Trường Đại học Bách khoa tp. Hồ Chí Minh
Bộ môn Toán Ứng dụng

Giải tích hàm nhiều biến

Chương 4: Tích phân bội ba

- *Giảng viên Ts. Đặng Văn Vinh (4/2008)*
dangvvinh@hcmut.edu.vn

Nội dung

0.1 – Định nghĩa, cách tính tích phân bội ba

0.2 – Tọa độ trụ

0.3 – Tọa độ cầu

0.4 – Ứng dụng hình học

0.5 – Ứng dụng cơ học

I. Định nghĩa, cách tính tích phân bội ba

$f = f(x,y,z)$ xác định trên vật thể đóng, bị chặn E

Chia E một cách tùy ý ra thành n khối nhỏ: $E_1, E_2, ..., E_n$.

Thể tích tương ứng mỗi khối $V(E_1), V(E_2), ..., V(E_n)$.

Trên mỗi khối E_i lấy tuỳ ý một điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$.

Lập tổng Riemann: $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot V(E_i)$

$I = \lim_{n \to +\infty} I_n$, không phụ thuộc cách chia E, và cách lấy điểm M_i

$$I = \iiint_E f(x,y,z)dxdydz$$

được gọi là tích phân bội ba của $f=f(x,y,z)$ trên khối E.

I. Định nghĩa, cách tính tích phân kép

Tính chất của tích phân bội ba

1) Hàm liên tục trên một khối đóng, bị chặn, có biên là mặt trơn tùng khúc thì khả tích trên miền này.

2) $V_E = \iiint\limits_E dxdydz$

3) $\iiint\limits_E \alpha \cdot f(x,y,z)dxdydz = \alpha \iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz$

4) $\iiint\limits_E (f+g)dxdydz = \iiint\limits_E f\,dxdydz + \iiint\limits_E g dxdydz$

5) Nếu E được chia làm hai khối E_1 và E_2 không dẫm lên nhau:

$$\iiint\limits_E f dxdydz = \iiint\limits_{E_1} f dxdydz + \iiint\limits_{E_2} f dxdydz$$

6) $\forall (x,y,z) \in E, f(x,y,z) \le g(x,y,z) \Rightarrow \iiint\limits_E f \le \iiint\limits_E g$

nh lý (Fubini) $I = \iiint_E f(x,y,z)dxdydz$

hân tích khối E: Chọn mặt chiếu là x0y.

