TOÁN TỬ CASIMIR C_2 CHO NHÓM ĐỐI XỨNG SO(10) CỦA BÀI TOÁN MICZ-KEPLER CHÍN CHIỀU

PHAN NGỌC HƯNG*, THỚI NGỌC TUẤN QUỐC**, LÊ VĂN HOÀNG***

TÓM TẮT

Trên cơ sở nhóm đối xứng SO(10) của bài toán MICZ-Kepler chín chiều, toán tử bất biến Casimir C_2 được xây dựng dưới dạng hệ thức tường minh liên hệ trực tiếp với Hamiltonian của hệ. Hệ thức này cho phép phổ năng lượng của bài toán được xây dựng bằng phương pháp thuần đại số. Biểu thức năng lượng phù hợp với kết quả giải trực tiếp bằng phương pháp giải tích trước đây.

Từ khóa: bài toán MICZ-Kepler, đối xứng ẩn, đại số SO(10), toán tử Casimir, không gian chín chiều.

ABSTRACT

Casimir operator C_2 for symmetry group SO(10) of the nine-dimensional MICZ-Kepler problem

Basing on the symmetry group SO(10) of the nine-dimensional MICZ-Kepler problem the Casimir operator is established in the explicit form relating directly to the Hamiltonian of the system. The explicit form allows energy levels of the problem to be constructed by the purely algebraic method. The expression of the energy levels is suitable with the results obtained by analytical calculations published before.

Keywords: MICZ-Kepler problem, hidden symmetry, SO(10) algebra, Casimir operators, nine-dimensional space.

1. Bài toán MICZ-Kepler chín chiều

Bài toán MICZ-Kepler là một sự mở rộng của bài toán Coulomb với sự bổ sung một thế đơn cực thích hợp. Bài toán lần đầu tiên được xây dựng và khảo sát từ những năm 1970 trong không gian ba chiều [2, 7]. Bài toán cũng đã được mở rộng lên ở các không gian có số chiều cao hơn như năm chiều [1] và chín chiều [3, 5, 6]. Đặc biệt, công trình [6] cho thấy việc mở rộng lên số chiều cao hơn không phải tùy ý, và bài toán MICZ-Kepler chín chiều chính là trường hợp cuối cùng có liên hệ trực tiếp với bài toán dao động tử điều hòa 16 chiều qua một phép biến đổi song tuyến tính.

Trong bài toán MICZ-Kepler chín chiều, thế đơn cực được các tác giả đưa ra một cách tường minh là một đơn cực $SO(8)$. Cụ thể hơn, phương trình Schrodinger dừng của bài toán trong hệ đơn vị nguyên tử $m = c = e = \hbar = 1$ có dạng:

* ThS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM; *Email: hungpn@hcmup.edu.vn*

** ThS, Trường THPT Năng khiếu, ĐHQG TPHCM

*** PGS TSKH, Trường Đại học Sư phạm TPHCM

$$\hat{H}\Psi = \left\{ \frac{1}{2}\hat{\pi}^2 + \frac{\hat{Q}^2}{8r^2} - \frac{Z}{r} \right\}\Psi = E\Psi, \tag{1}$$

trong đó, $\hat{\pi}^2 = \hat{\pi}_\mu \hat{\pi}_\mu$, ($\mu = 1,\ldots,9$) với các thành phần xung lượng $\hat{\pi}_\mu$ có dạng tường minh:

$$\hat{\pi}_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j} + A_k(r)\hat{Q}_{kj}, \quad j,k = 1,\ldots,8,$$

$$\hat{\pi}_9 = -i\frac{\partial}{\partial x_9}.$$

Các số hạng $A_k(r)\hat{Q}_{kj}$ đặc trưng cho tương tác của hạt có isospin với đơn cực $SO(8)$ với thế vec-tơ có dạng tường minh:

$$A_k(r) = \frac{x_k}{r(r + x_9)}.$$

Toán tử $\hat{Q}^2 = \hat{Q}_{kj}\hat{Q}_{kj}$ ($j,k = 1,\ldots,8$) với $\hat{Q}_{kj}$ là các vi tử của nhóm $SO(8)$, nghĩa là thỏa mãn hệ thức giao hoán:

$$\left[\hat{Q}_{jk}, \hat{Q}_{mn}\right] = i\delta_{jm}\hat{Q}_{kn} + i\delta_{kn}\hat{Q}_{jm} - i\delta_{jn}\hat{Q}_{km} - i\delta_{km}\hat{Q}_{jn},$$

trong đó, δ_{jk} là kí hiệu delta Kronecker. Trong các công thức trên và từ đây về sau, sự lặp lại của các chỉ số có nghĩa là lấy tổng, các kí tự Latin (j) được sử dụng cho chỉ số biến thiên từ 1 đến 8, và các kí tự Hi Lạp (μ) được sử dụng cho các chỉ số biến thiên từ 1 đến 9.

2. Đối xứng SO(10) của bài toán MICZ-Kepler chín chiều

Một trong những tính chất được quan tâm nhất của các bài toán MICZ-Kepler là tính đối xứng của chúng. Việc mở rộng từ bài toán Coulomb nên bài toán MICZ-Kepler được cho là không được làm mất đi tính đối xứng vốn có của bài toán Coulomb khi bổ sung thế đơn cực thích hợp. Bài toán Coulomb là một đối tượng phổ biến trong cơ học lượng tử và đã được chứng tỏ có đối xứng không gian $SO(n+1)$ trong không gian n chiều. Đối xứng này bao gồm một đối xứng của phép quay trong không gian n chiều và một đối xứng ẩn, thường được thể hiện qua một vec-tơ bất biến gọi là vec-tơ Runge-Lenz.

Trong công trình [3], các tác giả đã xây dựng một cách tường minh biểu thức của vec-tơ Runge-Lenz mở rộng cho trường hợp bài toán MICZ-Kepler chín chiều, và đã chứng tỏ đối xứng $SO(10)$ của bài toán Coulomb chín chiều không bị phá vỡ khi bổ sung thế đơn cực $SO(8)$. Trong phần này, chúng tôi tóm tắt kết quả mà công trình [3] đã đưa ra. Moment xung lượng của hệ được biểu diễn qua các thành phần dưới dạng tensor:

$$\hat{\Lambda}_{\mu\nu} = x_\mu \hat{\pi}_\nu - x_\nu \hat{\pi}_\mu + ir^2\left[\pi_\mu, \pi_\nu\right]. \qquad (2)$$

Các thành phần hình chiếu của vec-tơ Runge-Lenz có dạng tường minh:

$$\hat{M}_\nu = \frac{1}{2}\left(\hat{\pi}_\mu \hat{\Lambda}_{\mu\nu} + \hat{\Lambda}_{\mu\nu}\hat{\pi}_\mu\right) + Z\frac{x_\nu}{r}. \qquad (3)$$

Từ các biểu thức tường minh này, các mối liên hệ giữa vec-tơ Runge-Lenz, tensor moment xung lượng và Hamiltonian được xây dựng:

$$\begin{aligned}
&\left[\hat{\Lambda}_{\mu\nu}, \hat{H}\right] = 0,\\
&\left[\hat{M}_\mu, \hat{H}\right] = 0,\\
&\left[\hat{\Lambda}_{\mu\nu}, \hat{\Lambda}_{\sigma\rho}\right] = i\delta_{\mu\sigma}\hat{\Lambda}_{\nu\rho} + i\delta_{\nu\rho}\hat{\Lambda}_{\mu\sigma} - i\delta_{\mu\rho}\hat{\Lambda}_{\nu\sigma} - i\delta_{\nu\sigma}\hat{\Lambda}_{\mu\rho},\\
&\left[\hat{\Lambda}_{\mu\nu}, \hat{M}_\rho\right] = i\delta_{\mu\rho}\hat{M}_\nu - i\delta_{\nu\rho}\hat{M}_\mu,\\
&\left[\hat{M}_\mu, \hat{M}_\nu\right] = -2i\hat{H}\hat{\Lambda}_{\mu\nu}.
\end{aligned} \qquad (4)$$

