Trường Đại học Bách khoa tp. Hồ Chí Minh
Bộ môn Toán Ứng dụng

Giải tích hàm nhiều biến

Chương 2: Đạo hàm riêng và vi phân

- *Giảng viên Ts. Đặng Văn Vinh (2/2008)*

dangvvinh@hcmut.edu.vn

Nội dung

0.1 – Đạo hàm riêng và vi phân của $f = f(x,y)$

0.2 – Đạo hàm riêng và vi phân của hàm hợp

0.3 – Đạo hàm riêng và vi phân của hàm ẩn

0.4 – Đạo hàm theo hướng

0.5 – Công thức Taylor, Maclaurint

0.6 – Ứng dụng của đạo hàm riêng

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Định nghĩa đạo hàm riêng theo x.

Cho hàm hai biến f = f(x,y) với điểm $M_0(x_0, y_0)$ cố định.

Xét hàm một biến F(x) = f(x,y_0) theo biến x.

Đạo hàm của hàm một biến F(x) tại x_0 được gọi là đạo hàm riêng theo x của f(x,y) tại $M_0(x_0, y_0)$, ký hiệu

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = f_x'(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x_0, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Định nghĩa đạo hàm riêng theo y.

Cho hàm hai biến f = f(x,y) với điểm $M_0(x_0, y_0)$ cố định.

Xét hàm một biến F(y) = f(x_0,y) theo biến y.

Đạo hàm của hàm một biến F(y) tại y_0 được gọi là đạo hàm riêng theo y của f(x,y) tại $M_0(x_0, y_0)$, ký hiệu

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(y_0 + \Delta y) - F(y_0)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

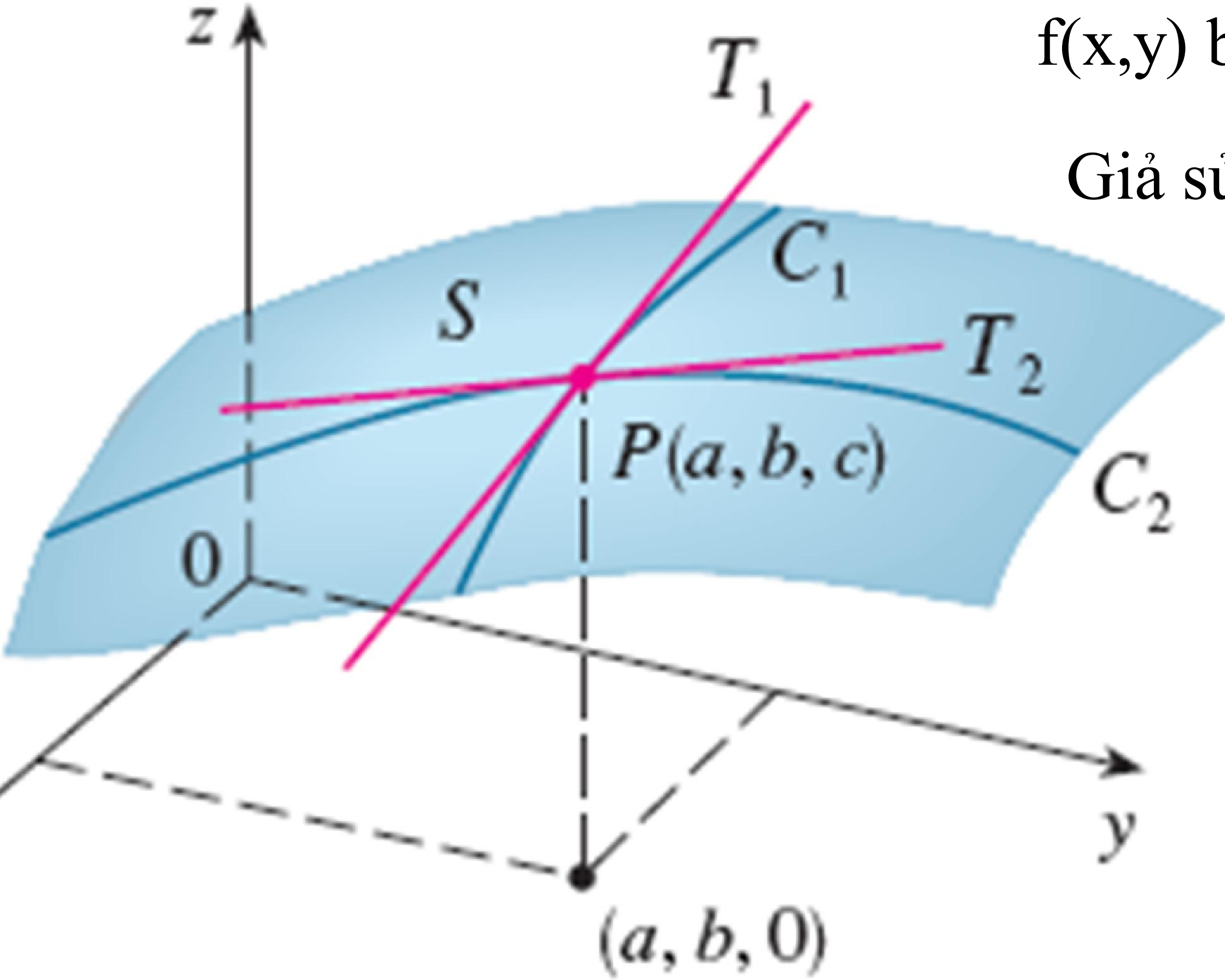
Ghi nhớ.