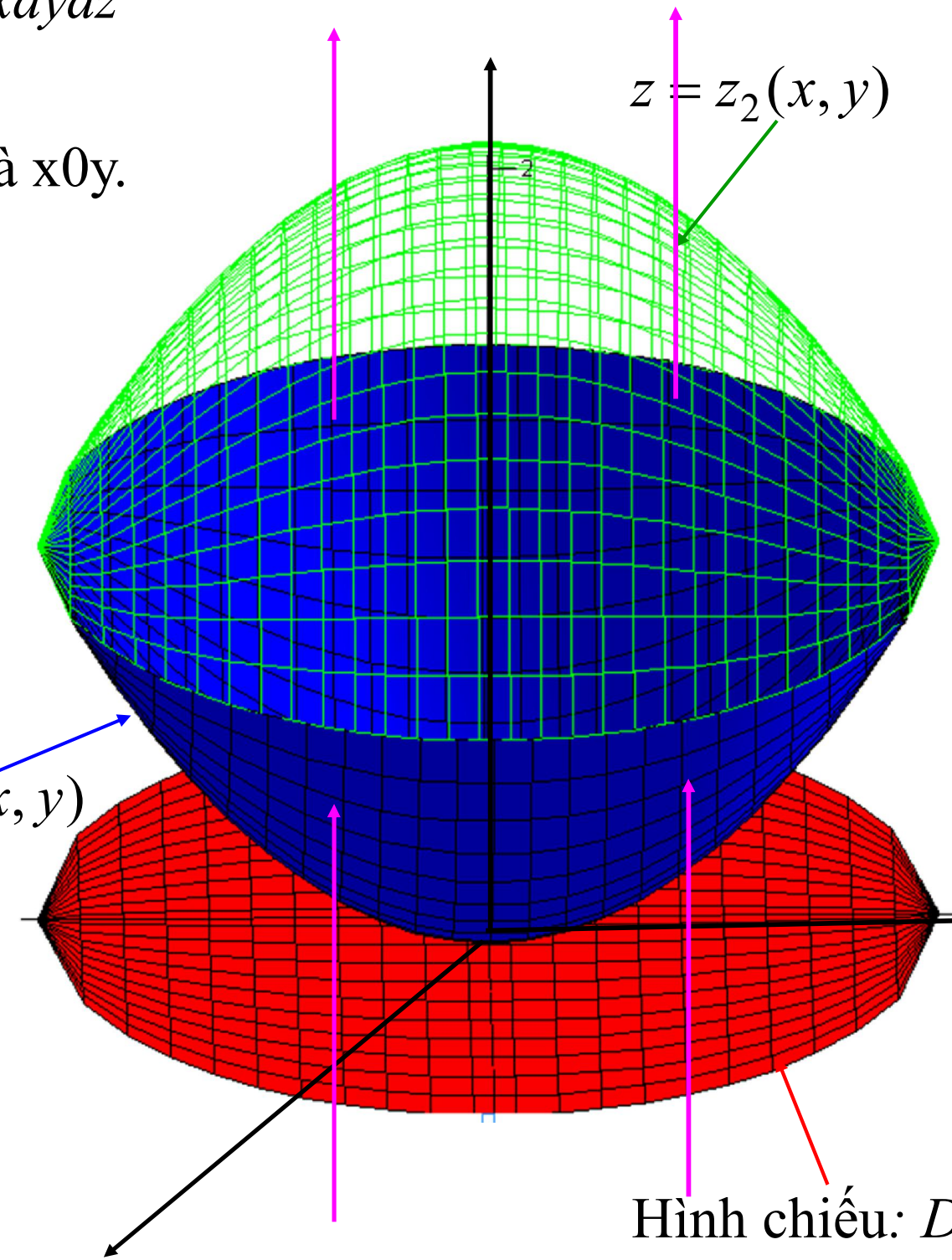
Mặt phía dưới: $z = z_1(x,y)$

Mặt phía trên: $z = z_2(x,y)$

Hình chiếu: $\Pr_{0xy} E = D$

$= \iiint_E f(x,y,z)dxdydz$

$= \iint_D \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dxdy$



Ví dụ

Tính tích phân bội ba $I = \iiint_E (x+z)dxdydz$ trong đó E là vật thể giới hạn bởi

