Biến đổi đưa về giới hạn cơ bản, áp dụng các tính chất, sử dụng giới hạn kẹp, ...

Ví dụ: Tính các giới hạn các dãy số sau.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}$

   a) $3/4$ b) $4/3$ c) $1/2$ d) $+\infty$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n+3\sqrt{n}}-\sqrt{2n+1}\right)$

   a) 3 b) $3/2$ c) $3\sqrt{2}$ d) $3/(2\sqrt{2})$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n^2}+\sqrt[n]{n}+1}$

   a) 1 b) $1/2$ c) $1/3$ d) $+\infty$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\cdot 5^n - 2^n}{4^n + 2\cdot 5^n}$

a) 3/4 b) -1/2 c) $+\infty$ d) 3/2

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 3^n + n}{n^3 2^n + n^2 + 1}$

a) $+\infty$ b) 0 c) 3/2 d) 1

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n}$

a) 1 b) e^{-2} c) e^{-4} d) $e^{-\sqrt{2}}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sin\sqrt{n}}{n^2 + n - 1}$

a) 1 b) 0 c) $+\infty$ d) Không tồn tại

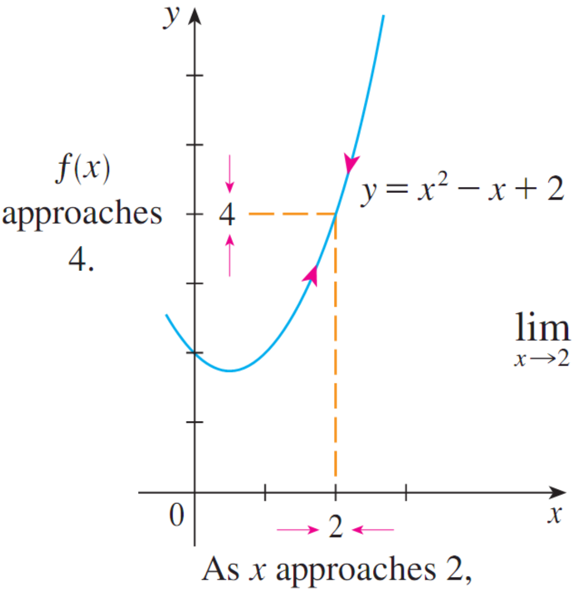
Giới hạn hàm số

Hàm số $y = f(x)$ được nói là *có giới hạn bằng L khi x tiến về a* nếu có thể làm cho *giá trị của f gần L tùy ý* bằng cách *cho x đủ gần a (nhưng khác a)*.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Ví dụ: xét hàm số $f(x) = x^2 - x + 2$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001



$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

Các chú ý:

- Giới hạn hàm số khi $x \to a$ chỉ *liên quan tới giá trị của f xung quanh a*, *không liên quan giá trị của f tại a*, thậm chí f *có thể không xác định tại a*.

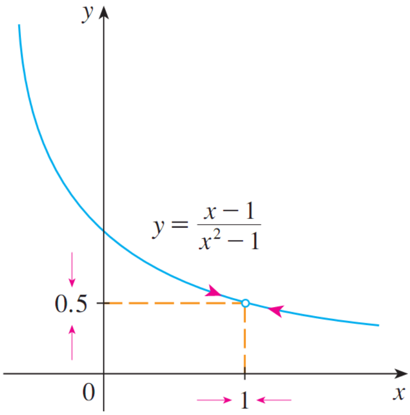
Ví dụ: Xét $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$

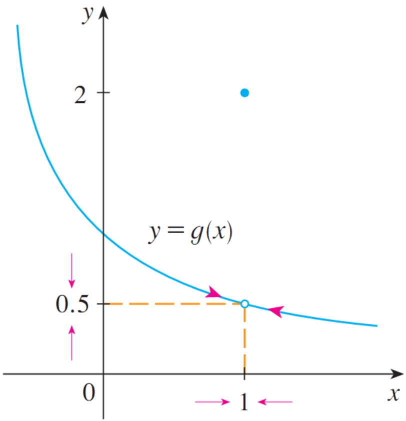
$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{if } x \neq 1 \\ 2 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

