Trường Đại học Bách khoa tp. Hồ Chí Minh
Bộ môn Toán Ứng dụng

Giải tích hàm nhiều biến

Chương 6: Tích phân mặt

- *Giảng viên Ts. Đặng Văn Vinh (4/2008)*

dangvvinh@hcmut.edu.vn

Tích phân mặt loại 1

1) Định nghĩa : Cho hàm $f(x, y, z)$ xác định trên mặt cong S chia mặt cong thành n phần không trùng lấp nhau , ký hiệu là $S_1, S_2, S_3, \ldots. S_n$. Gọi $dt(S_i)$ là diện tích của mặt cong S_i, trên mỗi mặt cong S_i ta chọn một điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Thiết lập tổng

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i).dt(S_i).$$

Xét $\lim_{n \to \infty} T_n$, nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn, không phụ thuộc cách ta chia mặt cong S và cách chọn điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i, z_i)$ thì giá trị giới hạn ấy gọi là tích phân mặt loại 1 của hàm $f(x, y, z)$ lấy trên miền S và ký hiệu là

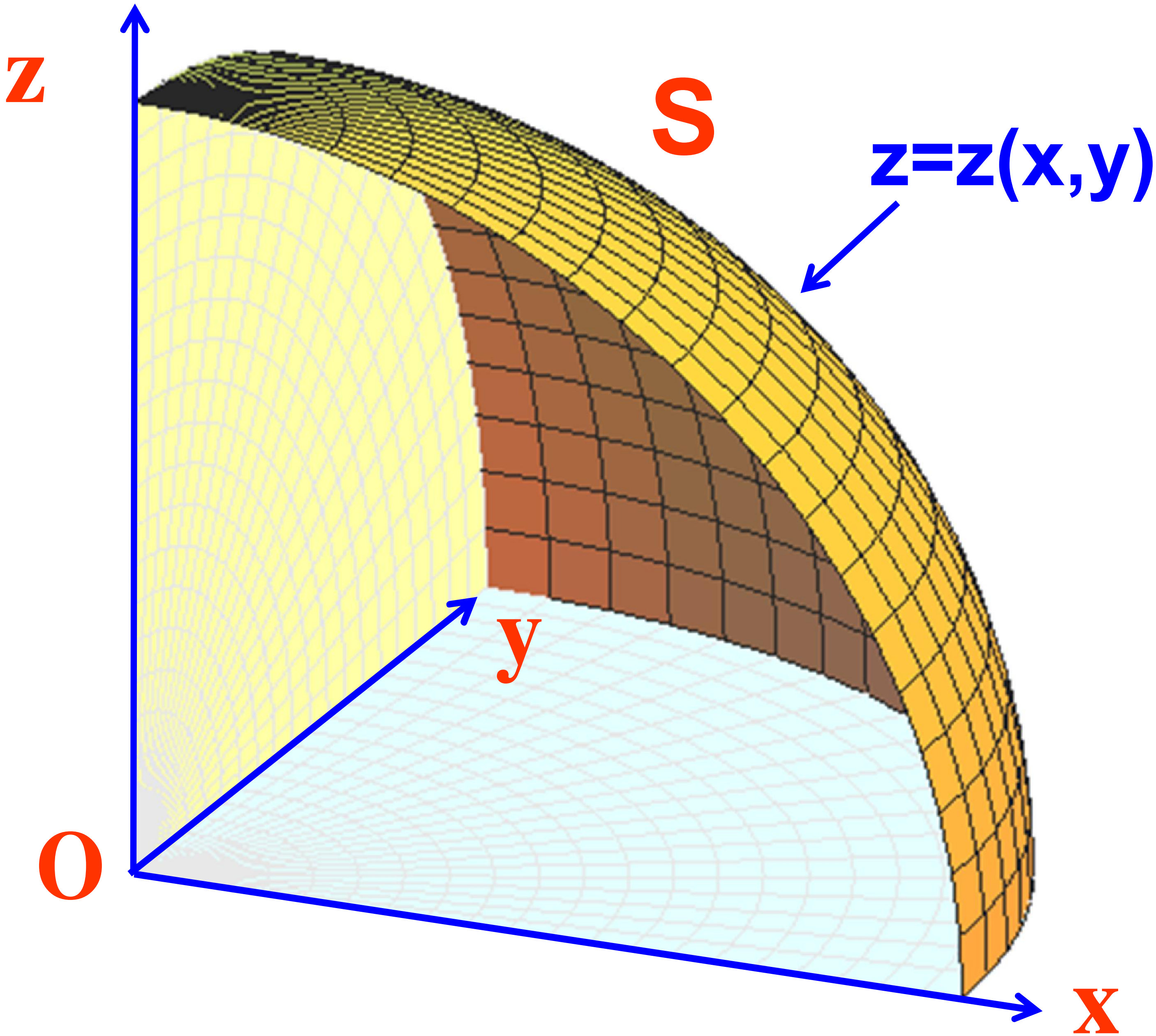
$$I = \iint_S f(x, y, z)\, ds$$

2)Tính chất: tương tự như tích phân đường 1

3) Cách tính :