Nhóm đối xứng của bài toán được biểu diễn thông qua ma trận $\hat{D}$ là ma trận 10×10 với các thành phần:

$$\hat{D}_{MN} = \begin{cases} \hat{\Lambda}_{\mu\nu} & M=\mu, N=\nu,\\ -\hat{M}'_\mu & M=\mu, N=10,\\ \hat{M}'_\mu & M=10, N=\nu,\\ 0 & M=N, \end{cases} \qquad (5)$$

trong đó $\hat{M}'_\mu = (-2\hat{H})^{(-1/2)}\hat{M}_\mu$. Ở đây, ta sử dụng các kí tự Latin in hoa cho các chỉ số biến thiên từ 0 đến 10. Các thành phần của ma trận $\hat{D}$ thỏa mãn các hệ thức giao hoán:

$$\begin{aligned}
&\left[\hat{D}_{MN}, \hat{H}\right] = 0,\\
&\left[\hat{D}_{MN}, \hat{D}_{PQ}\right] = i\delta_{MP}\hat{D}_{NQ} + i\delta_{NQ}\hat{D}_{MP} - i\delta_{MQ}\hat{D}_{NP} - i\delta_{NP}\hat{D}_{MQ}.
\end{aligned} \qquad (6)$$

Các hệ thức này cho thấy 45 thành phần độc lập của ma trận phản xứng $\hat{D}$ là các đại lượng bảo toàn và tạo nên nhóm đối xứng $SO(10)$ của bài toán MICZ-Kepler chín chiều.

3. Toán tử Casimir C_2 của bài toán MICZ-Kepler chín chiều

Với việc nhóm đối xứng của bài toán được xây dựng một cách tường minh trong công trình [6], bài toán được chúng tôi nhận định sẽ có lời giải thuần đại số. Một trong những phương pháp để thu được lời giải này là xây dựng mối liên hệ trực tiếp giữa Hamiltonian của bài toán và hệ các toán tử bất biến Casimir của nhóm đối xứng.

Toán tử Casimir bậc p (với $p = 2,3,\ldots$) của một nhóm được định nghĩa [4]:

$$C_p = X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \ldots X_{i_p i_1},$$

trong đó, X_{ij} là các phần tử của nhóm. Trong trường hợp bài toán MICZ-Kepler chín chiều, do được xây dựng từ các thành phần của nhóm đối xứng SO(10) của bài toán, nên dễ dàng nhận thấy rằng các toán tử Casimir cũng giao hoán với Hamiltonian, hay nói cách khác chúng là các toán tử bất biến. Theo lý thuyết đã được chứng minh [4], trong vô số các toán tử Casimir đối với nhóm đối xứng $SO(2n)$, chỉ có n toán tử Casimir bất biến độc lập, thường được chọn là $C_2, C_4, \ldots, C_{2n}$.

Để tìm phổ năng lượng của bài toán, tức trị riêng của toán tử Hamiltonian, ta cần biểu diễn Hamiltonian theo các toán tử bất biến Casimir. Với nhận xét rằng toán tử Hamiltonian chỉ chứa đạo hàm bậc 2 của tọa độ, ta suy ra toán tử bất biến liên hệ trực tiếp với Hamiltonian là toán tử Casimir bậc 2, tức là C_2 cũng chứa các thành phần đạo hàm bậc 2 của tọa độ. Sử dụng định nghĩa (5) ta dễ dàng có được:

$$C_2 = D_{MN} D_{NM} = -(\Lambda^2 + M'^2),$$

trong đó $\Lambda^2 = \hat{\Lambda}_{\mu\nu} \hat{\Lambda}_{\mu\nu}$ và $M'^2 = M^2 / (-2\hat{H}) = \hat{M}_\mu \hat{M}_\mu / (-2\hat{H})$.

Sử dụng định nghĩa của toán tử moment xung lượng (2) và toán tử thành phần vec-tơ Runge-Lenz (3), tính trực tiếp và sử dụng biến đổi vi phân ta thu được kết quả:

$$C_2 = -\frac{Z^2}{2\hat{H}} - Q^2 - 16.$$

Để tính được công thức trên, ta cần dùng chương trình Mathematica hỗ trợ cho tính toán. Chú ý rằng $-Q^2$ chính là toán tử Casimir bậc 2 cho nhóm đối xứng của đơn cực $SO(8)$, mối liên hệ giữa toán tử Hamiltonian và toán tử Casimir bậc 2 được biểu diễn tường minh:

$$\hat{H} = -\frac{Z^2}{2(C_2 + Q^2 + 16)}. \tag{7}$$

Từ đó, phổ năng lượng của bài toán MICZ-Kepler chín chiều có thể được biểu diễn:

$$E = -\frac{Z^2}{2(c_2 - \overline{c}_2 + 16)}, \tag{8}$$

trong đó, c_2 và $\overline{c}_2$ là trị riêng của các toán tử Casimir bậc hai của các nhóm $SO(10)$ và $SO(8)$.

Trong công trình [4], công thức để tính trị riêng của toán tử Casimir cho nhóm SO(2n) được đưa ra. Sử dụng các công thức đó, ta thu được:

$$
\begin{aligned}
c_2 &= \mu_1(\mu_1+8)+\mu_2(\mu_2+6)+\mu_3(\mu_3+4)+\mu_4(\mu_4+2)+\mu_5^2,\\
\overline{c}_2 &= q_1(q_1+6)+q_2(q_2+4)+q_3(q_3+2)+q_4^2,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

với μ_j và q_j là các số nguyên hoặc bán nguyên thỏa mãn $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \mu_4 \geq \mu_5 \geq 0$ và $q_1 \geq q_2 \geq q_3 \geq q_4 \geq 0$. Phân tích phổ (8) với các số (9) ta thấy phù hợp với kết quả thu được trong công trình [6].

4. Kết luận

Thông qua nhóm đối xứng $SO(10)$ của bài toán MICZ-Kepler chín chiều, chúng tôi đã tính toán tường minh biểu thức của toán tử Casimir bậc 2 và xây dựng mối liên hệ trực tiếp với Hamiltonian của bài toán. Mối liên hệ này cho phép phổ năng lượng của bài toán được tính bằng phương pháp thuần đại số. Công thức thu được cho phép phân tích phổ năng lượng.

Ghi chú:

Đây là Đề tài Cơ sở mã số CS.2014.19.66 của Trường Đại học Sư phạm TPHCM. Mở rộng công trình này sẽ đăng ở tạp chí ISI.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Mardoyan L.G., Sissakian A.N., and Ter-Antonyan V.M. (1999), "Hidden symmertry of the Yang-Coulomb monopole", *Mod. Phys. Lett. A*, **14**(19), pp. 1303-1307.
2. McIntosh H.V. and Cisneros A. (1970), "Degeneracy in the Presence of a Magnetic Monopole", *J. Math. Phys.*, **11**, pp.896-916.
3. Ngoc-Hung Phan, Van-Hoang Le (2012), "Generalized Runge-Lenz vector and ninedimensional MICZ-Kepler problem", *J. Math. Phys.*, **53**, pp.082103-7.
4. Perelomov A.M. and Popov V.S. (1965), "Casimir operators for the orthogonal and symplectic groups", *J. Exp. Theo. Phys. Lett.*, **2**, tr. 20-22.
5. Van-Hoang Le, Thanh-Son Nguyen (2011), "A non-Abelian SO(8) monopole as generalization of Dirac and Yang monopoles for a nine-dimensional space", *J. Math. Phys.*, **52**, pp. 032105-11.
6. Van-Hoang Le, Thanh-Son Nguyen, Ngoc-Hung Phan (2009), "A Hidden NonAbelian Monopole in a 16-Dimensional Isotropic Harmonic Oscillator", *J. Phys. A*, **42**, pp. 175204-8.
7. Zwanziger D. (1968), "Exactli Soluble Nonrelativistic Model of Particles with Both Electric and Magnetic Charges", *Phys. Rev.*, **176**, pp.1480-1488.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 22-01-2016; ngày phản biện đánh giá: 13-3-2016; ngày chấp nhận đăng: 17-3-2016)