$$x^2 + y^2 = 1, z = 2 - x^2 - y^2, z = 0$$

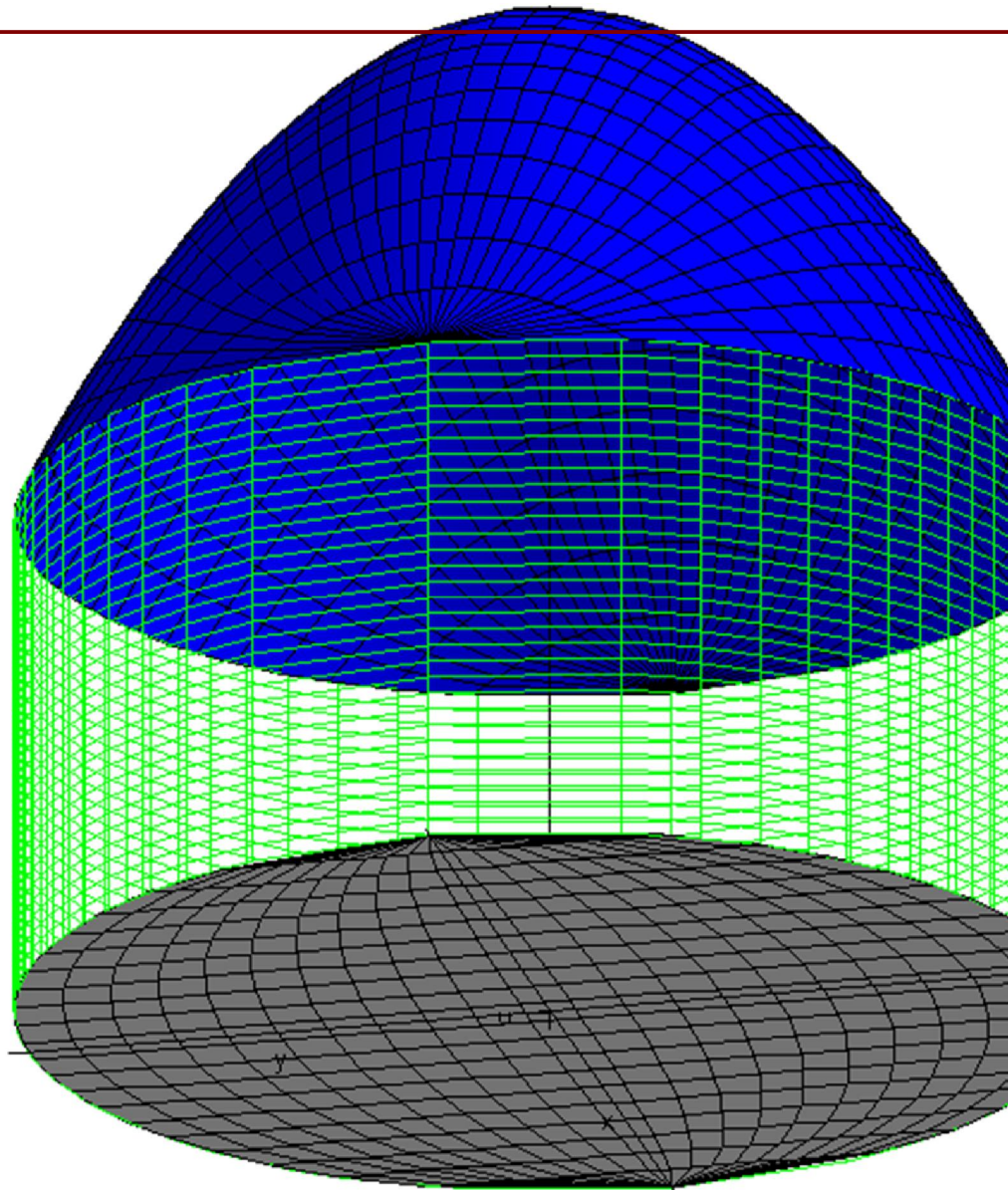
Hình chiếu của E xuống 0xy:

$$D : x^2 + y^2 \le 1$$

Mặt phía trên: $z_2(x, y) = 2 - x^2 - y^2$

Mặt phía dưới: $z = 0$

$$I = \iint_{x^2+y^2 \le 1} \left[\int_0^{2-x^2-y^2} (x+z)dz \right] dxdy$$



$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left[xz + \frac{z^2}{2} \right]\Bigg|_0^{2-x^2-y^2} dxdy$$

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left(x(2-x^2-y^2) + \frac{(2-x^2-y^2)^2}{2} \right) dxdy$$

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \frac{(2-x^2-y^2)^2}{2} dxdy$$ Đổi sang tọa độ cực.

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{\left(2-r^2\right)^2}{2} \cdot r \cdot dr = \frac{7\pi}{6}$$

Ví dụ

Tính tích phân bội ba $I = \iiint_E z\,dxdydz$ trong đó E là vật thể giới hạn bởi

$y = 1 - x, z = 1 - x^2$ và các mặt phẳng tọa độ, (phần $z \geq 0$)

