Chương 4
TRỊ RIÊNG, VÉC-TƠ RIÊNG & DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Huỳnh Văn Kha

Đại Học Tôn Đức Thắng

Toán C2 - MS: C01010

Nội dung

1. Chéo hóa ma trận
   - Đa thức đặc trưng
   - Trị riêng, vector riêng
   - Chéo hóa ma trận
2. Dạng toàn phương
   - Dạng toàn phương
   - Dạng chính tắc của dạng toàn phương
   - Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

Đa thức đặc trưng

Cho $A \in \mathcal{M}_n$, ta gọi *đa thức đặc trưng* của A là đa thức:

$$p_A(x) = \det(xI_n - A)$$

Ví dụ:

1. Xét $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

   Tìm đa thức đặc trưng của A

2. Cho P khả nghịch, chứng tỏ rằng: A và $P^{-1}AP$ có cùng đa thức đặc trưng.

Trị riêng, vector riêng

Cho $A \in \mathcal{M}_n$
Ký hiệu: $[v]$ là tọa độ của $v \in \mathbb{R}^n$ trong cơ sở chính tắc

- Vector $v \in \mathbb{R}^n$ $(v \neq 0)$ gọi là *vector riêng* của A nếu tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho: $A[v] = \lambda[v]$
- Khi đó ta nói λ là một *trị riêng* của A. Và v là vector riêng ứng với trị riêng λ

λ là trị riêng của A khi và chỉ khi nó là nghiệm của đa thức đặc trưng $p_A(x)$

Ví dụ: Tìm các trị riêng của ma trận A trong ví dụ trên.

Không gian con riêng

Tập các vector $v \in \mathbb{R}^n$ thỏa: $A[v] = \lambda[v]$ là một không gian vector con của $\mathbb{R}^n$. Ký hiệu: $E(\lambda)$

Nếu λ là trị riêng của A thì $E(\lambda)$ được gọi là *không gian con riêng* ứng với trị riêng λ

Ví dụ:

1. Tìm cơ sở, số chiều cho các không gian con riêng của A trong ví dụ trên
2. Tìm cơ sở, số chiều cho các không gian con riêng của $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Chéo hóa ma trận vuông

Ma trận vuông $A \in \mathcal{M}_n$ gọi là *chéo hóa được* nếu tồn tại ma trận khả nghịch $P \in \mathcal{M}_n$ sao cho *$P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo*.
$P^{-1}AP$ gọi là *dạng chéo* của ma trận A

A chéo hóa được khi và chỉ khi *tồn tại cơ sở của $\mathbb{R}^n$ gồm toàn các vector riêng của A*

Nếu λ là nghiệm bội m của $p_A(x)$ thì $m \geq n = \dim E(\lambda)$
Gọi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ là tất cả các trị riêng khác nhau của A. Đặt $n_i = \dim E(\lambda_i)$, khi đó:

A chéo hóa được khi và chỉ khi $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$

Thuật toán chéo hóa ma trận

1. *Tìm đa thức đặc trưng, xác định các trị riêng* λ_i

$\rightarrow$ Nếu tổng bậc của các trị riêng nhỏ hơn n thì không chéo hóa được

2. *Tìm các cơ sở* $\mathcal{B}_i$ *cho các không gian con riêng* $E(\lambda_i)$ *tương ứng*

$\rightarrow$ Nếu tổng số chiều các không gian con riêng nhỏ hơn n thì không chéo hóa được

3. Đặt $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$, và đặt $P = \mathcal{P}(\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B})$.

$\rightarrow$ Thì: $P^{-1}AP$ là ma trận chéo, với các phần tử trên đường chéo là các trị riêng của A