Trường Đại học Bách khoa tp. Hồ Chí Minh
Bộ môn Toán Ứng dụng

Giải tích hàm nhiều biến

Chương 1: Giới hạn và liên tục

- *Giảng viên Ts. Đặng Văn Vinh (2/2008)*

dangvvinh@hcmut.edu.vn

Mục tiêu của môn học Toán 3

Môn học cung cấp các kiến thức cơ bản của giải tích hàm nhiều biến.
inh viên sau khi kết thúc môn học nắm vững các kiến thức nền tảng:
àm nhiều biến, giới hạn kép và liên tục, đạo hàm riêng và vi phân, đạo
àm theo hướng, khai triển Taylor, Maclaurint của hàm nhiều biến, ứng
ụng của đạo hàm riêng: phương trình mặt phẳng tiếp diện, pháp véctơ,
ng dụng tìm cực trị; cách tính tích phân bội: bội 2, bội 3; tích phân
ường: loại 1, loại 2; tích phân mặt: loại 1, loại 2 và các ứng dụng hình
ọc, cơ học của các loại tích phân này; tích phân suy rộng phụ thuộc
ham số; trường véctơ.

Giới hạn và liên tục

Đạo hàm theo hướng

Ứng dụng của đạo hàm riêng

Tích phân kép

Tích phân bội ba

Tích phân đường loại 1 và loại 2

Tích phân mặt loại 1 và loại 2

Trường véctơ

Tích phân phụ thuộc tham số

Nhiệm vụ của sinh viên.

Đi học đầy đủ (vắng 20% trên tổng số buổi học bị cấm thi!).

Làm tất cả các bài tập cho về nhà.

Đọc bài mới trước khi đến lớp.

Đánh giá, kiểm tra.

Thi giữa học kỳ: hình thức trắc nghiệm (20%)

Thi cuối kỳ: hình thức tự luận + điền kết quả (80%)

i liệu tham khảo

Đỗ Công Khanh, Ngô Thu Lương, Nguyễn Minh Hằng. Giải tích nhiều biến. KB Đại học quốc gia

Ngô Thu Lương, Nguyễn Minh Hằng. Bài tập toán cao cấp 3.

Đỗ Công Khanh. Giải tích nhiều biến. NXB Đại học quốc gia

ames Stewart. Calculus, second edition, 2000.

www.tanbachkhoa.edu.vn

Nội dung

0.1 – Hàm hai biến

0.2 – Các khái niệm tôpô trong R^n

0.3 – Các mặt bậc hai

0.4 – Giới hạn

0.5 – liên tục

I. Hàm hai biến

Ví dụ

Nhiệt độ T tại một điểm trên bề mặt trái đất tại một thời điểm t cho trước phụ thuộc vào kinh độ x và vĩ độ y của điểm này. Chúng ta có thể coi T là một hàm theo hai biến x và y, ký hiệu

$$T = T(x,y)$$

Ví dụ

Thể tích V của một bình hình trụ phụ thuộc vào bán kính đáy r và chiều cao h. Thực tế ta biết $V = \pi r^2 h$. Khi đó V là một hàm hai biến theo r và h: $V(r,h) = \pi r^2 h.$

I. Hàm hai biến

Định nghĩa hàm hai biến

Cho $D \subseteq R^2$. Hàm hai biến là một ánh xạ

$$f : D \to R$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

Ký hiệu: $f = f(x, y)$.

D được gọi là miền xác định của f.

Miền giá trị của f: $E = \{a \in R \mid \exists (x, y) \in D : a = f(x, y)\}$

Nếu f cho bởi biểu thức đại số: Miền xác định là tập hợp tất cả các giá trị của x và y, sao cho biểu thức có nghĩa.

Miền giá trị là tập hợp tất cả các số thực mà hàm có thể nhận được.

