

Trường Đại học Bách khoa tp. Hồ Chí Minh

Bộ môn Toán Ứng dụng

Giải tích hàm nhiều biến

Chương 3: Tích phân kép

- *Giảng viên Ts. Đặng Văn Vinh (4/2008)*
dangvvinh@hcmut.edu.vn

Nội dung

0.1 – Định nghĩa, cách tính tích phân kép

0.2 – Tọa độ cực

0.3 – Ứng dụng hình học

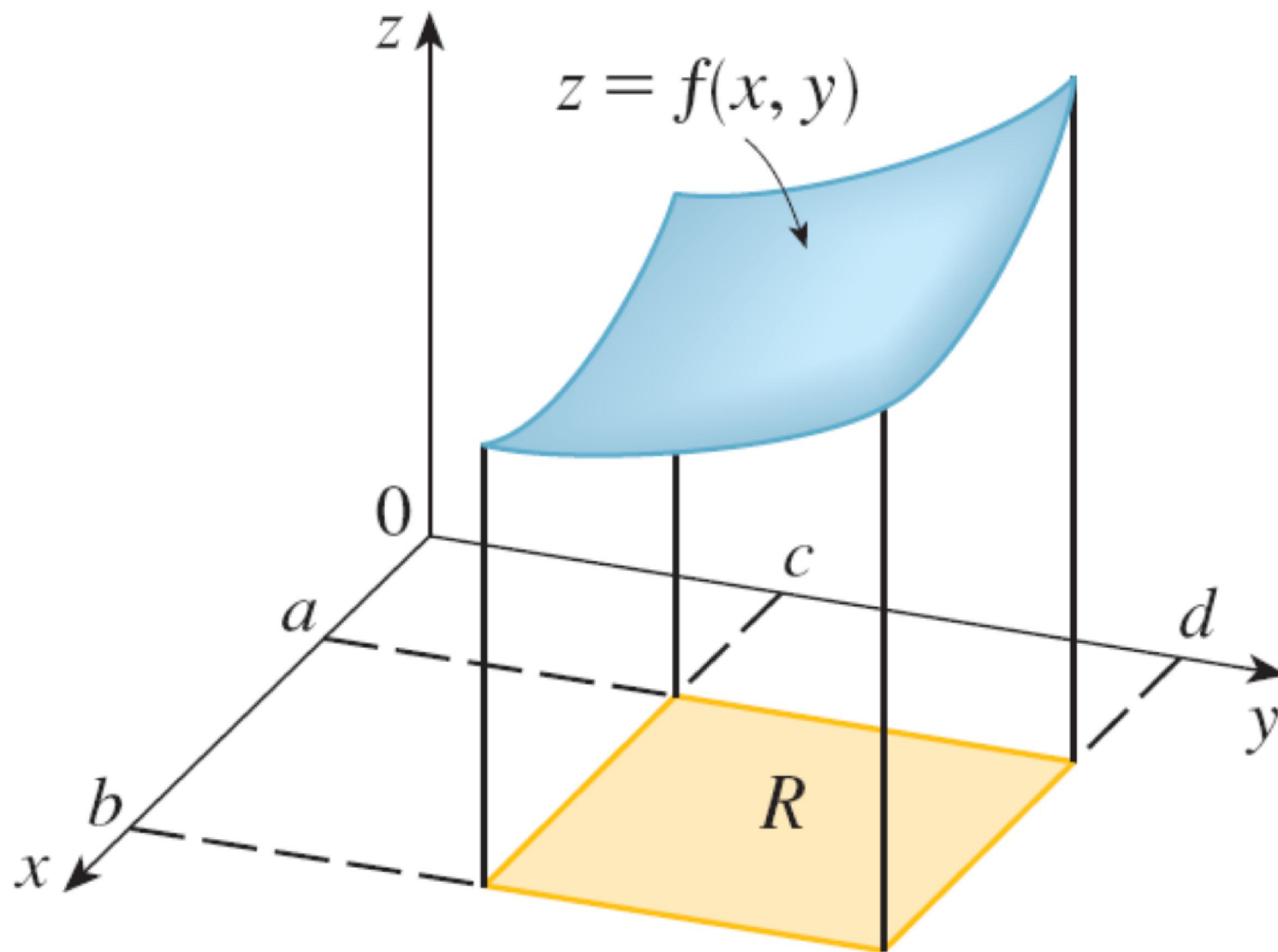
0.4 – Ứng dụng cơ học

I. Định nghĩa, cách tính tích phân kép

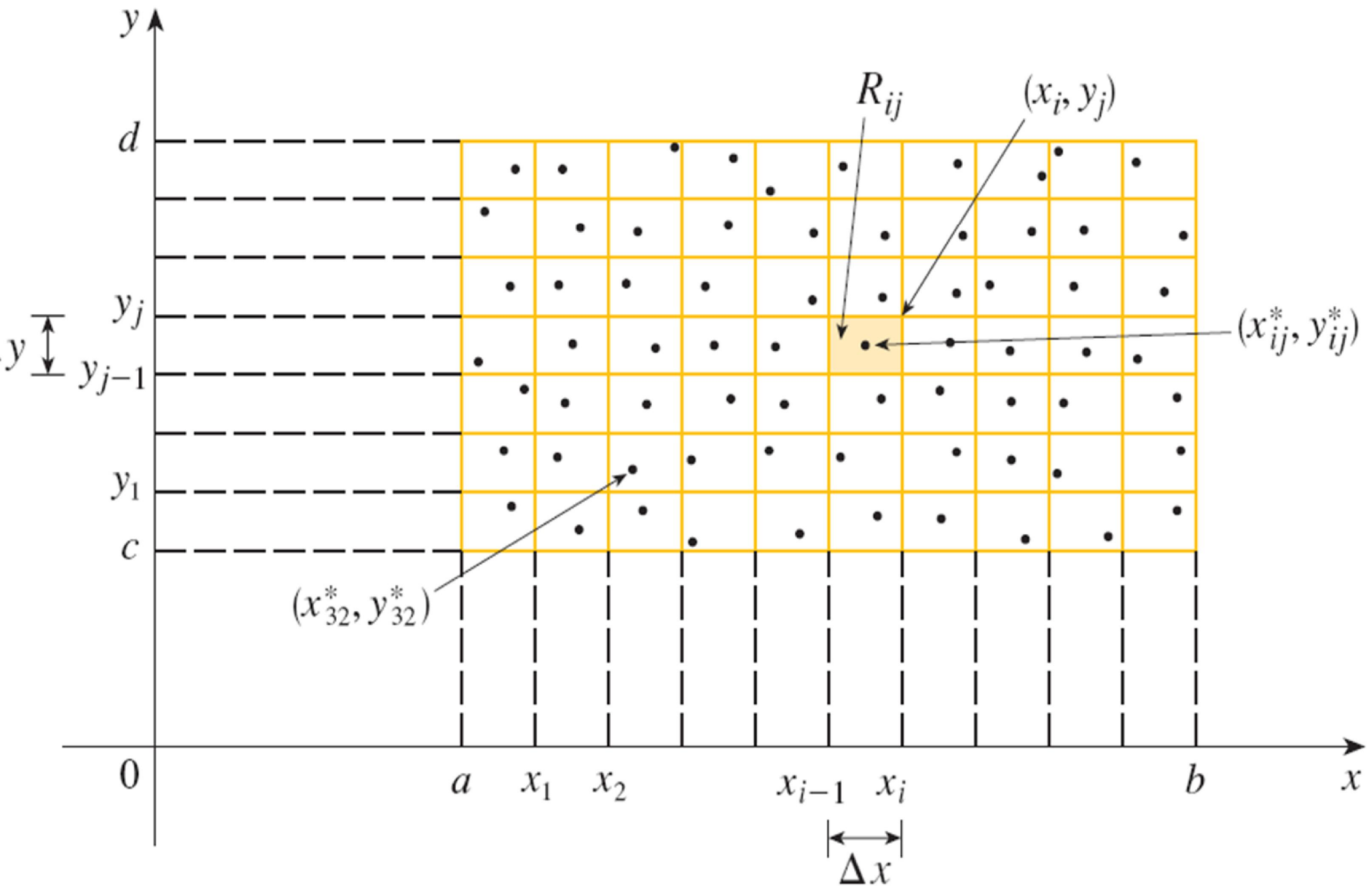
Cho vật thể (hình trụ cong) được giới hạn trên bởi mặt bậc hai $f = f(x, y)$ giới hạn xung quanh bởi những đường thẳng song song oz, tựa trên biên D giới hạn dưới bởi miền D (đóng, bị chặn).

Tìm thể tích vật thể.

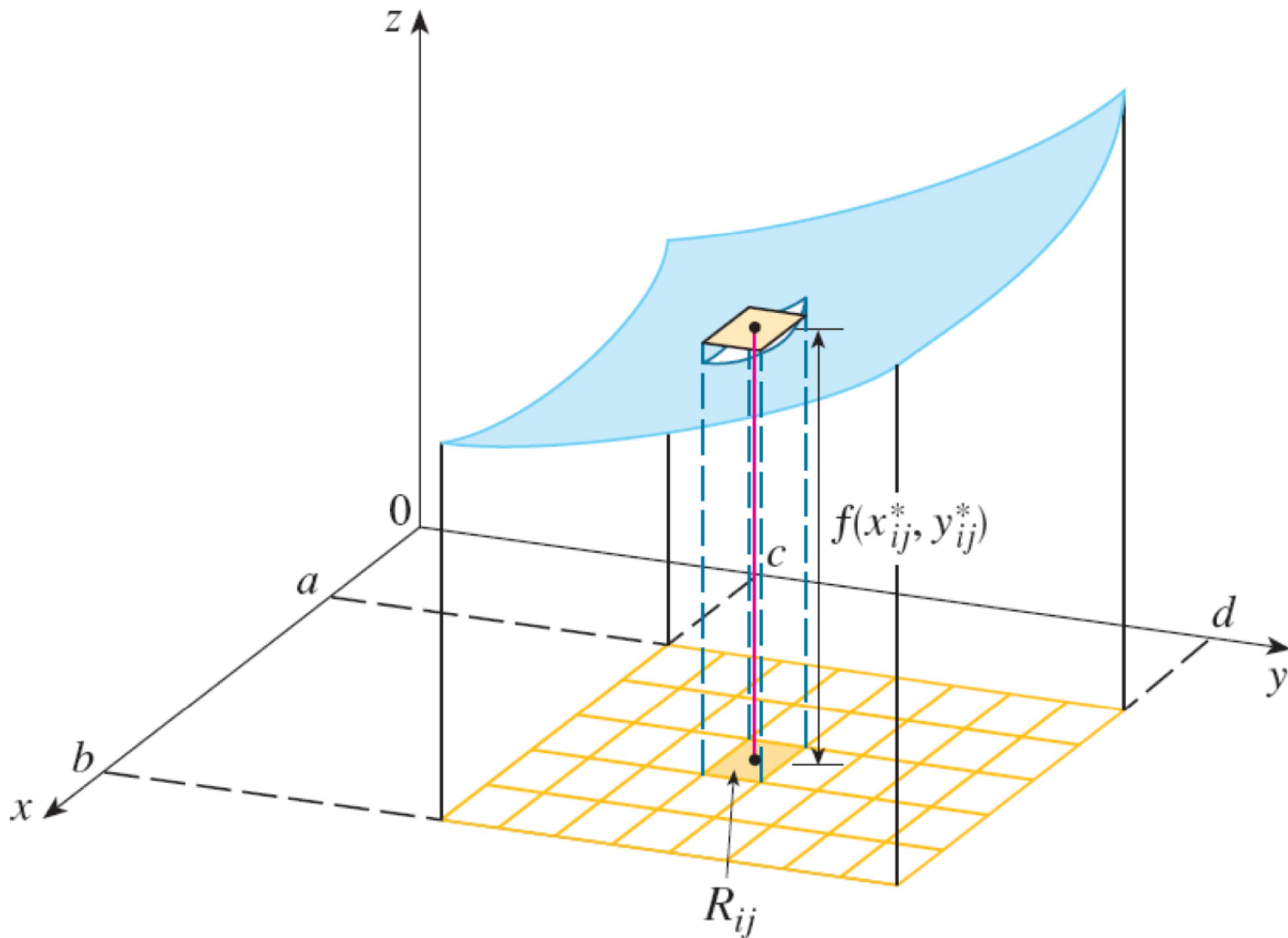
I. Định nghĩa, cách tính tích phân kép



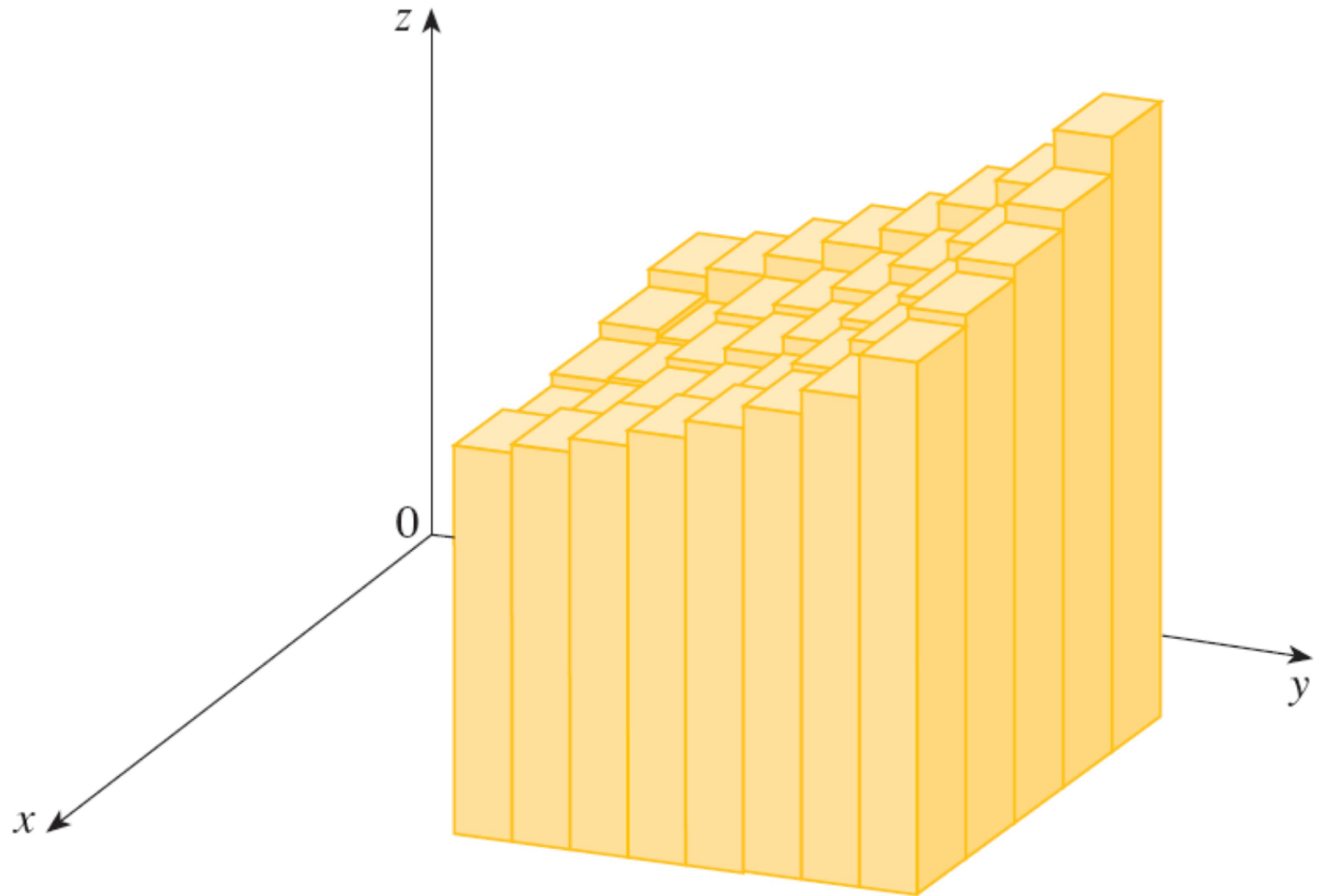
I. Định nghĩa, cách tính tích phân kép



I. Định nghĩa, cách tính tích phân kép



I. Định nghĩa, cách tính tích phân kép



I. Định nghĩa, cách tính tích phân kép

Cho vật thể được giới hạn trên bởi mặt bậc hai $f(x, y)$

giới hạn dưới bởi miền D (đóng, bị chặn).

giới hạn xung quanh bởi những đường thẳng song song oz , tựa trên biên D

Tìm thể tích vật thể.

1) Chia D **một cách tùy ý** ra thành n miền không dẫm nhau: D_1, D_2, \dots, D_n .

Có diện tích tương ứng là $S_{D_1}, S_{D_2}, \dots, S_{D_n}$.

2) Trên mỗi miền **lấy tùy ý một điểm** $M_i(x_i, y_i) \in S_{D_i}$

3) Thể tích của vật thể: $V \approx \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot S_{D_i} = V_n$

4) $V = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

I. Định nghĩa, cách tính tích phân kép

Định nghĩa tích phân kép

Cho $f = f(x, y)$ xác định trên miền đóng và bị chặn D .

Tích phân kép của f trên miền D là giới hạn (nếu có)

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot S_{D_i} \right)$$

Nếu I tồn tại, ta nói f khả tích trên D .

I. Định nghĩa, cách tính tích phân kép

Tính chất của tích phân kép

1) Hàm liên tục trên một miền đóng, bị chặn, có biên trơn từng khúc thì khả tích trên miền này.

$$2) S_D = \iint_D 1 dx dy$$

$$3) \iint_D \alpha f(x, y) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy$$

$$4) \iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy$$

5) Nếu D được chia làm hai miền D_1 và D_2 không dẫm lên nhau:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

$$6) \forall (x, y) \in D, f(x, y) \leq g(x, y) \Rightarrow \iint_D f dx dy \leq \iint_D g dx dy$$

I. Định nghĩa, cách tính tích phân kép

Ví dụ

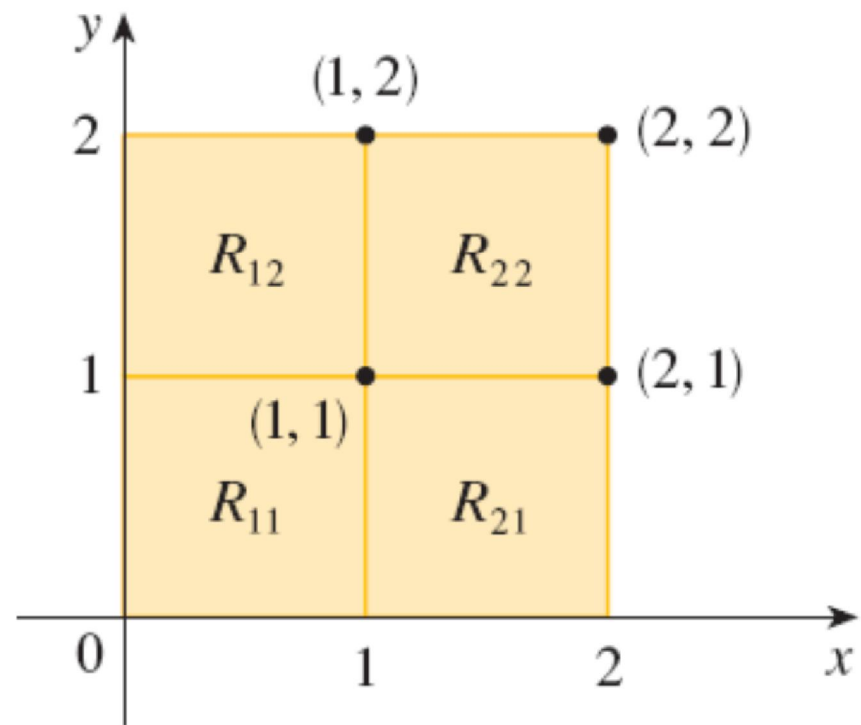
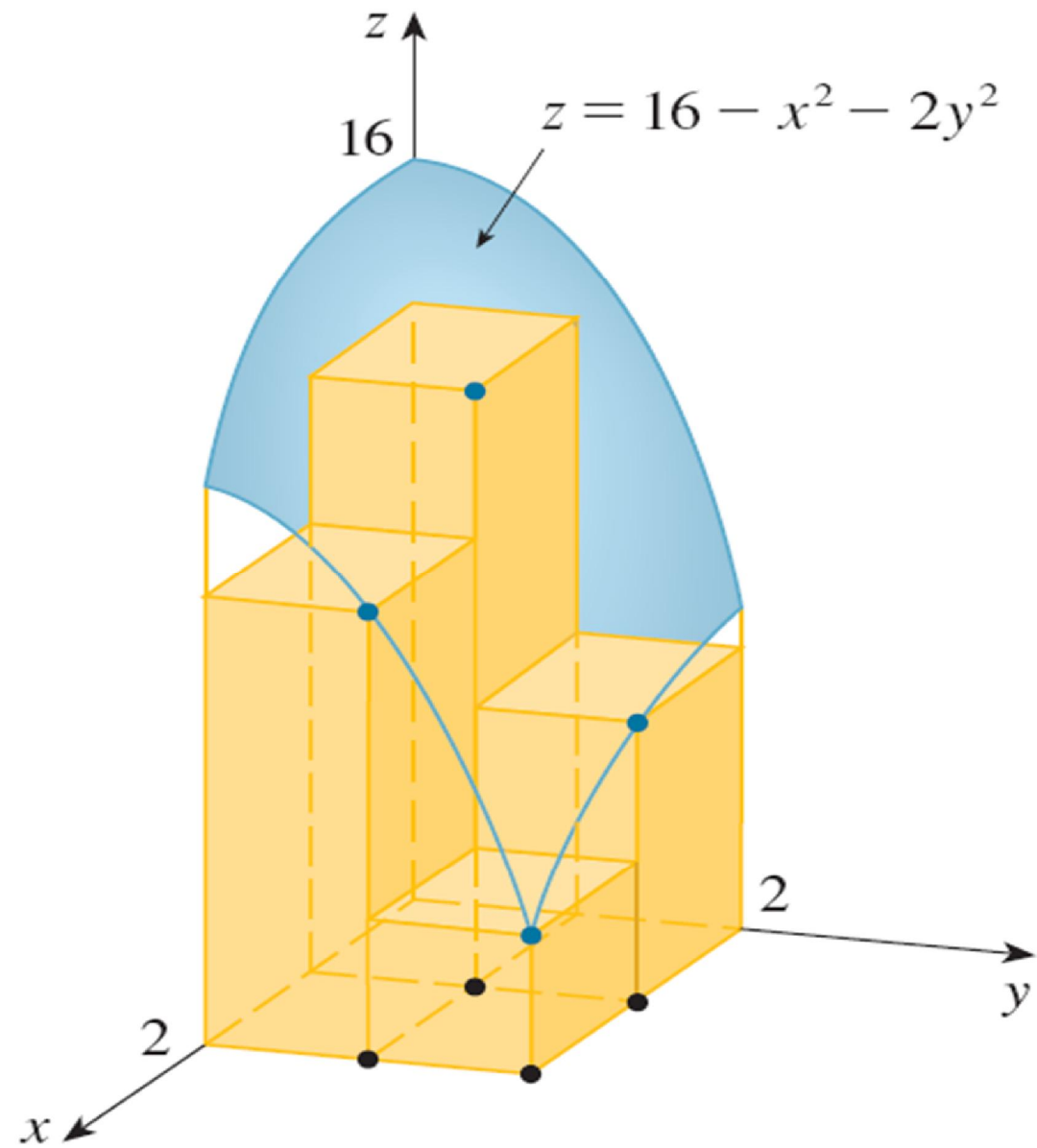
Cho vật thể được giới hạn trên bởi mặt bậc hai $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$

giới hạn dưới bởi hình vuông: $R = [0, 2] \times [0, 2]$

giới hạn xung quanh bởi những đường thẳng song song oz , tựa trên biên R .