Đạo hàm riêng của f = f(x,y) tại $M_0(x_0, y_0)$ theo x là đạo hàm của hàm một biến f = f(x,y_0).

Đạo hàm riêng của f = f(x,y) tại $M_0(x_0, y_0)$ theo y là đạo hàm của hàm một biến f = f(x_0,y).

Qui tắc tìm đạo hàm riêng.

Để tìm đạo hàm riêng của f theo biến x, ta coi f là hàm một biến x, biến còn lại y là hằng số.



f(x,y) biễu diễn bởi mặt S (màu xanh)

Giả sử f(a,b) = c, nên điểm P(a,b,c) ∈

Cố định y = b. Đường cong C_1
giao của S và mặt phẳng y = b.

Phương trình của đường cong
là g(x) = f(x, b).

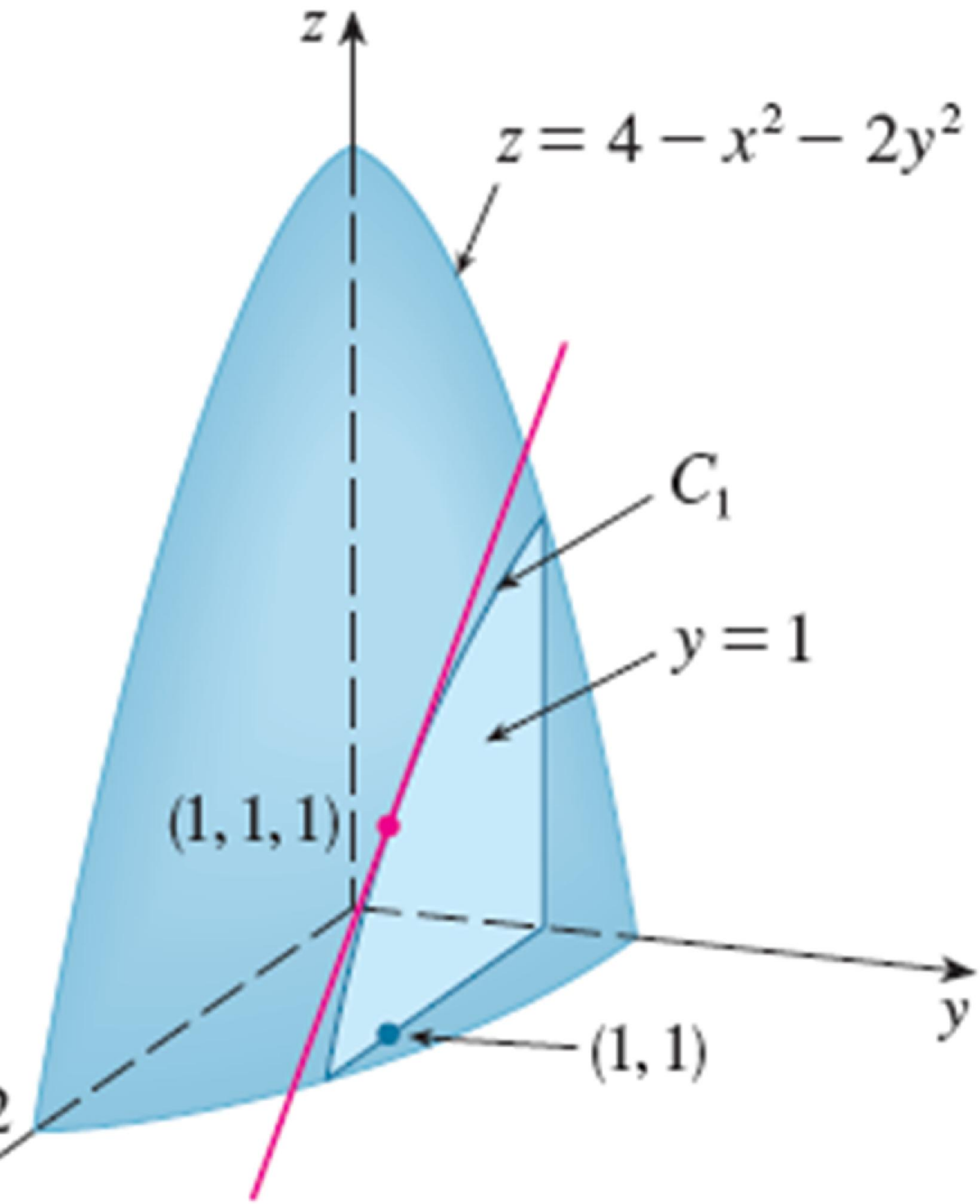
Hệ số góc của tiếp tuyến T_1
đường cong C_1 là

$$g'(a) = f'_x(a,b)$$

Đạo hàm riêng theo x của f = f(x,y) là hệ số góc của tiếp tuyến T_1 với đườn
cong C_1 tại P(a,b,c).

Tương tự, đạo hàm riêng theo y của f = f(x,y) là hệ số góc của tiếp tuyến
với đường cong C_2 tại P(a,b,c).

lụ. Cho hàm $f(x,y)=4-x^2-2y^2$. Tìm $f_x^{'}(1,1)$ và biễu diễn hình học của hàm riêng này.



$$f_x^{'}(x,y)=(4-x^2-2y^2)_x^{'}=-2x$$

$$\Rightarrow f_x^{'}(1,1)=-2.1=-2$$

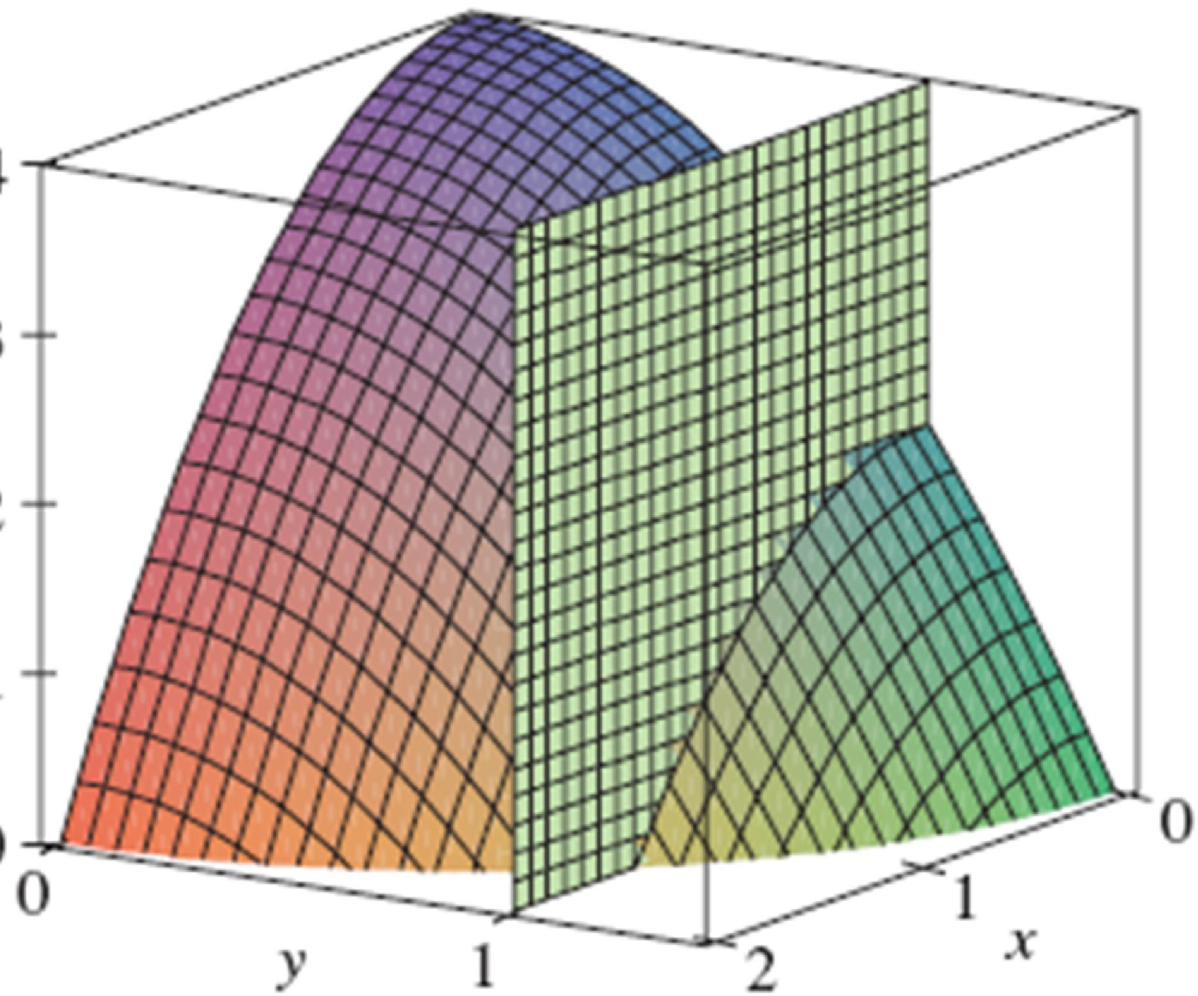
Mặt bậc hai f = f(x,y) màu xanh.