I. Hàm hai biến

Ví dụ. Hàm hai biến $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-y}$

Miền xác định: $D=\{(x,y)\in R^2 \mid x+y+1\geq 0, x\neq y\}$

$$f(3,2)=\frac{\sqrt{3+2+1}}{3-2}=\sqrt{6}$$

Ví dụ. Hàm hai biến $f(x,y)=x^2+y^2$

Miền xác định: $D=R^2$

Miền giá trị: $E_f=R_+=[0,+\infty)$

$f(x+y,x-y)=(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)$

$f(x,x)=x^2+x^2=2x^2$

I. Hàm hai biến

Ví dụ. Hàm hai biến $f(x,y)=\dfrac{x}{y+1}$

Miền xác định: $D=\{(x,y)\in R^2 \mid y\neq -1\}$

Miền giá trị: $E_f=R$

Ví dụ. Hàm hai biến $f(x,y)=\dfrac{1}{y+1}$

Miền xác định: $D=\{(x,y)\in R^2 \mid y\neq -1\}$

Miền giá trị: $E_f=R\setminus\{0\}$

Ví dụ. Hàm hai biến $f(x,y)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}, \text{nếu } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, \text{ nếu } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Miền xác định: $D=R^2$

Miền giá trị: $E_f=[0,1)$

II. Tôpô trong R^2

Hình tròn mở tâm $M_0(x_0, y_0)$, bán kính $r > 0$

$$B(M_0, r) = \{M(x, y) \in R^2 \mid d(M, M_0) < r\}$$
$$= \{(x, y) \in R^2 \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$$

Hình tròn mở này cũng gọi là một *r*-lân cận của M_0 và mọi tập con của R^2 chứa một r-lân cận nào đó của M_0 gọi là một lân cận của M_0.

Xét một điểm $M_0 \in R^2$ và một tập $A \subseteq R^2$. Có thể xảy ra ba trường hợp loại trừ nhau sau đây:

Có một lân cận của M_0 nằm trọn trong A, nghĩa là chỉ chứa những điểm của A. Khi đó M_0 được gọi là điểm trong của tập A.

Có một lân cận của M_0 nằm trọn ngoài A, nghĩa là hoàn toàn không chứa điểm nào của A. Khi đó M_0 là một điểm trong của phần bù của A.

Bất kỳ lân cận nào của M_0 cũng có cả những điểm của A và những điểm không thuộc A. Khi đó M_0 là một điểm biên của A.

II. Tôpô trong R^2

Chú ý. 1) Điểm trong của A là một điểm thuộc A.

2) Điểm biên của A có thể thuộc hoặc không thuộc A.

Một tập hợp được gọi là mở nếu mọi điểm thuộc nó đều là điểm trong của nó.

Một tập hợp được gọi là đóng nếu mọi điểm không thuộc nó đều là điểm trong của phần bù của nó.

Một tập hợp là đóng nếu phần bù của nó là mở.

Một tập hợp là mở nếu nó không chứa điểm biên nào của nó.

II. Tôpô trong R^2

Một tập hợp là đóng nếu nó chứa tất cả các điểm biên của nó.

Điểm M_0 được gọi là điểm tụ của A, nếu mọi lân cận của M_0 đều chứa vô điểm của A.

Điểm M_0 là điểm tụ của tập A, nếu mọi lân cận của nó có chứa ít nhất một điểm của A khác với M_0.

Chú ý. 1) Điểm tụ có thể thuộc A, có thể không thuộc A.

2) Có những tập hợp không là tập đóng, cũng không là tập mở.

II. Tôpô trong R^2

Ví dụ.

Xét tập hợp các điểm trong mặt phẳng. Cho tập hợp A

$$A = \left\{ (x, y) \in R^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 < 1 \right\}$$

1.Tất cả các điểm trong của A: $\left\{ (x, y) \in R^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 < 1 \right\}$

2. Tất cả các điểm biên của A: $\left\{ (x, y) \in R^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1 \right\}$

3. Tất cả các điểm tụ của A: $\left\{ (x, y) \in R^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \le 1 \right\}$

4. Tập A là tập mở.

II. Tôpô trong R^2

Ví dụ.

Xét tập hợp các điểm trong mặt phẳng. Cho A là tập hợp các điểm nằm trong hình tròn đơn vị mà tọa độ các điểm là các số hữu tỉ.

$$A = \{(x,y) \in Q^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

1. Tìm tất cả các điểm trong của A.

2. Tìm tất cả các điểm biên của A.

3. Tìm tất cả các điểm tụ của A.

4. Tập A đóng hay mở.

Đáp số: 1) Không có điểm trong

2) Tập điểm biên và điểm tụ bằng nhau

Tập điểm biên $\partial A = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

4) A không đóng, không mở.

II. Tôpô trong R^2

Ví dụ.

Xét tập hợp các điểm trong mặt phẳng. Cho tập hợp A

$$A = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}, \frac{2n+3}{n+1} \right) \in R^2 \right\}$$

1. Tìm tất cả các điểm trong của A.

2. Tìm tất cả các điểm biên của A.

3. Tìm tất cả các điểm tụ của A.

4. Tập A đóng hay mở.

Đáp số: 1) Không có điểm trong

2) Có một điểm biên là (1,2).

3) Có một điểm tụ là (1,2).

4) A không đóng, không mở.

III. Các mặt bậc hai

Phương trình tổng quát của mặt bậc hai trong hệ tọa độ Descartes 0xyz là

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

Từ chương trình toán A2, để vẽ mặt bậc hai:

1) Đưa dạng toàn phương (màu đỏ) về dạng chính tắc bằng biến đổi trực giao

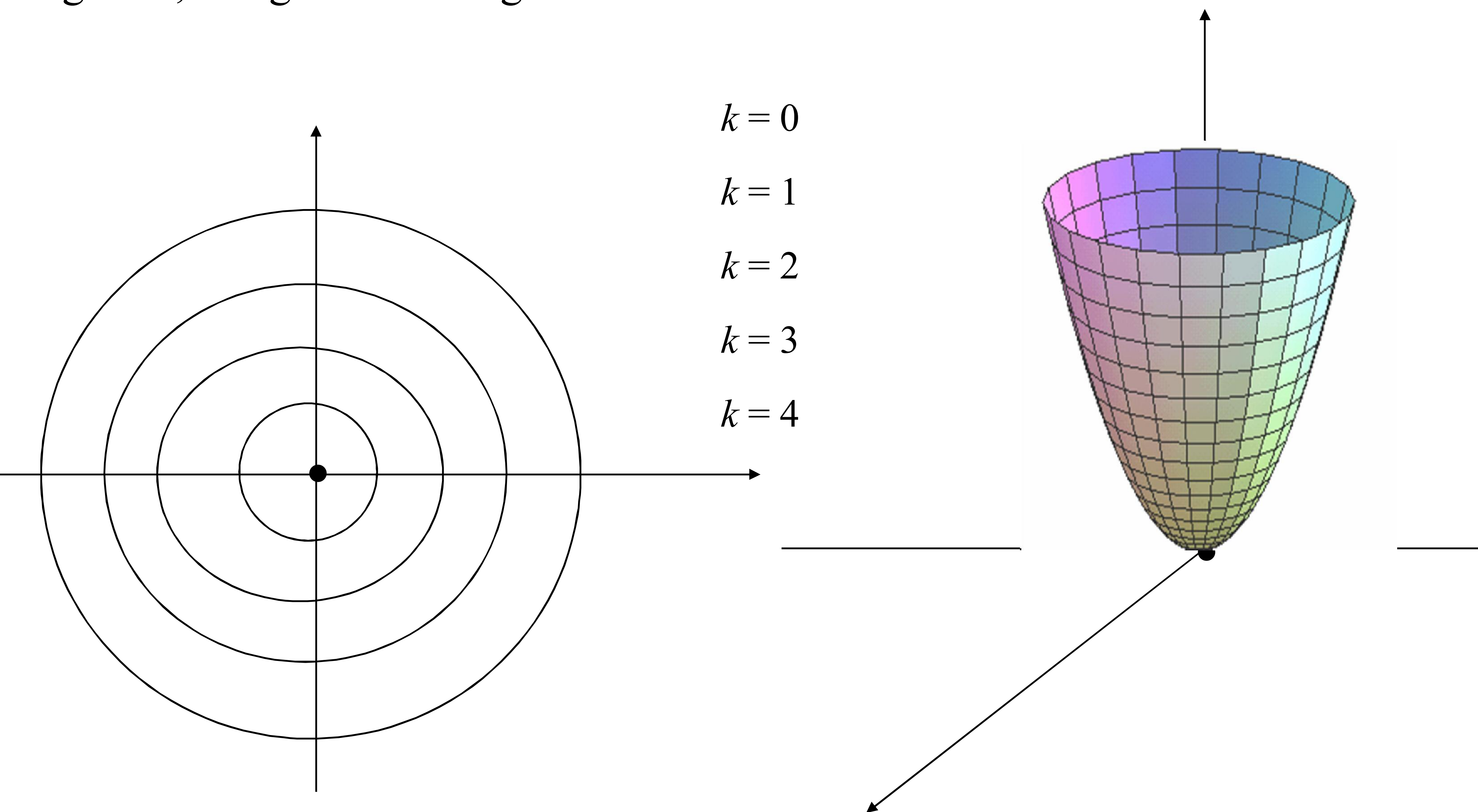
2) Tìm phép biến đổi, xác định trục tọa độ mới.

3) Vẽ hình.

III. Các mặt bậc hai

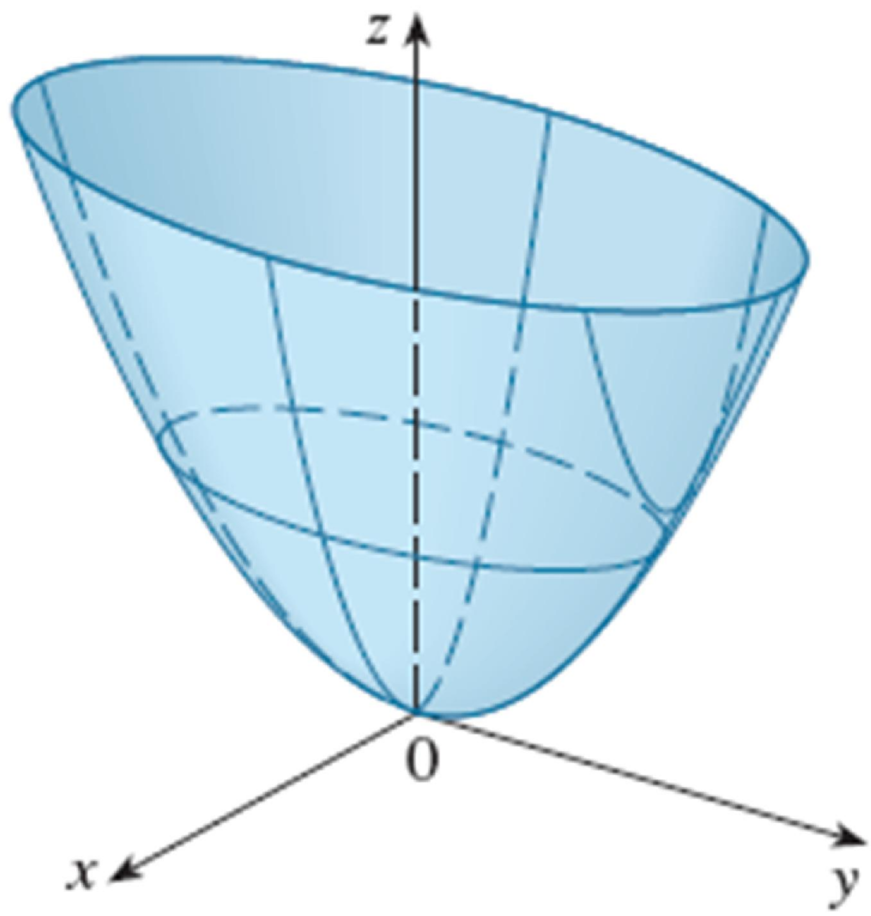
Xét đồ thị của hàm số: $z = x^2 + y^2$

ập hợp tất cả các điểm (x,y) của miền xác định D_f, sao cho $f(x,y) = k$ được gọi
ường mức, trong đó k là hằng số cho trước.



III. Các mặt bậc hai

Mặt paraboloid elliptic $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$



III. Các mặt bậc hai

Mặt paraboloid elliptic $$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Elliptic Paraboloid