Ước lượng thể tích của vật thể trong các trường hợp sau:

- Chia R thành 4 phần bằng nhau;
- Chia R thành 16 phần bằng nhau;
- Chia R thành 64 phần bằng nhau;
- Chia R thành 256 phần bằng nhau;
- Tính thể tích của vật thể.



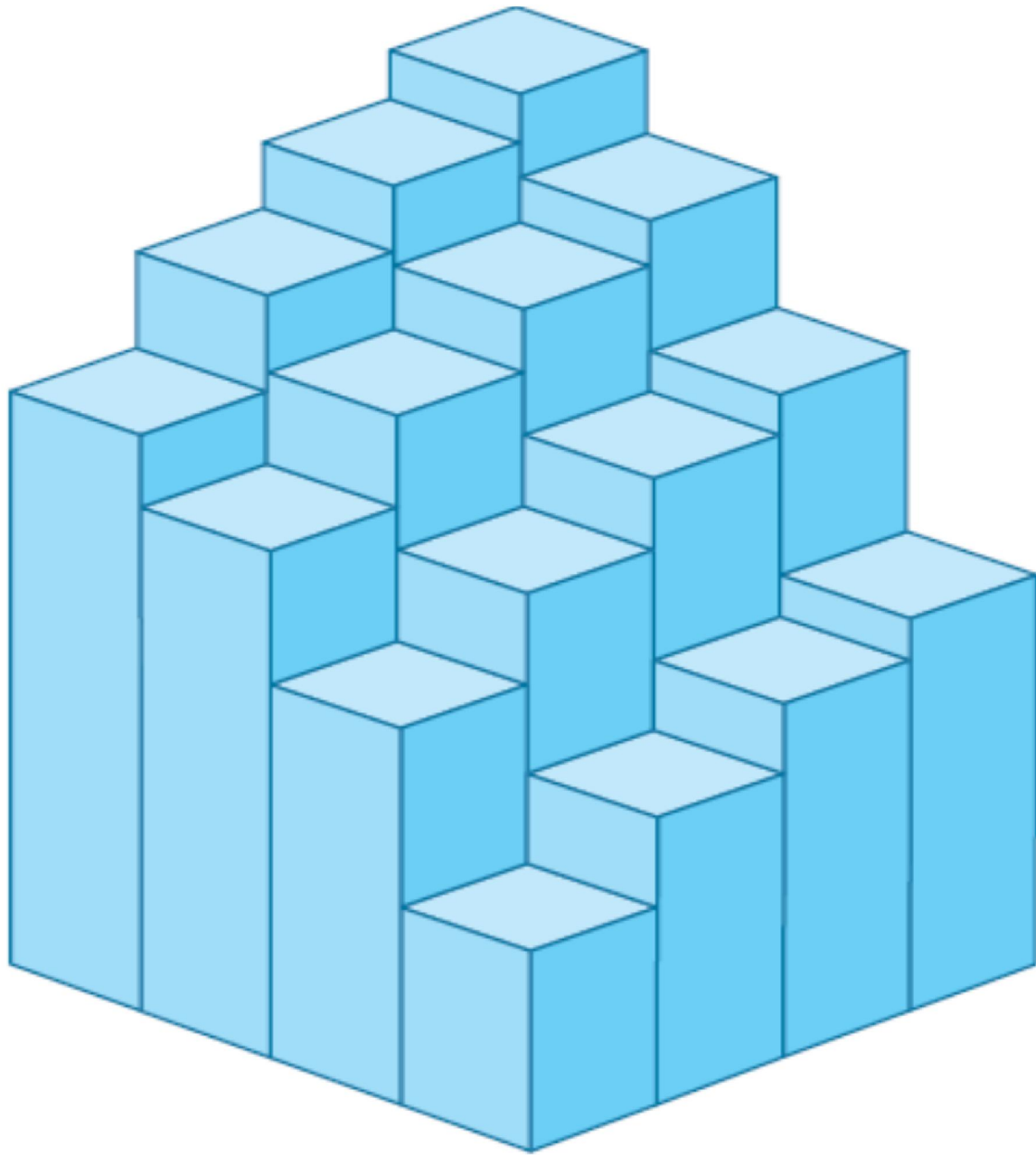
$$V \approx V_n = \sum_{i=1}^4 f(M_i) \cdot S_{D_i}$$

