Chương 4
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Huỳnh Văn Kha

Khoa Toán – Thống Kê

Toán C1 - MS: C01009

Nội dung

1. Định nghĩa phương trình vi phân
2. Một số loại phương trình vi phân cấp 1 thường gặp
   - PTVP cấp 1 dạng tách biến, tuyến tính, đẳng cấp
   - Một số bài tập
3. PTVP cấp 2
   - Khái niệm – Các PTVP cấp 2 giảm cấp được
4. PTVP tuyến tính cấp 2 thuần nhất
   - Một số khái niệm – Cấu trúc nghiệm
   - PTVP tuyến tính thuần nhất cấp 2 hệ số hằng
   - Bài toán giá trị đầu và bài toán giá trị biên
5. PTVP tuyến tính cấp 2 không thuần nhất
   - Cấu trúc nghiệm – Tìm nghiệm riêng

Định nghĩa PTVP

Phương trình vi phân là phương trình liên hệ giữa biến độc lập x với hàm cần tìm y và các đạo hàm của nó $y', y'', \ldots y^{(n)}$. Như vậy ptvp là phương trình có dạng

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

- *Cấp của ptvp* là cấp cao nhất của đạo hàm có trong phương trình.
- Nếu thay y bằng hàm số $y(x)$ vào ptvp, ta được đồng nhất thức, thì ta nói $y = y(x)$ là *nghiệm* của ptvp đó. *Giải ptvp* là tìm tất cả các nghiệm của nó.
- Đồ thị của một nghiệm $y = y(x)$ gọi là *đường cong tích phân*.

PTVP cấp 1

PTVP cấp 1 là phương trình có dạng: $F(x, y, y') = 0$.

Bài toán Cauchy là bài toán tìm nghiệm $y = y(x)$ của ptvp thỏa điều kiện đầu $y(x_0) = y_0$.

Ví dụ 1. Giải ptvp $y' = \sin x$ và tìm nghiệm của bài toán Cauchy $y' = \sin x,\ y(0) = 1$.

- Hàm số $y = \varphi(x, C)$ gọi là *nghiệm tổng quát* của ptvp trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ nếu với mọi $(x_0, y_0) \in D$ tồn tại duy nhất C_0 sao cho $y = \varphi(x, C_0)$ là nghiệm của bài toán Cauchy với điều kiện đầu $y(x_0) = y_0$.
- Nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát khi cho C một giá trị cụ thể gọi là *nghiệm riêng*.

Xét bài ptvp đã giải đối với đạo hàm $y' = f(x, y)$.

Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm

Nếu $f(x, y)$ liên tục trên $D \subset \mathbb{R}^2$, thì với mọi $(x_0, y_0) \in D$, bài toán $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ luôn có nghiệm $y = y(x)$ xác định trong một lân cận của x_0.

Ngoài ra nếu hàm số $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ liên tục trên D thì nghiệm đó là duy nhất.

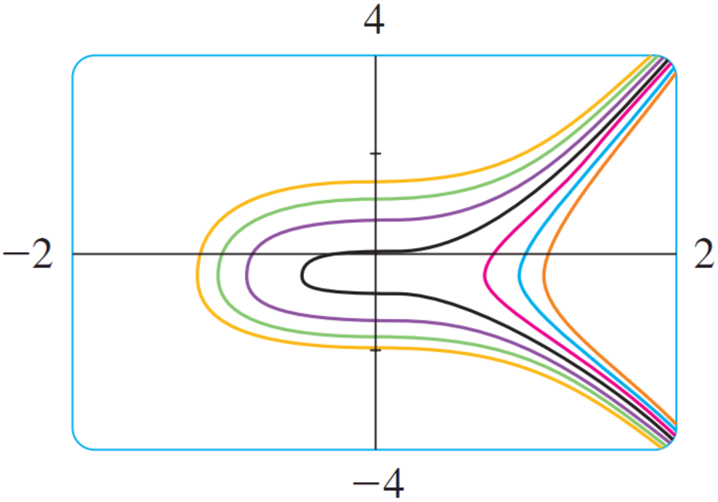
PTVP dạng tách biến

PTVP tách biến là ptvp có dạng: $y' = f(x)g(y)$.

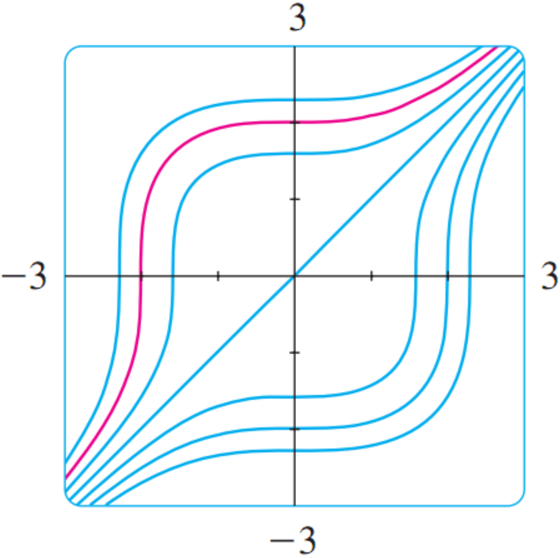
Cách giải. Với điều kiện $g(y) \neq 0$, chia hai vế cho $g(y)$, ta được $\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)dx$. Lấy tích phân 2 vế.

Ví dụ 2.

1. Giải ptvp $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x^2}{y^2}$, $y(0) = 2$.
2. Giải ptvp $y' = \dfrac{6x^2}{2y + \cos y}$.
3. Giải ptvp $\dfrac{x\mathrm{d}y}{1 + x^2} = \left(y + \dfrac{1}{y}\right)\mathrm{d}x$.



Nghiệm của $y' = \dfrac{6x^2}{2y + \cos y}$



Nghiệm của $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x^2}{y^2},\ y(0) = 2$

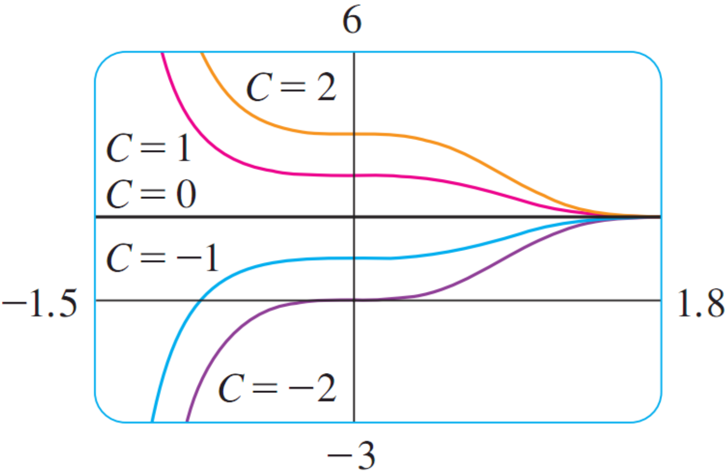
PTVP tuyến tính cấp 1

PTVP tuyến tính cấp 1 là ptvp: $y' + p(x)y = q(x)$.

Cách giải. Nhân 2 vế cho $e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$, pt trở thành: $\left(ye^{\int p(x)\mathrm{d}x}\right)' = q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$. Lấy nguyên hàm.

Ví dụ 3. Giải ptvp

1. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3x^2y = 6x^2$
2. $x^2y' + xy = 1, \quad x > 0, \quad y(1) = 2$
3. $y' - 3x^2y = e^{x^3}\sin x$



Nghiệm của $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3x^2y = 6x^2$