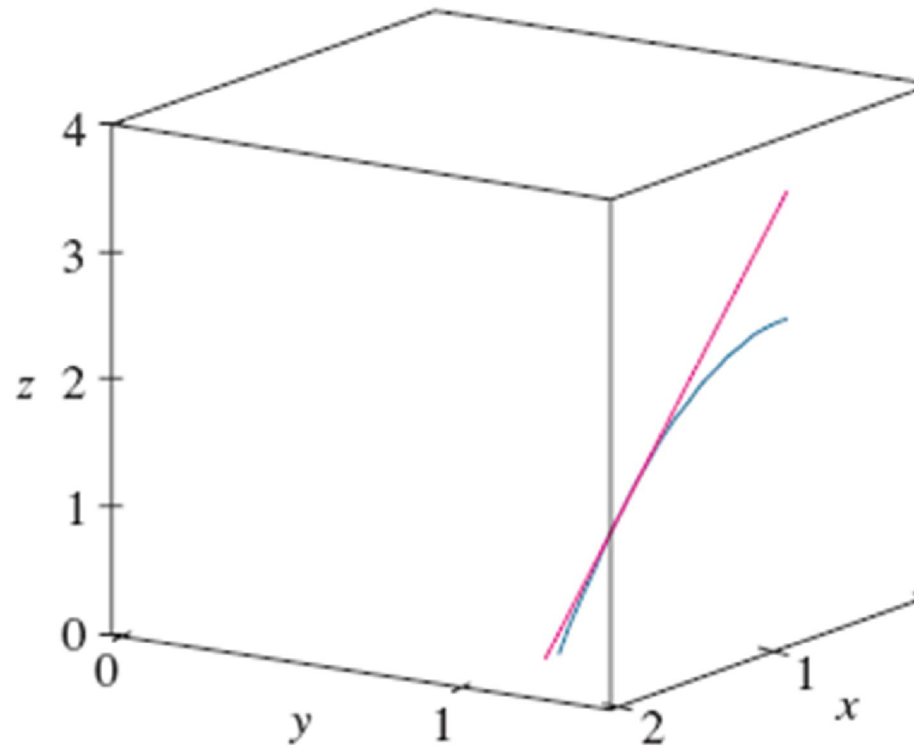
Mặt phẳng y = 1 cắt ngang được đường cong C_1.

Tiếp tuyến với C_1 tại (1,1,1) là đường thẳng màu hồng.

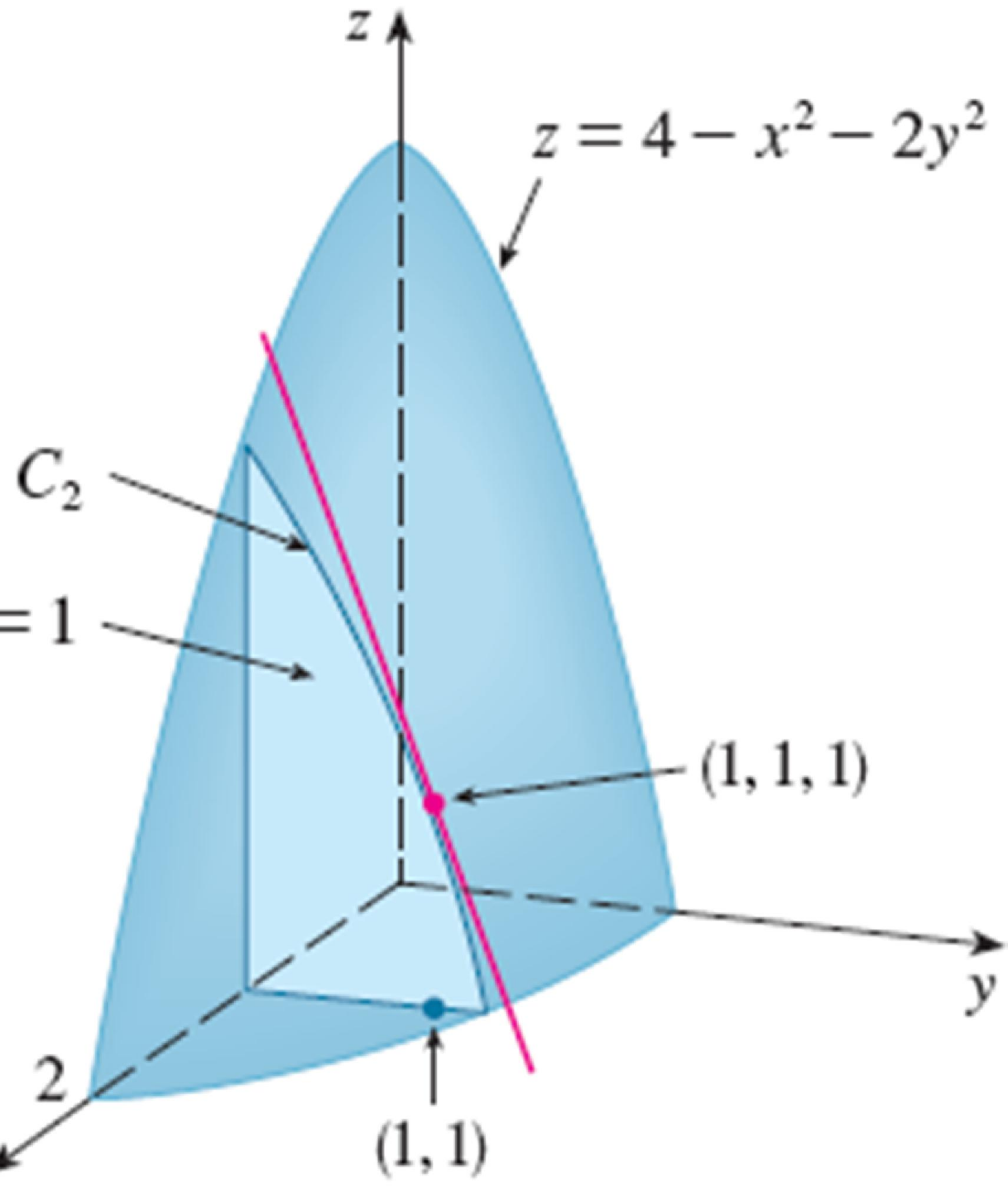
Hệ số góc của tiếp tuyến với tại (1,1,1) là đạo hàm riêng cần tìr

Biễu diễn hình học của $f_x^{'}(1,1)$ với $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$





dụ. Cho hàm $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$. Tìm $f_y'(1,1)$ và biểu diễn hình học của hàm riêng này.



$$f_y'(x,y) = (4 - x^2 - 2y^2)_y' = -4y$$

$$\Rightarrow f_y'(1,1) = -4.1 = -4$$

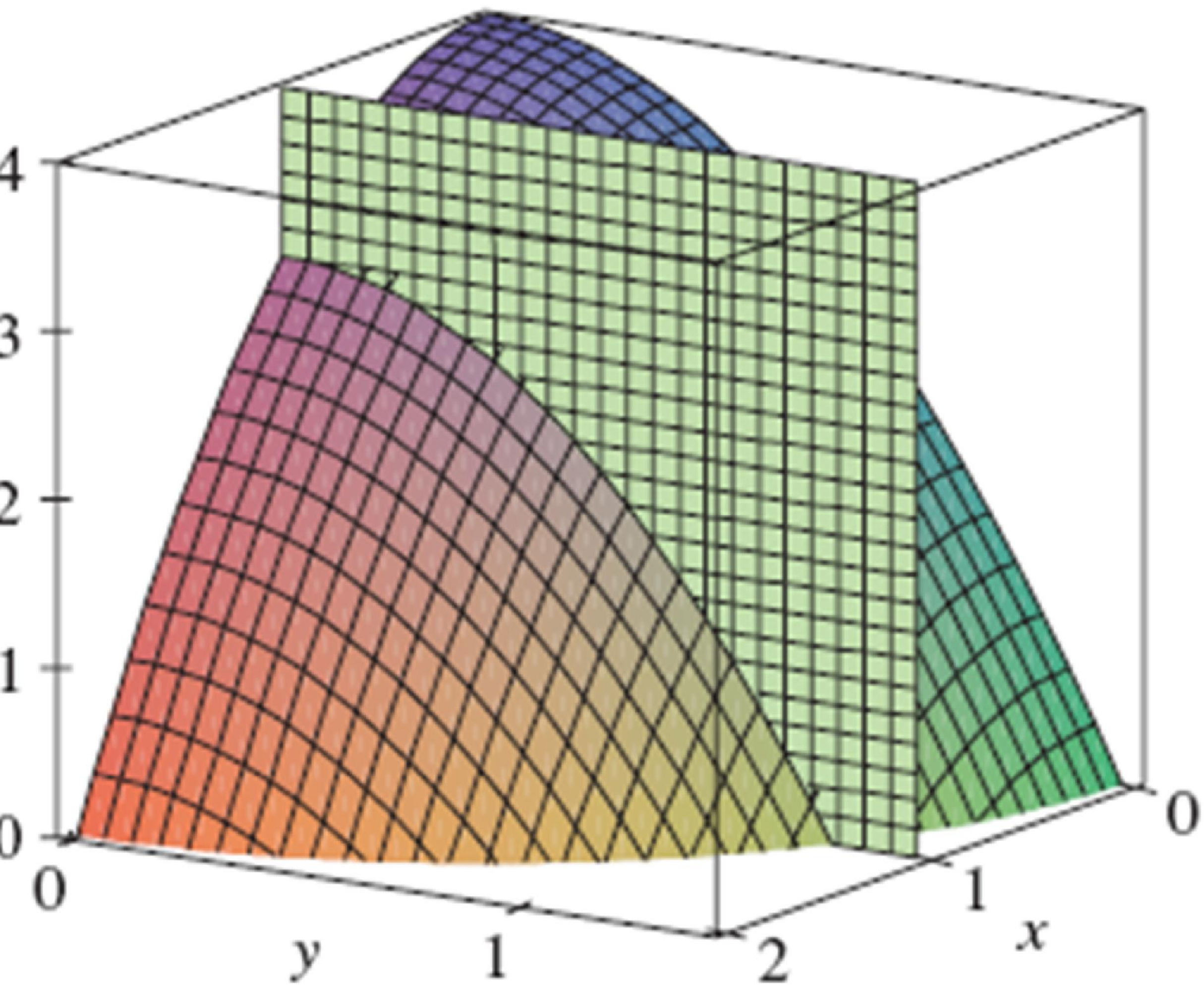
Mặt bậc hai f = f(x,y) màu xanh.

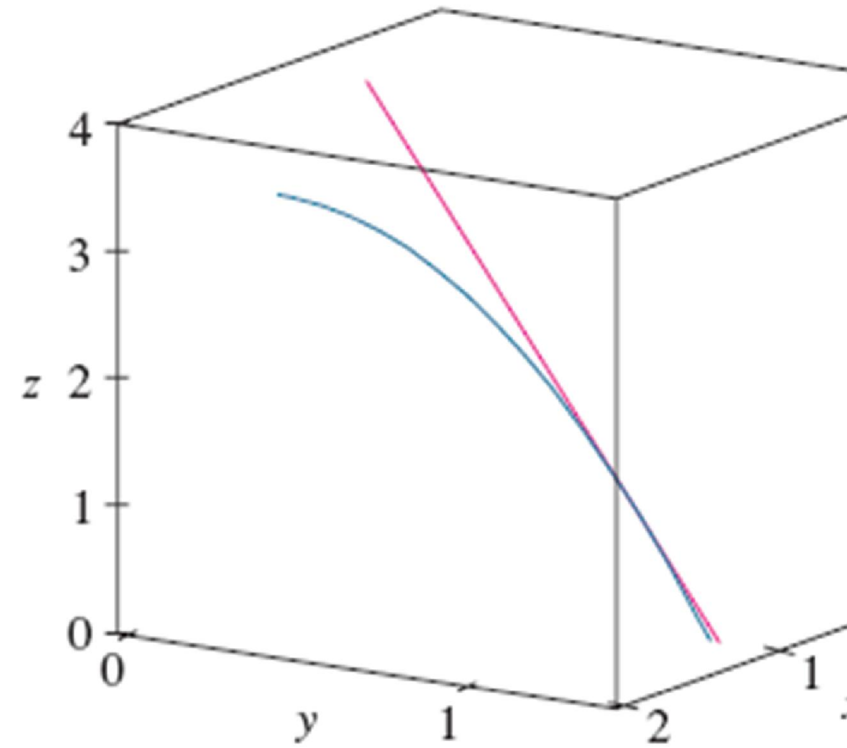
Mặt phẳng x = 1 cắt ngang được đường cong C_2.

Tiếp tuyến với C_2 tại (1,1,1) là đường thẳng màu hồng.

Hệ số góc của tiếp tuyến với tại (1,1,1) là đạo hàm riêng cần tìm

Biễu diễn hình học của $f_y^{'}(1,1)$ với $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$





I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Tính chất của đạo hàm riêng

Vì đạo hàm riêng là đạo hàm của hàm một biến nên tính chất của đạo hàm riêng cũng là tính chất của đạo hàm của hàm một biến.

1) $(\alpha f)'_x = \alpha f'_x$

2) $(f+g)'_x = f'_x + g'_x$

3) $(f \cdot g)'_x = f'_x \cdot g + f \cdot g'_x$

4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'_x = \dfrac{g f'_x - f g'_x}{g^2}$

Hàm một biến: hàm liên tục tại x_0 khi và chỉ khi hàm có đạo hàm cấp 1 tại x_0

Hàm nhiều biến: Tồn tại hàm có các đạo hàm riêng cấp 1 tại (x_0,y_0) nhưng không liên tục tại điểm này. Giải thích!

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Ví dụ

Tìm đạo hàm riêng $f'_x(1,2), f'_y(1,2)$, biết $f(x,y) = \ln(x^2 + 2y^2)$

Giải.

$$f'_x(x,y) = \left(\ln(x^2+2y^2)\right)'_x$$

$$f'_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+2y^2} \qquad \Rightarrow f'_x(1,2) = \frac{2}{9}$$

$$f'_y(x,y) = \left(\ln(x^2+2y^2)\right)'_y$$

$$f'_y(x,y) = \frac{4y}{x^2+2y^2} \qquad \Rightarrow f'_y(1,2) = \frac{8}{9}$$

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Ví dụ

Tìm đạo hàm riêng $f'_x(1,2), f'_y(1,2)$, biết $f(x,y) = (x+2y)^y$

Giải.

$$f'_x(x,y) = \left((x+2y)^y\right)'_x$$

$$f'_x(x,y) = y(x+2y)^{y-1} \Rightarrow f'_x(1,2) = 10$$

$$\ln f = y\ln(x+2y)$$

Đạo hàm riêng hai vế theo y, ta có $\dfrac{f'_y}{f} = \ln(x+2y) + y\cdot\dfrac{2}{x+2y}$

$$\Rightarrow f'_y(x,y) = (x+2y)^y\left[\ln(x+2y) + y\cdot\frac{2}{x+2y}\right]$$

$$\Rightarrow f'_y(x,y) = 25(\ln 5 + \frac{4}{5})$$

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Ví dụ

Cho $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^3}$.

1) Tìm $f'_x(1,1)$ 2) Tìm $f'_x(0,0)$ 3) Tìm $f'_y(0,0)$

Giải. 1) $f'_x(x,y)=\left(\sqrt{x^2+y^3}\right)'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^3}}$ $\Rightarrow f'_x(1,1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2) Không thể thay (0,0) vào công thức để tìm $f'_x(0,0)$. Ta sử dụng định ngh

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

Không tồn tại giới hạn này vì giới hạn trái và giới hạn phải không bằng nha

Tương tự $f'_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\sqrt{(\Delta y)^3}-0}{\Delta y}=0$

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Ví dụ

Cho $f(x,y) = \int\limits_{1}^{\sqrt{x^2+y^2}} e^{t^2}\, dt$

Tìm $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$.

Giải.

$$f'_x(x,y) = \left(\int\limits_{1}^{\sqrt{x^2+y^2}} e^{t^2}\, dt \right)'_x = e^{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x = e^{x^2+y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Vì biểu thức đối xứng đối với x và y nên, đổi chỗ x và y cho nhau ta được đạo hàm riêng theo y.

$$\Rightarrow f'_y(x,y) = e^{x^2+y^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Ví dụ

Cho $$f(x,y)=\begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)}, & \text{nếu } x^2+y^2>0 \\ 0, & \text{nếu } x^2+y^2=0 \end{cases}$$

Tìm $f_x'(0,0)$.

Giải.

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{-1/(\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

Đặt $t=\dfrac{1}{\Delta x}$, suy ra $t\to\infty$.

$$\Rightarrow f_x'(0,0)=\lim_{t\to\infty} te^{-t^2}=0$$ (sử dụng qui tắc Lopital)

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Cho hàm hai biến f = f(x,y).

Đạo hàm riêng theo x và theo y là những hàm hai biến x và y:

Ta có thể lấy đạo hàm riêng của hàm $f_x^{'}(x, y)$:

$$\left(f_x^{'}(x, y)\right)_x^{'} = f_{xx}^{''}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \qquad \left(f_x^{'}(x, y)\right)_y^{'} = f_{xy}^{''}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x$$

Tương tự có thể lấy đạo hàm riêng của hàm $f_y^{'}(x, y)$:

$$\left(f_y^{'}(x, y)\right)_x^{'} = f_{yx}^{''}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \qquad \left(f_y^{'}(x, y)\right)_y^{'} = f_{yy}^{''}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x$$

Tiếp tục quá trình, ta có khái niệm các đạo hàm cấp cao.

Vì đạo hàm riêng là đạo hàm của hàm một biến nên việc tính đạo hàm riêng cấp cao cũng tương tự tính đạo hàm cấp cao của hàm một biến: dùng công thức Leibnitz và các đạo hàm cấp cao thông dụng.

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Chú ý.

Nói chung $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$, nên khi lấy đạo hàm riêng cấp cao ta phải chú ý đến thứ tự lấy đạo hàm.

Định lý

Cho hàm f(x,y) và các đạo hàm riêng $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ xác định trong lân cận của (x_0, y_0) và liên tục tại điểm này. Khi đó

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

Chứng minh:

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Ví dụ

Chứng tỏ rằng hàm $f(x,y) = e^x \sin y$ thỏa phương trình Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Giải. $f'_x(x,y) = e^x \sin y$ $\qquad f''_{xx} = e^x \sin y$

$f'_y(x,y) = e^x \cos y$ $\qquad f''_{yy} = -e^x \sin y$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$$

Hàm f = f(x,y) thỏa phương trình Laplace được gọi là hàm điều hòa.

Hàm điều hòa đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết fluid flow, hea conduction, electric potential,….

I. Đạo hàm riêng và vi phân của f = f(x,y)

Ví dụ

Chứng tỏ rằng hàm $u(x,t) = \sin(x - at)$ thỏa phương trình sóng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Giải. $u'_t(x,t) = -a\cos(x - at)$ $\quad u''_{tt} = -a^2 \sin(x - at)$

$u'_x(x,t) = \cos(x - at)$ $\quad u''_{xx} = -\sin(x - at)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a^2 \sin(x - at)$$

Phương trình sóng mô tả sự chuyển động của các loại sóng: sóng biển, sóng âm thanh hay sóng chuyển động dọc theo một sợi dây rung.