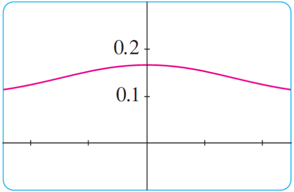




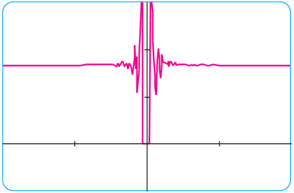
- Máy tính chỉ tính xấp xỉ nên giá có thể *tính sai* trong một số trường hợp. **Ví dụ:**

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 1.0	0.16228
± 0.5	0.16553
± 0.1	0.16662
± 0.05	0.16666
± 0.01	0.16667

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 0.0005	0.16800
± 0.0001	0.20000
± 0.00005	0.00000
± 0.00001	0.00000



$[-5, 5]$ by $[-0.1, 0.3]$

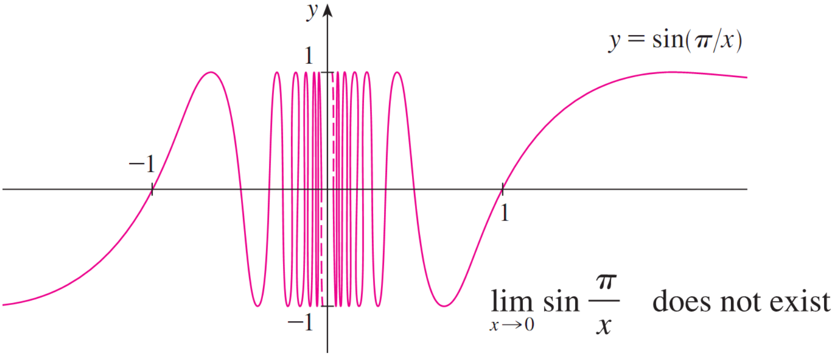


$[-10^{-6}, 10^{-6}]$ by $[-0.1, 0.3]$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \frac{1}{6}$$

- Tính các giá trị xung quanh chỉ có tác dụng *gợi ý* về giới hạn. Trong một số trường hợp không chính xác.

Ví dụ: Dự đoán giá trị $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{\pi}{x}$ bằng cách tính giá trị tại $x = \dfrac{1}{2}, x = \dfrac{1}{3}, x = 0.1, x = 0.01, x = 0.001$



Giới hạn hàm số (tt) – định nghĩa

Định nghĩa (chính xác) giới hạn hàm số

Cho f là hàm số xác định trên khoảng mở chứa a (có thể ngoại trừ tại a). Ta nói *giới hạn của $f(x)$ khi x tiến về a* là bằng L nếu:
Với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, đều có số $\delta > 0$ để cho:

$$\text{nếu } 0 < |x - a| < \delta \text{ thì } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Tương tự, ta có các khái niệm *giới hạn một phía*:

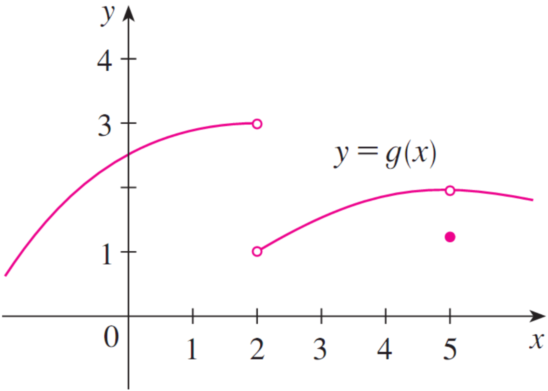
- *Giới hạn trái* của f khi x tiến về a là bằng L nếu giá trị của f có thể gần L bao nhiêu cũng được, miễn là x đủ gần a và $x < a$.
  Ký hiệu giới hạn trái: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

Một cách chính xác, *giới hạn của $f(x)$ khi x tiến về bên trái a* là bằng L nếu:
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

- *Giới hạn phải* của f khi x tiến về a là bằng L nếu giá trị của f có thể gần L bao nhiêu cũng được, miễn là x đủ gần a và $x > a$.
  Ký hiệu giới hạn phải: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

  Một cách chính xác, *giới hạn của $f(x)$ khi x tiến về bên phải a* là bằng L nếu:
  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Định lý: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$



Ví dụ 1: Xác định các giá trị sau:

(a) $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$ (b) $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$ (c) $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

(d) $\lim\limits_{x \to 5^-} g(x)$ (e) $\lim\limits_{x \to 5^+} g(x)$ (f) $\lim\limits_{x \to 5} g(x)$

Ví dụ 2: Tính (a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$