$$S_{D_i} = 1, \forall i=1, \dots, 4.$$

$$V \approx f(1,1) + f(1,2) + f(2,1) + f(2,2)$$

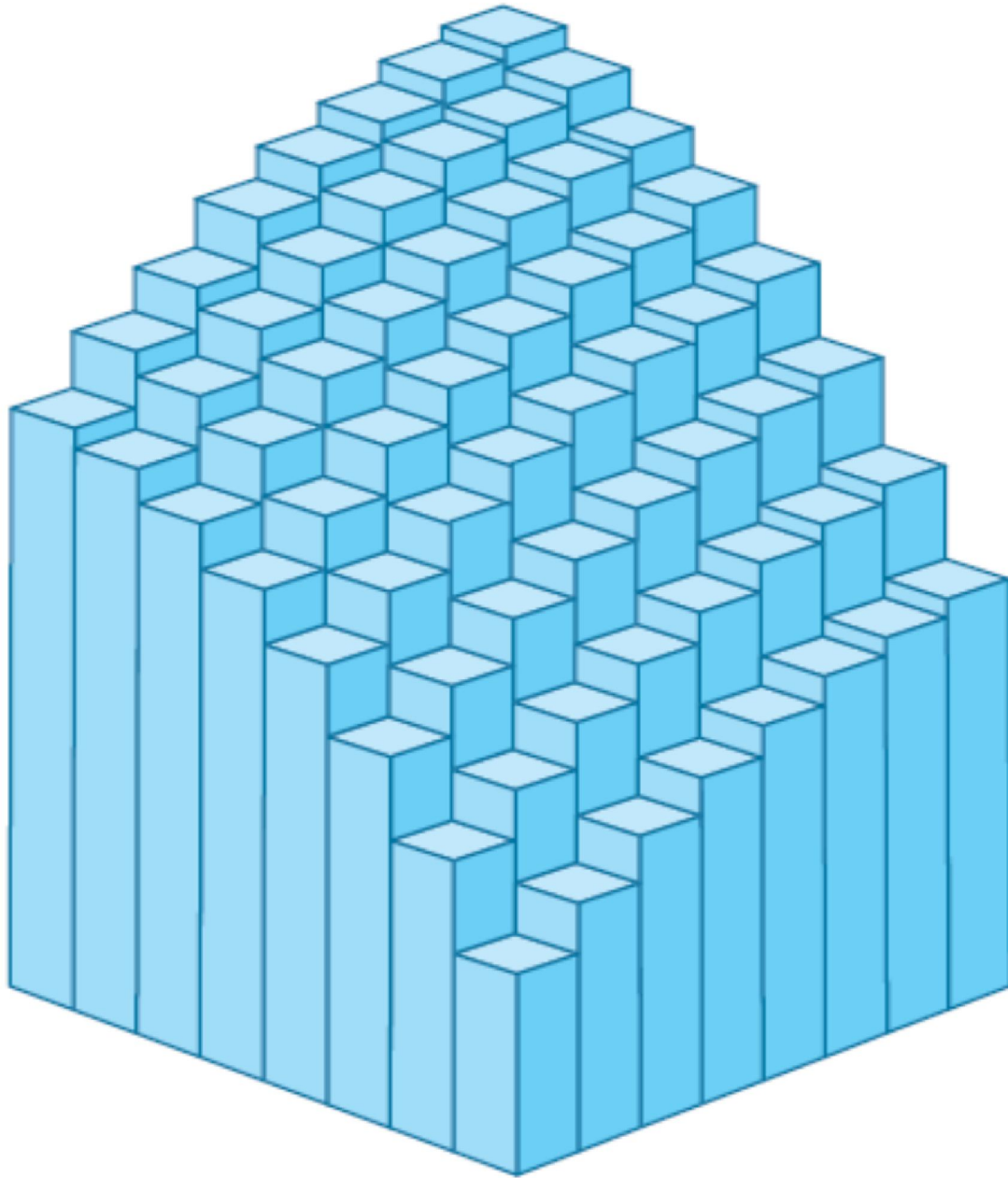
$$V \approx 13 + 7 + 10 + 4 = 34.$$

I. Định nghĩa, cách tính tích phân kép



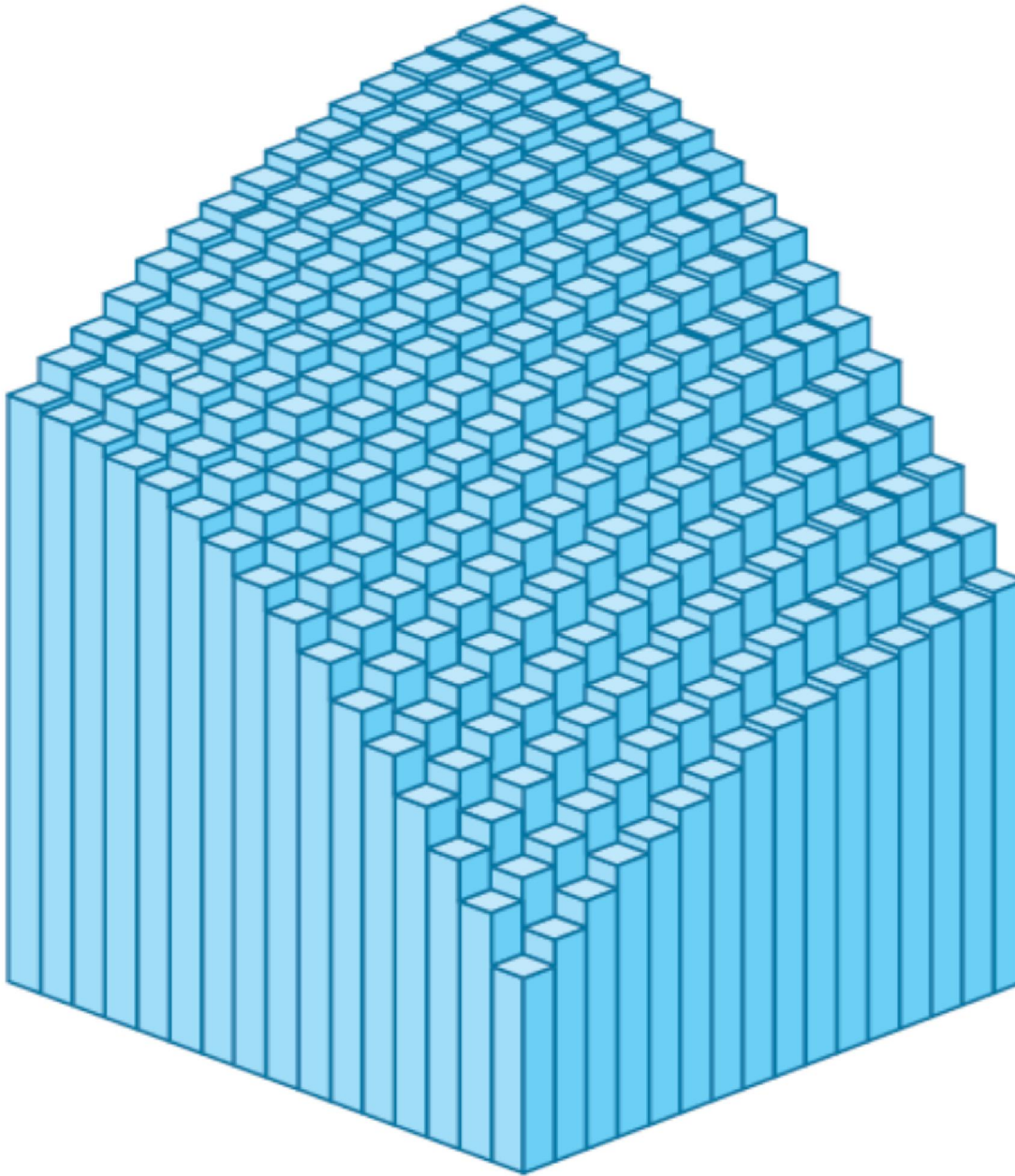
(a) $m = n = 4, V \approx 41.5$

