Chương 3
KHÔNG GIAN VECTOR $\mathbb{R}^n$

Huỳnh Văn Kha

Đại Học Tôn Đức Thắng

Toán C2 - MS: C01010

Nội dung

1. Một số khái niệm cơ bản
   - Khái niệm không gian vector, kg vector con
   - Không gian sinh bởi tập hợp
   - Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính
2. Cơ sở, số chiều, hạng của hệ vector
3. Tọa độ
   - Tọa độ vector, ma trận chuyển cơ sở

Không gian vector, kg vector con

Cho tập $V \neq \emptyset$, trên V có 2 phép toán: cộng $(+)$ và nhân với số thực. Nếu hai phép toán đó thỏa các tính chất sau thì ta nói V là một *không gian vector*:
$\forall u, v, w \in V; \ \forall h, k \in \mathbb{R}$

1. Giao hoán: $u + v = v + u$
2. Kết hợp: $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. Tồn tại phần tử $\mathbf{0}$ sao cho: $u + \mathbf{0} = u, \ \forall u \in V$
4. $\forall u \in V, \exists(-u) \in V : u + (-u) = \mathbf{0}$
5. $h(ku) = (hk)u$
6. $(h + k)u = hu + ku$
7. $h(u + v) = hu + hv$
8. $1.u = u$

Ví dụ:

- Tập các ma trận $\mathcal{M}_{m\times n}$ cùng với phép cộng ma trận và phép nhân số với ma trận là một kg vector
- Tập $\mathbb{R}^n$ với phép cộng và nhân:
  - $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$
  - $k\,(x_1, ..., x_n) = (kx_1, ..., kx_n)$

  lập thành không gian vector

Cho V là kg vector, $W \subset V$, $W \neq \emptyset$

Nếu $\forall u, v \in W$, $\forall k \in \mathbb{R}$, ta có: $u + v \in W$ và $ku \in W$.
Thì ta nói W là *không gian vector con* của V

Ký hiệu: $W \leq V$

Ví dụ: Xét xem W có là không gian vector con của V không?

1. $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$
2. $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x, 1) : x \in \mathbb{R}\}$
3. $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(a - 2b, a + b, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$
4. $V = \mathbb{R}^n$, W là tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn số: $AX = 0$ (với $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$)

Không gian sinh bởi tập hợp

Cho V là kgvt và $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$
Với mỗi bộ $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$, ta gọi vector
$v = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \cdots + k_n u_n$ là một *tổ hợp tuyến tính*
của các vector $u_1, u_2, \ldots, u_n$

Gọi W là *tập các tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, \ldots, u_n$* thì W là không gian vector con của V. Ta nói *W sinh bởi S* hay *S sinh ra W*

Ký hiệu: $W = \langle S \rangle = \langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle$

Ví dụ: Xét $W = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leq \mathbb{R}^4$,
với $u_1 = (2, 0, -1, 3)$, $u_2 = (0, 1, 2, -1)$, $u_3 = (2, 2, 3, 1)$

1. Các vector $v_1 = (-2, 3, 7, -6)$, $v_2 = (2, 1, 1, 1)$ có thuộc W không?
2. Tìm điều kiện để $v = (a, b, c, d) \in W$