Chương 1
MA TRẬN - ĐỊNH THỨC

Huỳnh Văn Kha

Đại Học Tôn Đức Thắng

Toán C2 - MS: C01010

Nội dung

1. Định nghĩa, phân loại ma trận
2. Các phép toán trên ma trận
3. Chuyển vị ma trận, ma trận đối xứng
4. Phép biến đổi sơ cấp trên dòng (cột), đưa ma trận về dạng bậc thang
5. Định thức của ma trận vuông
6. Ma trận nghịch đảo
7. Giải phương trình ma trận
8. Hạng của ma trận

Định nghĩa ma trận

Định nghĩa

Một ma trận cấp $m \times n$ là một bảng hình chữ nhật gồm m hàng và n cột:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ký hiệu: $A = (a_{ij})$.

Phần tử dòng i, cột j của ma trận A được viết là: $[A]_{ij}$

Tập các ma trận cấp $m \times n$ được ký hiệu: $\mathcal{M}_{m\times n}$

- **Ví dụ**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 10 & 8 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Thì: $[A]_{23} = 10$, và $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}$

- **Ma trận bằng nhau**

Hai ma trận gọi là *bằng nhau* nếu nó cùng kích thước và các phần tử tương ứng bằng nhau.

Ví dụ: Tìm a, b, c để $A = B$, biết:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ b & -3 \\ 4 & c \end{pmatrix}$$

Phân loại ma trận

Ma trận không là ma trận mà mọi phần tử của nó đều bằng 0. Ký hiệu: $\mathbf{0}_{m\times n}$, hoặc: $\mathbf{0}$.

Ma trận vuông cấp n là ma trận có số dòng và số cột đều bằng n.

- Tập các ma trận vuông cấp n được ký hiệu là: $\mathcal{M}_n$
- Các phần tử $[A]_{11}, [A]_{22}, \cdots, [A]_{nn}$ gọi là nằm trên *đường chéo chính* của ma trận vuông A.

Ví dụ: $\mathbf{0}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

Ma trận đường chéo cấp n là ma trận vuông cấp n mà mọi phần tử *bên ngoài đường chéo chính* đều bằng 0.

Ma trận đơn vị cấp n là ma trận đường chéo cấp n mà mọi phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1.
Ký hiệu: I_n.

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận tam giác trên (dưới) là ma trận vuông mà các phần tử ở dưới (trên) đường chéo chính đều bằng 0.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

- Ma trận chỉ có một dòng gọi là *ma trận dòng*, ma trận chỉ có một cột gọi là *ma trận cột*.
- Các ma trận dòng (cột) cũng được gọi là các *vector dòng (cột)*

Cộng ma trận, nhân số với ma trận

Cho $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ và $h \in \mathbb{R}$

Tổng của hai ma trận A và B là ma trận cấp $m \times n$ có ký hiệu là $A + B$, được xác định bởi: $[A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}$

Tích của ma trận A với hằng số h là ma trận cấp $m \times n$ có ký hiệu là hA, được xác định bởi $[hA]_{ij} = h[A]_{ij}$

Ngoài ra, ta định nghĩa: $A - B = A + (-1)B$

Ví dụ: cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Tính: $A + B$, $2B$, $A - B$, $2A - 3B$

Tính chất

Với mọi ma trận $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$ và $h, k \in \mathbb{R}$, ta có:

(i) $A + B = B + A$ (tính giao hoán)

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (tính kết hợp)

(iii) $A + \mathbf{0} = A$ ($\mathbf{0}$: ma trận không cấp $m \times n$)

(iv) $A + (-A) = \mathbf{0}$

(v) $h(kA) = (hk)A$

(vi) $h(A + B) = hA + hB$

(vii) $(h + k)A = hA + kA$

(viii) $1.A = A$

Nhân hai ma trận

Cho $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$. Ta có định nghĩa sau.

Tích ma trận của A với B là ma trận cấp $m \times p$, ký hiệu là AB, xác định bởi:

$$[AB]_{ik} = \sum_{j=1}^{n} [A]_{ij}[B]_{jk} = [A]_{i1}[B]_{1k} + \cdots + [A]_{in}[B]_{nk}$$

với mọi $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, p}$

Ví dụ: Tính AB, AC, CA, biết:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$