I. Định nghĩa, cách tính tích phân kép



(b) $m = n = 8, V \approx 44.875$

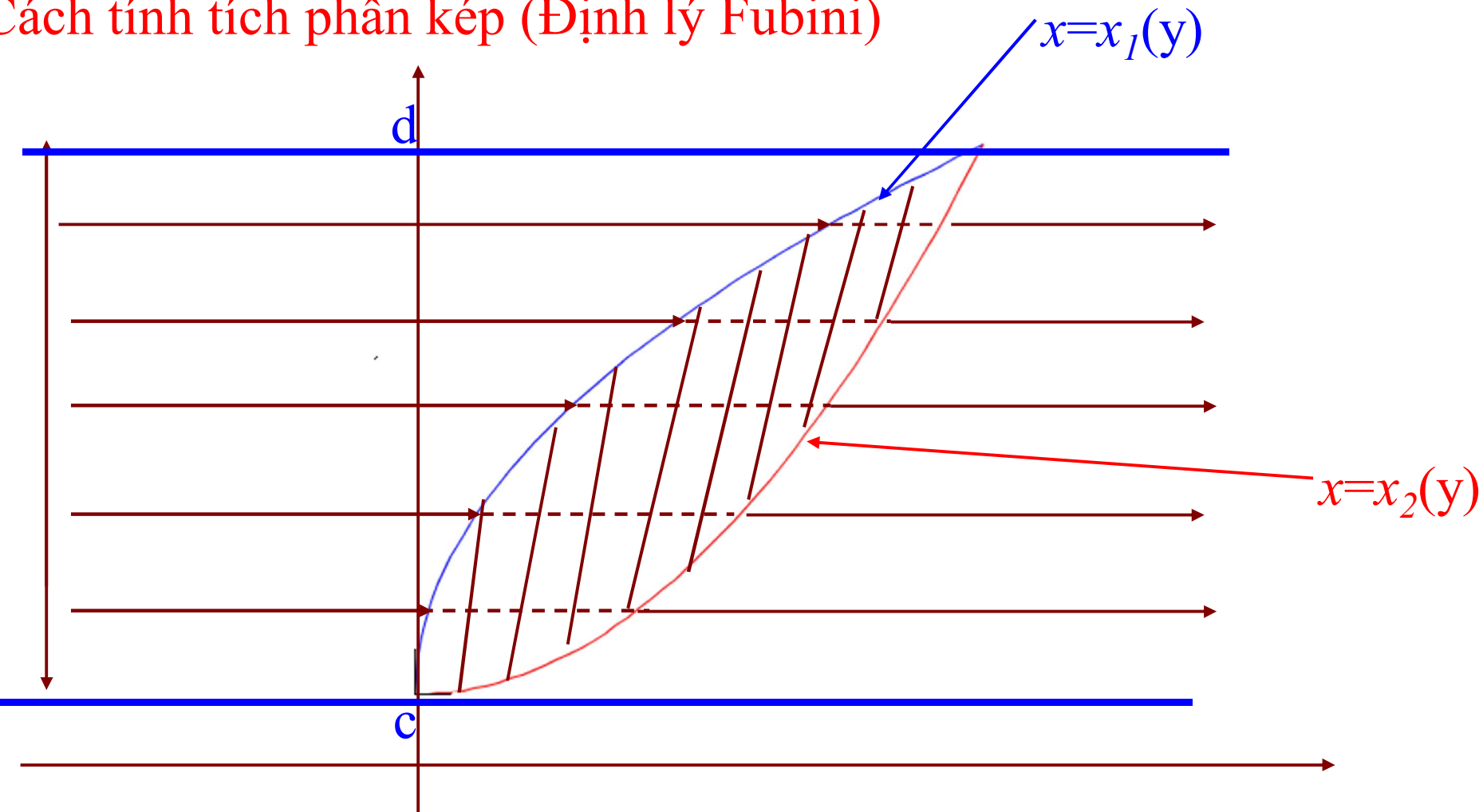
I. Định nghĩa, cách tính tích phân kép



(c) $m = n = 16, V \approx 46.46875$

I. Định nghĩa, cách tính tích phân kép

Cách tính tích phân kép (Định lý Fubini)