*) Nếu **phương trình** của mặt cong S cho bởi

$$z = z(x, y)$$


z
S
z=z(x,y)
y
O
x

3) Cách tính :

*) Nếu **phương trình** của mặt cong S cho bởi

$z = \boxed{z(x,y)}$, D_{xy} là **hình chiếu** của S xuống

mặt phẳng Oxy :

$$\iint_S f(x,y,z)\boxed{ds} = \iint_{D_{xy}} f(x,y,\boxed{z(x,y)})$$

$$\boxed{\sqrt{1+\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2}\,dxdy}$$

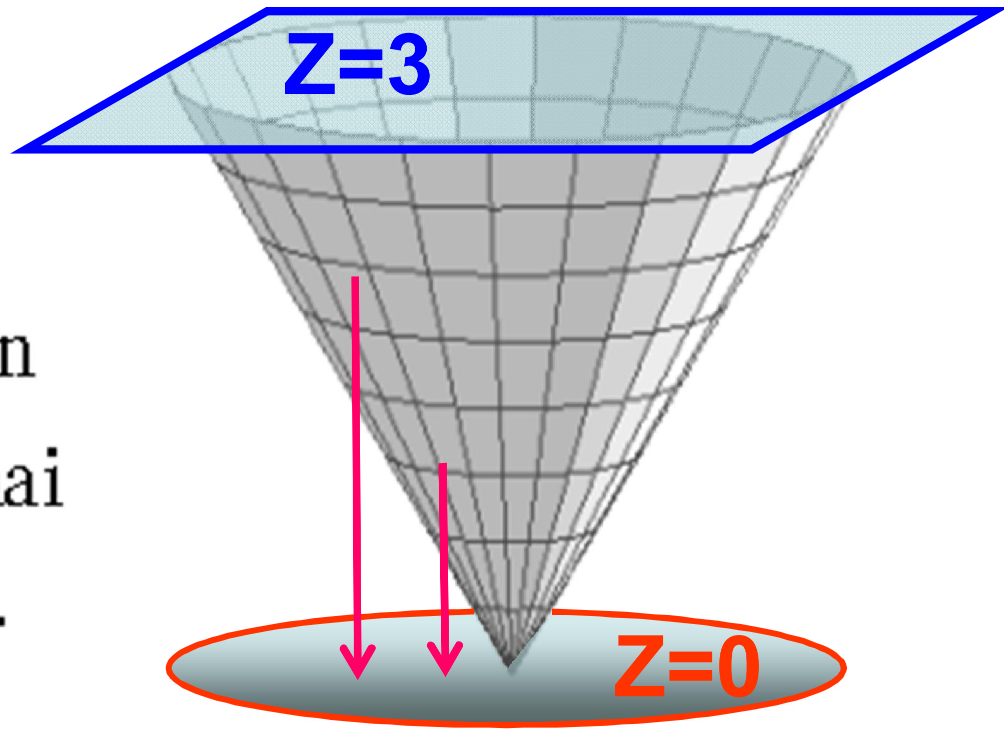
Tương tự ta có thể chiếu xuống các mặt phẳng còn lại

Nếu **phương trình** của mặt cong S cho bởi $y = y(x,z)$, D_{xz} là **hình chiếu** của S xuống mặt phẳng Oxz thì

*)Nếu **phương trình** của mặt cong S cho bởi $x = x(y, z)$, D_{yz} là **hình chiếu** của S xuống mặt phẳng Oyz thì

Chú ý : Nếu hình chiếu của S xuống mặt phẳng Oxy chỉ là một đường cong (trường hợp này xảy ra khi S là một mặt trụ song song với trục Oz) thì phải chiếu S xuống các mặt phẳng tọa độ khác , không được chiếu xuống Oxy

Ví dụ: Tính $\iint\limits_S x^2 + y^2 + z^2\ ds$, trong đó S là phần của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm giữa hai mặt phẳng $z = 0$ và $z = 3$.



$$\boxed{z = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

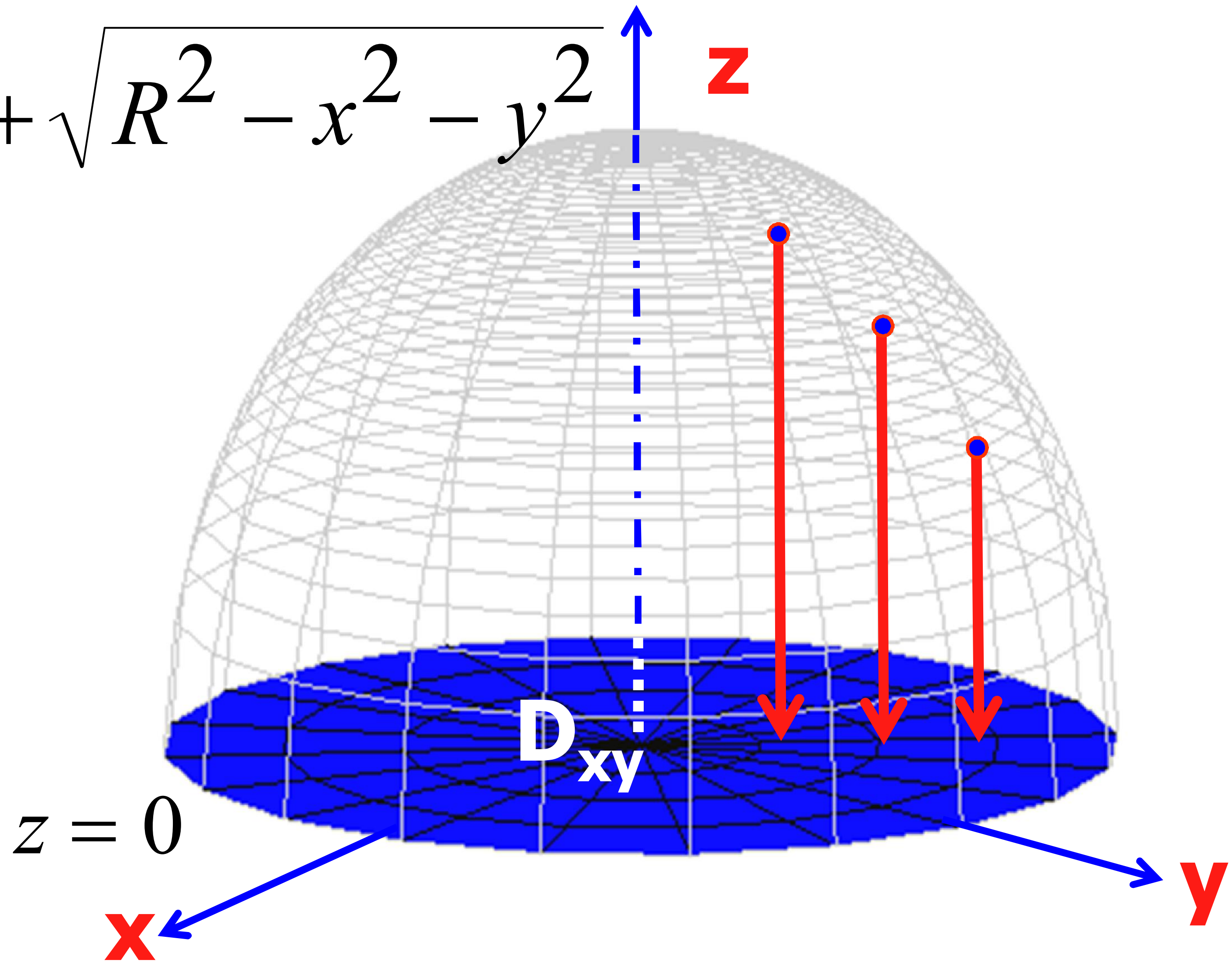
$$= \iint_{Dxy} 2(x^2 + y^2).\sqrt{2}\,dxdy =$$

Ví dụ :Tính $\iint\limits_S z\, ds$ trong đó S là phần của mặt paraboloid $z = 2 - x^2 - y^2$ trong miền $z \geq 0$

$$\boxed{z = 2 - x^2 - y^2}$$

Ví dụ : Tính tích phân $\iint\limits_S x^2 + y^2 \, ds$, trong đó S là nửa trên của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, lấy phần $z \geq 0$

$$z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$



Hình chiếu của S xuống mặt phẳng Oxy là hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$, phương trình của mặt S là $z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$