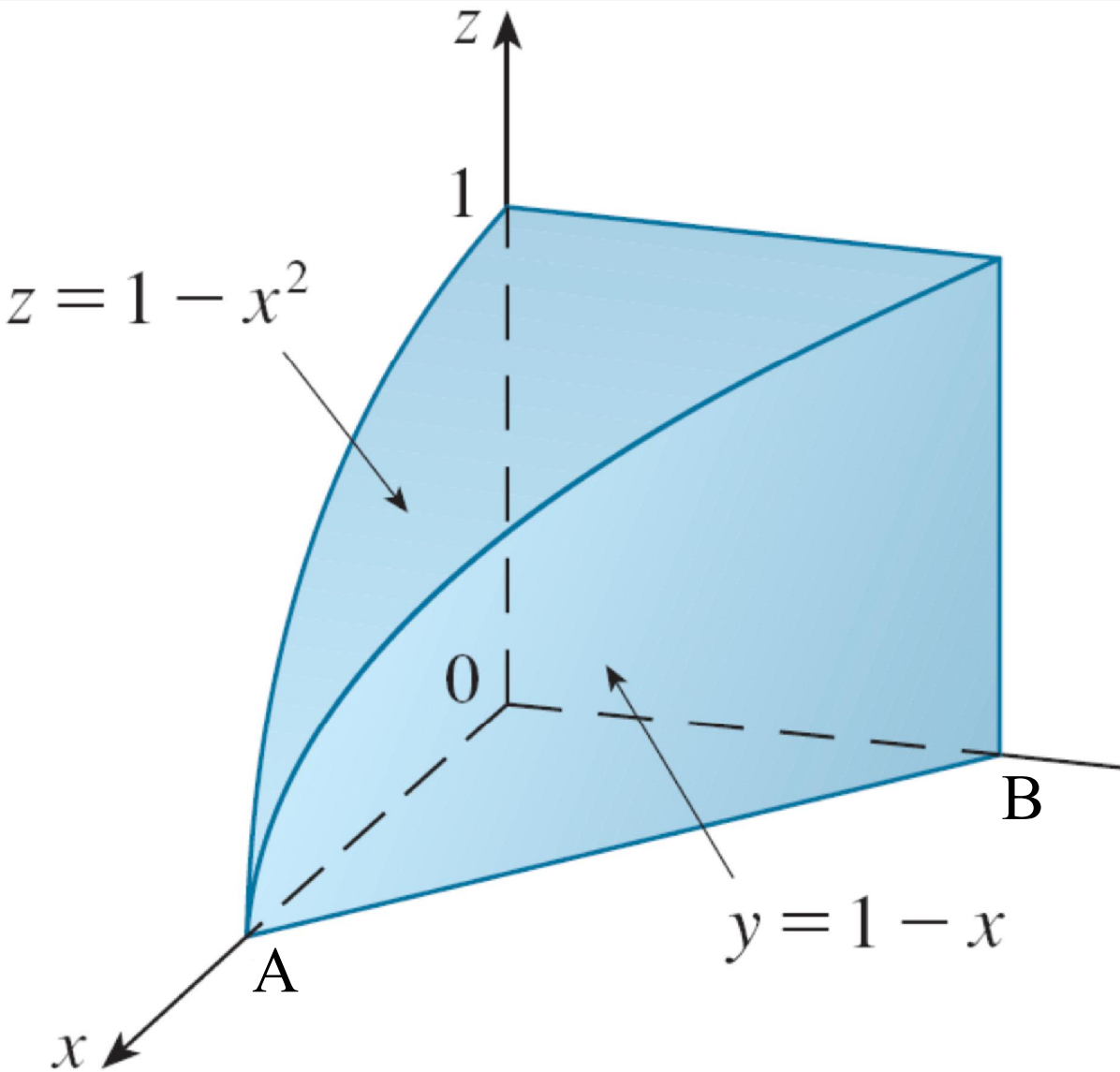
Hình chiếu của E xuống 0xy:

Tam giác OAB

Mặt phía trên: $z_2(x, y) = 1 - x^2$

Mặt phía dưới: $z = 0$

$$I = \iint_{\Delta OAB} \left[\int_0^{1-x^2} z\,dz \right] dxdy$$

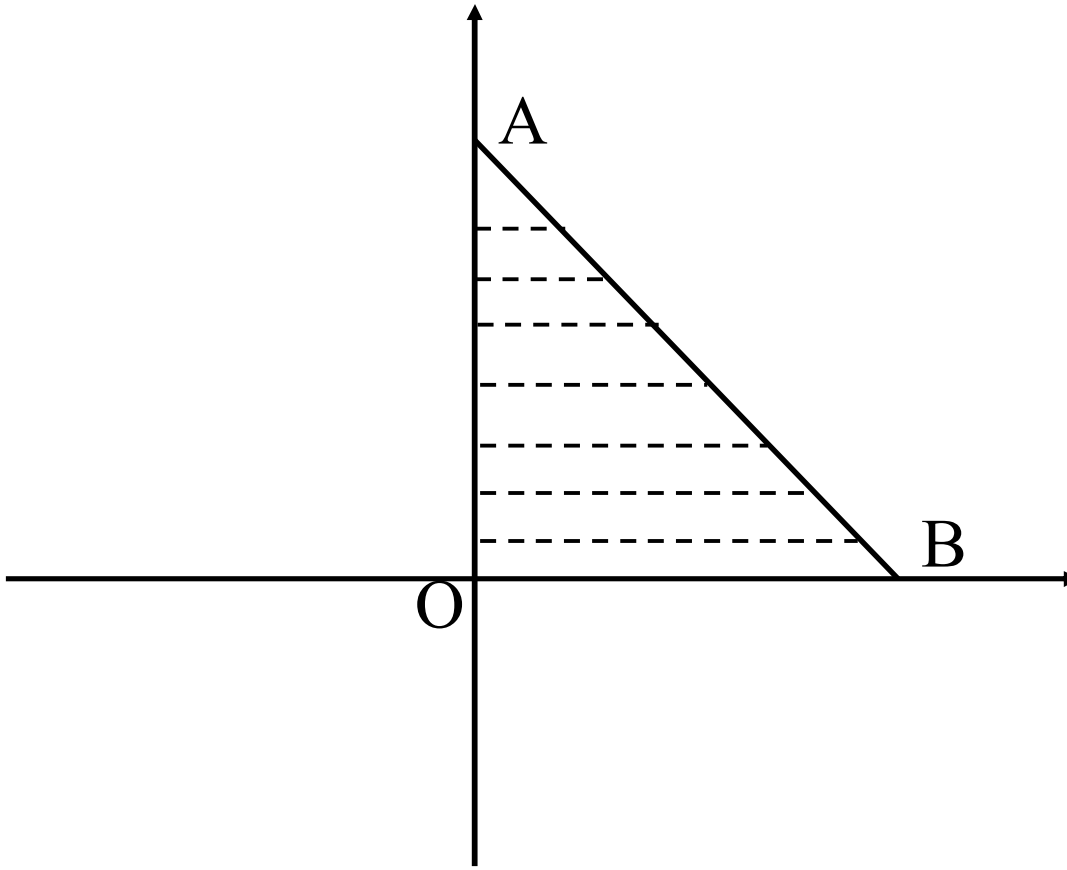


$$I = \iint\limits_{\Delta OAB} \left[\int\limits_0^{1-x^2} z dz \right] dxdy$$

$$I = \iint\limits_{\Delta OAB} \left[\frac{z^2}{2} \Big|_0^{1-x^2} \right] dxdy$$

$$I = \iint\limits_{\Delta OAB} \frac{\left(1-x^2\right)^2}{2} dxdy$$

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \frac{\left(1-x^2\right)^2}{2} dy = \frac{11}{60}$$