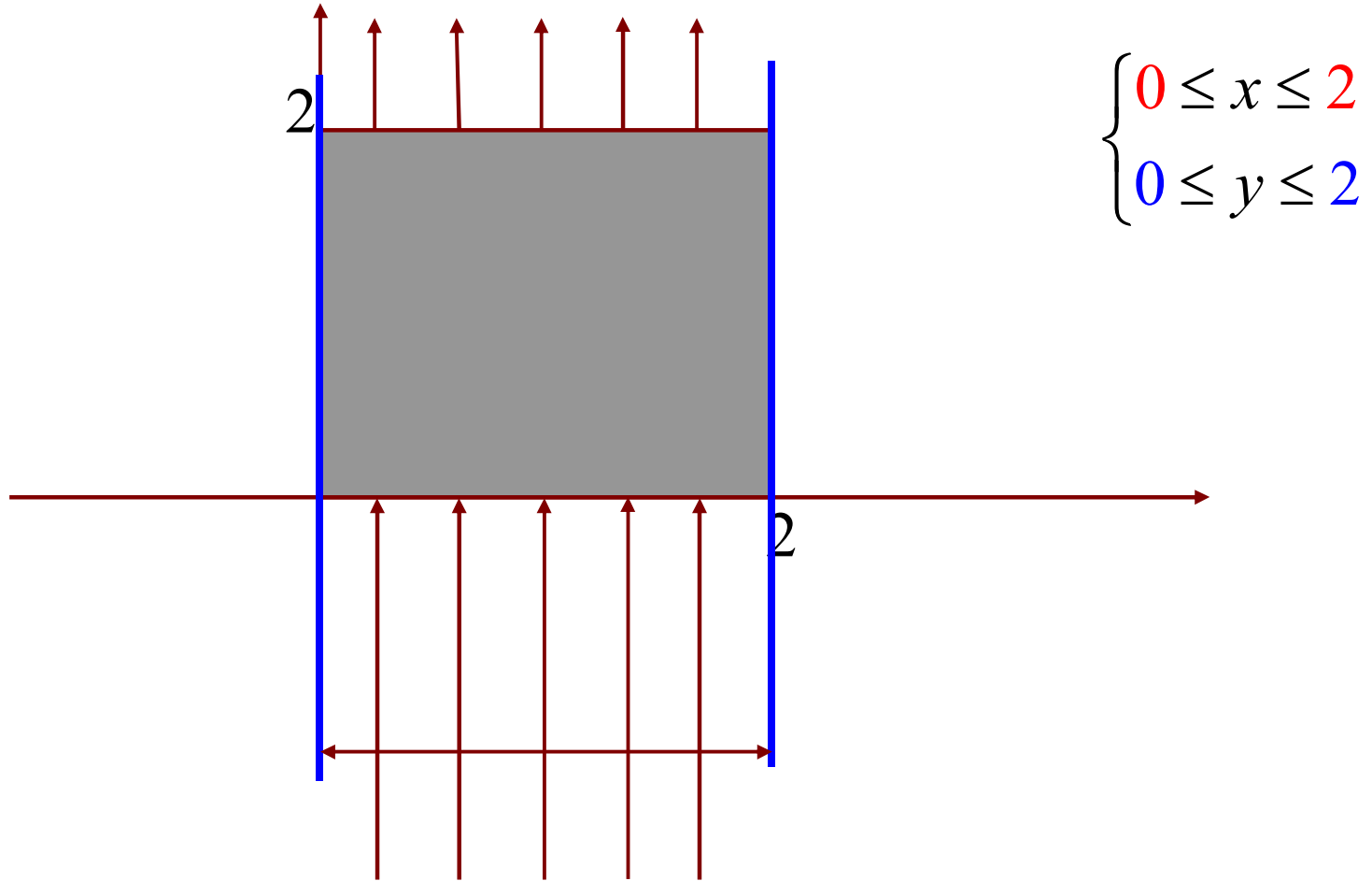
Giả sử D xác định bởi:

$$\begin{cases} c \leq y \leq d \\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \end{cases}$$

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$

I. Định nghĩa, cách tính tích phân kép

Giải câu e)

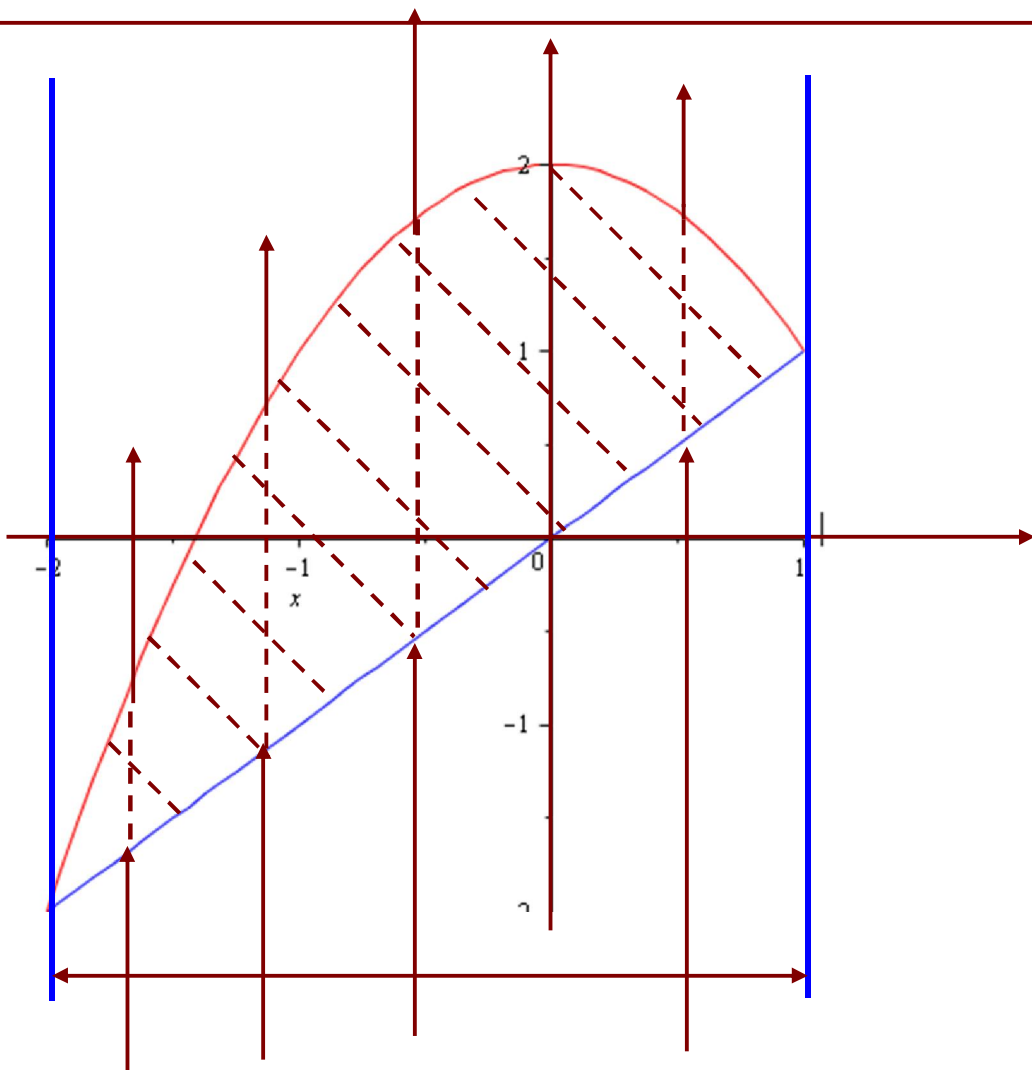


Thể tích của vật thể. $V = \iint_R (16 - x^2 - 2y^2) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) dy$

$$\int_0^2 \left[(16 - x^2)y - 2 \frac{y^3}{3} \right]_0^2 dx = \int_0^2 \left(32 - 2x^2 - \frac{16}{3} \right) dx = 48$$

Tính tích phân kép $I = \iint_D xy dx dy$, trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi

$$y = 2 - x^2, y = x.$$



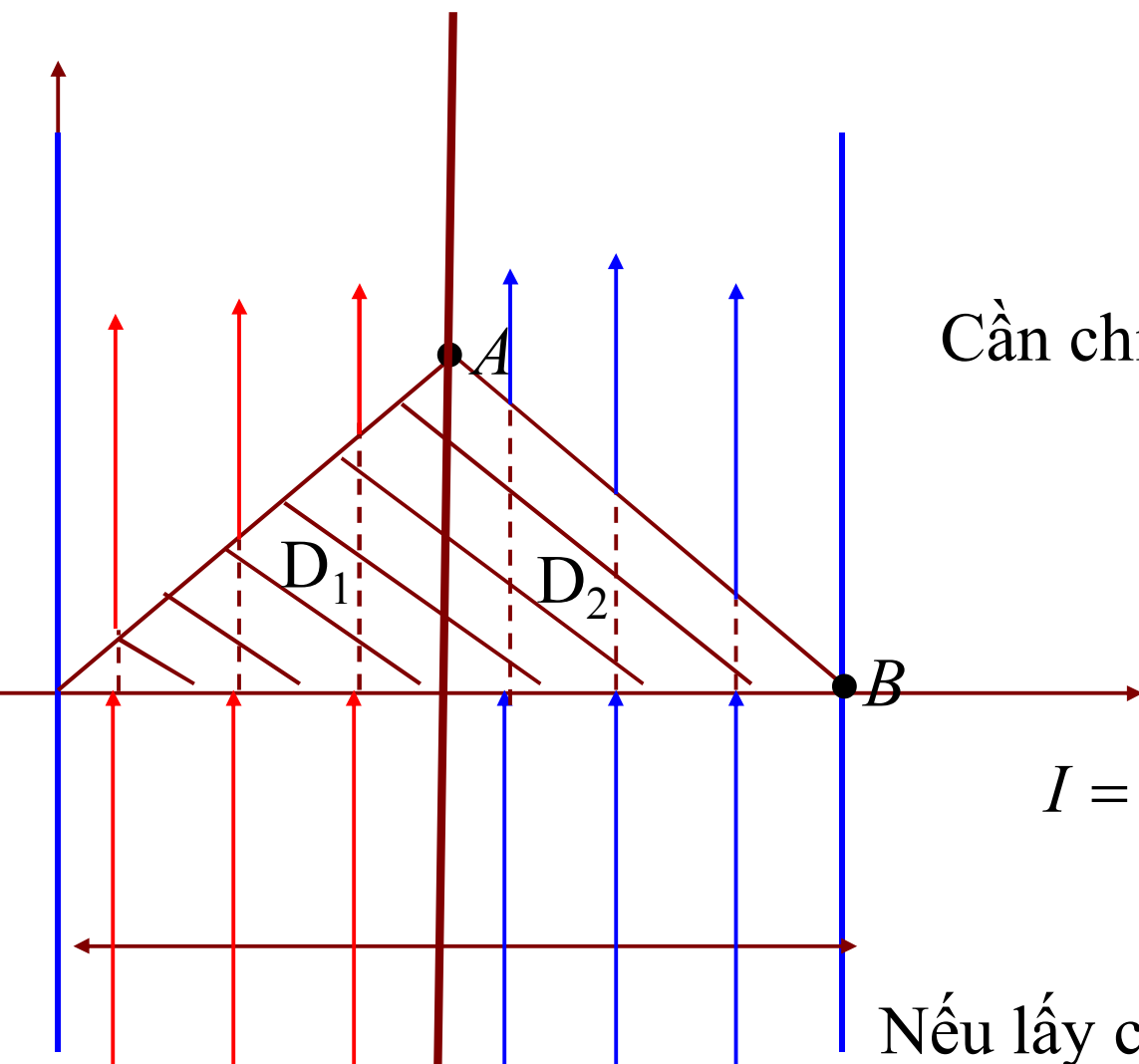
$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 2 - x^2 \end{cases}$$

$$I = \iint_D (xy) dx dy = \int_{-2}^1 dx \int_x^{2-x^2} (xy) dy$$

$$= \int_{-2}^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_x^{2-x^2} dx$$

$$= \int_{-2}^1 \left(x \frac{(2-x^2)^2}{2} - x \frac{x^2}{2} \right) dx$$

Tính tích phân kép $I = \iint_D (x + y) dx dy$, trong đó D là tam giác OAB , với
 $O(0,0), A(1,1), B(2,0)$.



$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq ? \end{cases}$$

Cần chia D ra thành hai miền: D_1 và D_2

$$I = \iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2}$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x (x + y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} (x + y) dy$$

Nếu lấy cận y trước, x sau thì không cần chia