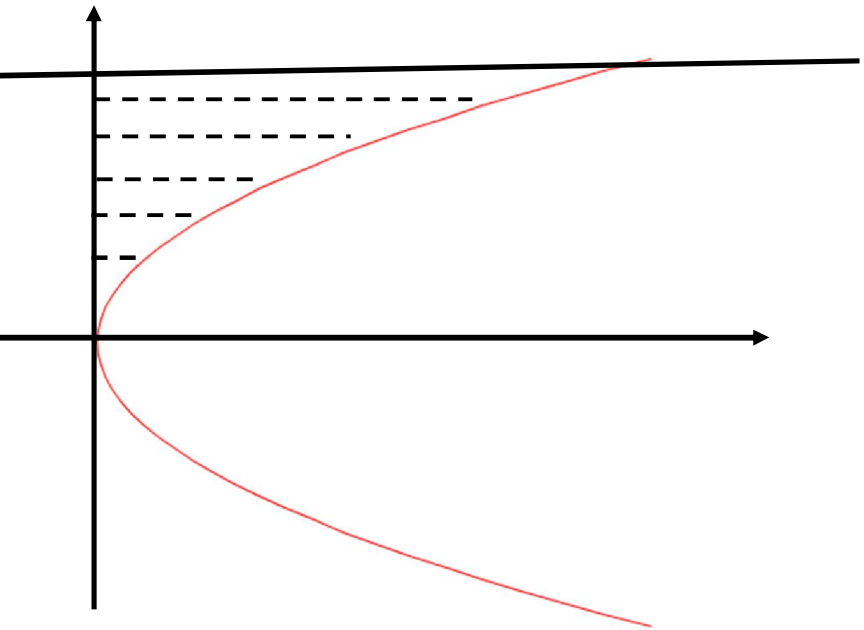
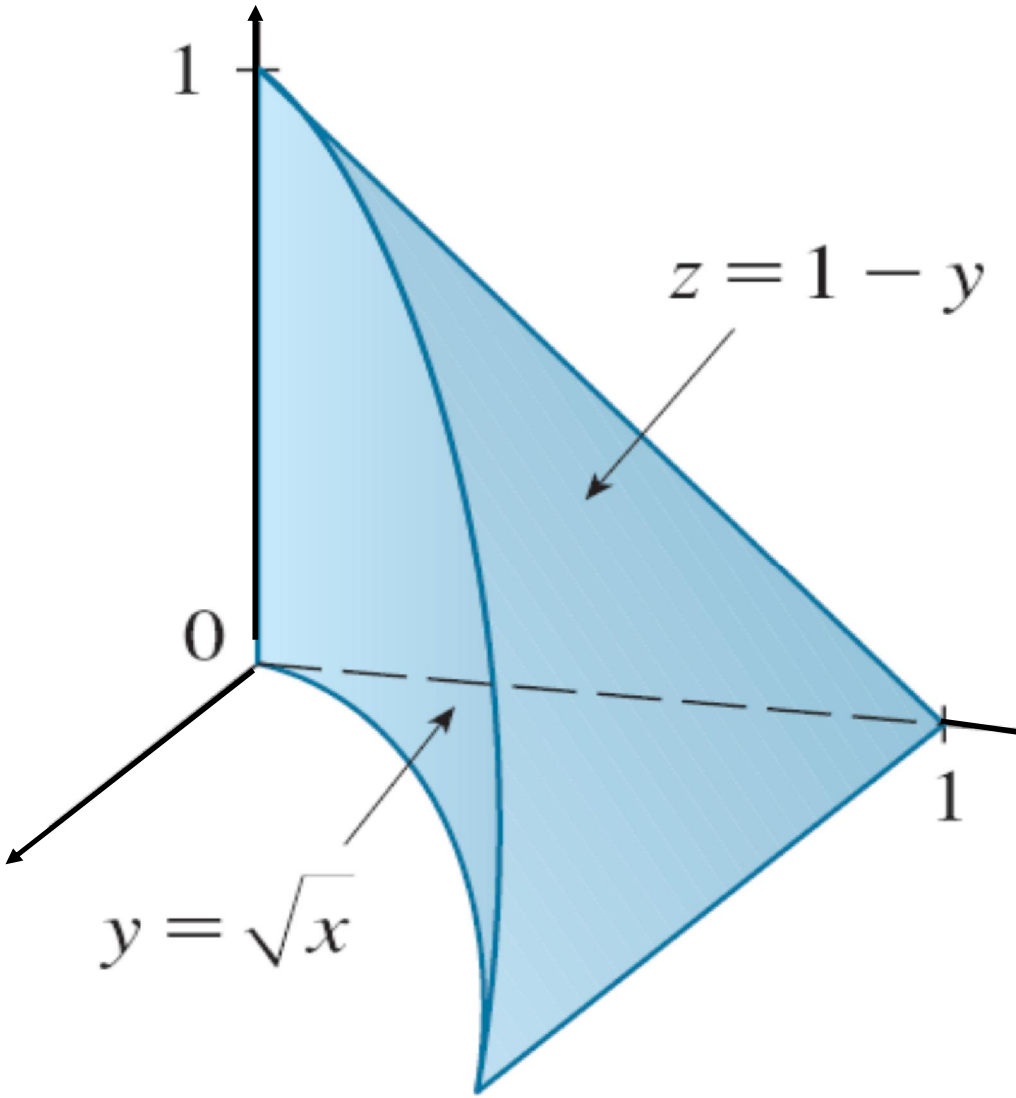


Ví dụ

Tính tích phân $I = \iiint_E (2x+3y)dxdydz$ trong đó E là vật thể giới hạn bởi

$$y = \sqrt{x}, z = 1-y, x = 0, z = 0.$$

Mặt phía trên: $z = 1-y$

Mặt phía dưới: $z = 0$

Hình chiếu của E xuống 0xy: