ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG VỚI ĐIỀU KIỆN CO KIỂU PATA SUY RỘNG TRONG KHÔNG GIAN b-MÊTRIC SẮP THỨ TỰ

NGUYỄN TRUNG HIẾU*, BÙI THỊ NGỌC HÂN**

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng điều kiện co kiểu Pata trong bài báo [8] cho hai ánh xạ trong không gian b-mêtric sắp thứ tự và thiết lập định lí điểm bất động chung cho chúng. Đồng thời, chúng tôi suy ra một số hệ quả từ định lí, xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được và vận dụng định lí được thiết lập để khảo sát sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình tích phân phi tuyến.

Từ khóa: điểm bất động chung, không gian b-mêtric sắp thứ tự, điều kiện co kiểu Pata suy rộng.

ABSTRACT

Some common fixed point theorems for generalized Pata-type contractions in partially ordered b-metric spaces

In this paper, we extend the Pata-type contraction in [8] to two mappings in partially ordered b-metric spaces and state certain common fixed point theorems for them. We also deduce some corollaries, construct some illustrated examples and apply the obtained theorem to study the existence of solutions to the system of nonlinear integral equations.

Keywords: common fixed point, partially ordered b-metric spaces, generalized Pata-type contraction.

1. Giới thiệu

Các định lí điểm bất động là công cụ hữu ích trong việc khảo sát sự tồn tại nghiệm của những bài toán liên quan đến phương trình vi phân, phương trình tích phân và phương trình đạo hàm riêng. Nguyên lí ánh xạ co Banach trong không gian mêtric đầy đủ là kết quả cơ bản nhất về điểm bất động. Do đó, nhiều tác giả trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu mở rộng nguyên lí này cho những không gian khác nhau cũng như cho các dạng ánh xạ co khác nhau. Trong hướng mở rộng thứ nhất, nhiều khái niệm không gian mêtric suy rộng đã được giới thiệu như không gian mêtric sắp thứ tự, không gian mêtric nón, không gian b-mêtric [2]. Trong các không gian mêtric suy rộng đó, không gian b-mêtric nhận được nhiều sự quan tâm của nhiều tác giả trong lĩnh vực lí thuyết điểm bất động bởi vì tính không liên tục của ánh xạ b-mêtric. Nhiều kết quả về điểm bất động trong không gian b-mêtric đã được thiết lập (xem [2] và các tài liệu tham khảo trong đó).

Bên cạnh việc đề xuất những không gian mêtric suy rộng, một số tác giả đã giới thiệu những điều kiện co suy rộng [4]. Năm 2011, Pata [9] đã giới thiệu một điều kiện co suy rộng mới và thiết lập một số kết quả về điểm bất động của điều kiện co này. Kể

* ThS, Trường Đại học Đồng Tháp; *Email: ngtrunghieu@dth.edu.vn*

** SV, Trường Đại học Đồng Tháp

từ đó, những mở rộng của điều kiện co kiểu Pata trên không gian mêtric cũng như không gian mêtric suy rộng cũng được nghiên cứu. Năm 2014, Balasubramanian [3] đã thiết lập định lí điểm bất động cho ánh xạ kiểu Pata trong không gian mêtric nón đầy đủ; Eshaghi và cộng sự [6] cũng đã thiết lập một số kết quả điểm bất động kép cho điều kiện co kiểu Pata trong không gian mêtric đầy đủ sắp thứ tự, đồng thời, việc ước lượng tốc độ hội tụ của dãy lặp về điểm bất động kép cũng được giới thiệu; Kadelburg và cộng sự [8] đã khảo sát điểm bất động của ánh xạ thỏa mãn điều kiện co kiểu Pata suy rộng trong không gian mêtric sắp thứ tự.

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng điều kiện co kiểu Pata suy rộng trong bài báo [8] cho hai ánh xạ trong không gian b-mêtric sắp thứ tự và thiết lập định lí điểm bất động chung cho điều kiện co mới này. Đồng thời, chúng tôi vận dụng định lí được thiết lập để khảo sát sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình tích phân phi tuyến. Trước hết, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản được sử dụng trong bài báo.

Định nghĩa 1.1. ([5]) Cho X là một tập hợp khác rỗng và $d : X \times X \to [0,\infty)$ là một ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x,y,z \in X$ và với $s \geq 1$,

(1) $d(x,y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$.

(2) $d(x,y) = d(y,x)$.

(3) $d(x,y) \leq s(d(x,z) + d(z,y))$.

Khi đó, ánh xạ d được gọi là một *b-mêtric* trên X và bộ (X,d,s) được gọi là một *không gian b-mêtric.*

Định nghĩa 1.2. ([5]) Cho (X,d,s) là một không gian b-mêtric. Khi đó

(1) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ* đến x nếu $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$, kí hiệu là $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Điểm x được gọi là *điểm giới hạn* của dãy $\{x_n\}$.

(2) Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *dãy Cauchy* nếu $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m) = 0$.

(3) Không gian (X,d,s) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy là một dãy hội tụ.

Định nghĩa 1.3. ([7]) Cho $(X,\preceq)$ là một tập sắp thứ tự và hai ánh xạ $f,g : X \to X$. Khi đó, cặp (f,g) được gọi là *tăng yếu* nếu $fx \preceq gfx$ và $gx \preceq fgx$ với mọi $x \in X$.

Lưu ý rằng, mỗi mêtric là một ánh xạ liên tục. Tuy nhiên, điều này không đúng đối với b-mêtric [2]. Bổ đề sau được dùng để khắc phục tính không liên tục của b-mêtric trong những chứng minh ở phần sau.

Bổ đề 1.4. *([1]) Cho (X,d,s) là một không gian b-mêtric và hai dãy $\{x_n\},\{y_n\}$ lần lượt hội tụ đến x,y. Khi đó*

$$\frac{1}{s^2}d(x,y) \leq \liminf_{n\to\infty} d(x_n,y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} d(x_n,y_n) \leq s^2 d(x,y).$$

Đặc biệt, nếu $x = y$ thì $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0$. Hơn nữa, với mọi $z \in X$, ta có

$$\frac{1}{s}d(x,z) \le \liminf_{n\to\infty} d(x_n,z) \le \limsup_{n\to\infty} d(x_n,z) \le sd(x,z).$$

Hai bổ đề sau được sử dụng trong chứng minh kết quả chính.

Bổ đề 1.5. *Với $\alpha \ge 1$, tồn tại hai số dương a,b thỏa mãn $(1+x)^\alpha \le ax^\alpha + b$ với mọi $x \ge 0$.*

Bổ đề 1.6. *Cho (X,d,s) là một không gian b-mêtric và $\{x_n\}$ là dãy trong (X,d,s). Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương.*

(1) $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong (X,d,s).

(2) $\{x_{2n}\}$ là dãy Cauchy trong (X,d,s) và $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1}) = 0$.

Chứng minh. $(1)\Rightarrow(2)$. Từ giả thiết, ta có $\{x_{2n}\}$ là dãy Cauchy trong (X,d,s) và $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1}) = 0$.

$(2)\Rightarrow(1)$. Với mọi $n,m \ge 0$, chúng ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $n = 2k+1, m = 2l$ với mọi $k,l \ge 0$. Khi đó

$d(x_n,x_m) = d(x_{2k+1},x_{2l}) \le sd(x_{2k+1},x_{2k}) + sd(x_{2k},x_{2l})$.

Trường hợp 2. $n = 2k, m = 2l+1$ với mọi $k,l \ge 0$. Khi đó

$d(x_n,x_m) = d(x_{2k},x_{2l+1}) \le sd(x_{2k},x_{2l}) + sd(x_{2l},x_{2l+1})$.

Trường hợp 3. $n = 2k+1, m = 2l+1$ với mọi $k,l \ge 0$. Khi đó

$d(x_n,x_m) = d(x_{2k+1},x_{2l}) \le sd(x_{2k+1},x_{2k}) + s^2d(x_{2k},x_{2l}) + s^2d(x_{2l},x_{2l+1})$.

Từ các trường hợp trên, suy ra $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m) = 0$. Do đó, $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong (X,d,s). $\square$

2. Các kết quả chính

Kí hiệu Ψ là tập hợp các hàm số $\psi : [0,1] \to [0,\infty)$ tăng và $\psi(0) = 0$. Định lí sau là một mở rộng của [8, Theorem 3.2] sang không gian b-mêtric sắp thứ tự.

Định lí 2.1. *Cho $(X,d,s,\preceq)$ là một không gian b-mêtric sắp thứ tự đầy đủ và $f,g : X \to X$ là hai ánh xạ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(1) Tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_0 \preceq gx_0$.

(2) Cặp ánh xạ (f,g) tăng yếu

(3) Tồn tại $\alpha \ge 1$, $\beta \in [0,\alpha]$, $\gamma \ge 0$ và hàm $\psi \in \Psi$ sao cho

$$d(fx,gy) \le \frac{1-\varepsilon}{s^3}M_{fg}(x,y) + \gamma\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\left[1 + d(x,x_0) + d(y,x_0) + d(fx,x_0) + d(gy,x_0)\right]^\beta \quad (2.1)$$

với mọi $\varepsilon \in [0,1]$ và mọi $x,y \in X$ mà $x \preceq y$, trong đó

$$M_{fg}(x,y) = \max\left\{d(x,y), d(x,fx), d(y,gy), \frac{d(x,gy)+d(y,fx)}{2s}\right\}.$$

(4) f hoặc g liên tục, hoặc $(X,d,s,\preceq)$ thỏa mãn giả thiết (H): Nếu $\{x_n\}$ là dãy tăng trong X và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$ thì $x_n \preceq x$ với mọi n.

Khi đó, f và g có điểm bất động chung.

Chứng minh.

Bước 1. Chứng minh nếu z là điểm bất động của f hoặc g thì z là điểm bất động chung của f và g. Thật vậy, Giả sử z là điểm bất động của f. Từ điều kiện (2.1), ta có

$$\begin{aligned} d(z,gz) = d(fz,gz) &\le \frac{1-\varepsilon}{s^3} M_{fg}(z,z) + \gamma\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)\left[1 + d(z,x_0) + d(z,x_0) + d(fz,x_0) + d(gz,x_0)\right]^{\beta} \\ &= \frac{1-\varepsilon}{s^3} d(z,gz) + \gamma\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)\left[1 + 3d(z,x_0) + d(gz,x_0)\right]^{\beta} \\ &\le (1-\varepsilon)d(z,gz) + \gamma\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)\left[1 + 3d(z,x_0) + d(gz,x_0)\right]^{\beta}. \end{aligned}$$

Đặt $K = \gamma\left[1 + 3d(z,x_0) + d(gz,x_0)\right]^{\beta}$. Suy ra $\varepsilon d(z,gz) \le K\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon) \le K\varepsilon\psi(\varepsilon)$. Điều này dẫn đến $d(z,gz) \le K\psi(\varepsilon)$ với mọi $\varepsilon \in [0,1]$. Cho $\varepsilon = 0$, ta được $d(z,gz) \le K\psi(0) = 0$. Suy ra $d(z,gz) = 0$ hay z là điểm bất động của g. Vậy z là điểm bất động chung của f và g.

Lập luận tương tự, ta cũng chứng minh được nếu z là điểm bất động của g thì z là điểm bất động chung của f và g.

Bước 2. Chứng minh f và g có điểm bất động chung

Với $x_0 \in X$ thỏa mãn $x_0 \preceq gx_0$, xét dãy $\{x_n\}$ trong X xác định bởi $x_{2n+2} = fx_{2n+1}$ và $x_{2n+1} = gx_{2n}$ với $n \in \mathbb{N}$. Do cặp (f,g) tăng yếu nên

$$x_0 \preceq x_1 = gx_0 \preceq fgx_0 = fx_1 = x_2 \preceq gfx_1 = fx_2 = x_3 \preceq \ldots \preceq x_n \preceq \ldots$$

Do đó, $\{x_n\}$ là dãy tăng. Nếu tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_{2n_0} = x_{2n_0+1}$ thì $x_{2n_0} = gx_{2n_0}$ hay x_{2n_0} là điểm bất động của g. Do đó, theo Bước 1 ta có x_{2n_0} là điểm bất động chung của f và g. Nếu tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_{2n_0+1} = x_{2n_0+2}$ thì $x_{2n_0+1} = fx_{2n_0+1}$ hay x_{2n_0+1} là điểm bất động của f. Do đó, theo Bước 1 ta có x_{2n_0+1} là điểm bất động chung của f và g. Bây giờ, ta giả sử $x_n \ne x_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, trong (2.1), thay x bởi x_{2n-1}, y bởi x_{2n} và đặt $K = \gamma\left[1 + d(x_{2n-1},x_0) + 2d(x_{2n},x_0) + d(x_{2n+1},x_0)\right]^{\beta} \ge 0$, ta có

$$d(x_{2n},x_{2n+1}) = d(fx_{2n-1},gx_{2n}) \le \frac{1-\varepsilon}{s^3}M_{fg}(x_{2n-1},x_{2n}) + K\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon),$$

trong đó

$$\begin{aligned} M_{fg}(x_{2n-1},x_{2n}) &= \max\left\{d(x_{2n-1},x_{2n}),d(x_{2n-1},x_{2n}),d(x_{2n},x_{2n+1}),\frac{d(x_{2n-1},x_{2n+1})+d(x_{2n},x_{2n})}{2s}\right\}\\ &\le \max\left\{d(x_{2n-1},x_{2n}),d(x_{2n},x_{2n+1}),\frac{d(x_{2n-1},x_{2n})+d(x_{2n},x_{2n+1})}{2}\right\}\\ &= \max\left\{d(x_{2n-1},x_{2n}),d(x_{2n},x_{2n+1})\right\}. \end{aligned}$$

Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\max\left\{d(x_{2n-1},x_{2n}),d(x_{2n},x_{2n+1})\right\} = d(x_{2n},x_{2n+1})$. Khi đó

$$d(x_{2n},x_{2n+1}) \le \frac{1-\varepsilon}{s^3}d(x_{2n},x_{2n+1}) + K\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon) \le (1-\varepsilon)d(x_{2n},x_{2n+1}) + K\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon).$$

Suy ra $\varepsilon d(x_{2n},x_{2n+1}) \le K\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon) \le K\varepsilon\psi(\varepsilon)$. Theo lí luận ở Bước 1, ta suy ra $d(x_{2n},x_{2n+1}) = 0$. Điều này là một mâu thuẫn. Do đó $d(x_{2n},x_{2n+1}) \le d(x_{2n-1},x_{2n})$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Tương tự, trong (2.1), bằng cách thay x bởi x_{2n+1}, y bởi x_{2n} ta cũng chứng minh được $d(x_{2n+2},x_{2n+1}) \le d(x_{2n+1},x_{2n})$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó, $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ là dãy giảm. Khi đó, tồn tại $d^* \ge 0$ để $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1}) = d^*$. Đặt $c_{2n} = d(x_{2n},x_0)$. Vì $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ là dãy giảm nên

$$d(x_{2n},x_{2n+1}) \le d(x_{2n-1},x_{2n}) \le \ldots \le d(x_0,x_1) = c_1. \tag{2.2}$$

Do đó

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1},x_1) + d(x_0,x_{2n+2}) &\le sd(x_{2n+1},x_0) + sd(x_0,x_1) + sd(x_0,x_{2n+1}) + sd(x_{2n+1},x_{2n+2})\\ &\le 2s(c_1 + c_{2n+1}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Từ (2.1), (2.2), và (2.3), ta có

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &= d(x_{2n+1},x_0)\\ &\le sd(x_{2n+1},x_{2n+2}) + s^2d(x_{2n+2},x_1) + s^2d(x_1,x_0)\\ &\le (s+s^2)c_1 + s^2d(fx_{2n+1},gx_0)\\ &\le (s+s^2)c_1 + s^2\left(\frac{1-\varepsilon}{s^3}\right)M_{fg}(x_{2n+1},x_0)\\ &\qquad + s^2\gamma\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)\Big[+ d(x_{2n+1},x_0) + d(x_0,x_0) + d(x_{2n+2},x_0) + d(x_1,x_0)\Big]\\ &\le (s+s^2)c_1 + s^2\left(\frac{1-\varepsilon}{s^3}\right)\max\left\{d(x_{2n+1},x_0),d(x_{2n+1},x_{2n+2}),d(x_1,x_0),\frac{d(x_{2n+1},x_1)+d(x_0,x_{2n+2})}{2s}\right\}\\ &\qquad + s^2\gamma\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)\Big[+ d(x_{2n+1},x_0) + sd(x_{2n+2},x_{2n+1}) + sd(x_{2n+1},x_0) + d(x_1,x_0)\Big] \end{aligned}$$

$$\le (s+s^2)c_1 + (1-\varepsilon)(c_1+c_{2n+1}) + s^2\gamma\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\left[1+(1+s)c_1+(1+s)c_{2n+1}\right]^\beta$$

$$\le \left(1+s+s^2\right)c_1 + (1-\varepsilon)c_{2n+1} + s^2\gamma\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\left[1+(1+s)c_1\right]^\alpha\left[1+\frac{1+s}{1+(1+s)c_1}c_{2n+1}\right]^\alpha.$$

Do đó

$$\varepsilon c_{2n+1} \le \left(1+s+s^2\right)c_1 + (1-\varepsilon)c_{2n+1} + s^2\gamma\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\left[1+(1+s)c_1\right]^\alpha\left[1+\frac{1+s}{1+(1+s)c_1}c_{2n+1}\right]^\alpha.$$

Áp dụng Bổ đề 1.5, suy ra tồn tại hai số dương c,d sao cho $\varepsilon c_{2n+1} \le c\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)c_{2n+1}^\alpha + d$. Giả sử $\{c_{2n+1}\}$ không bị chặn. Khi đó, tồn tại dãy con $c_{2n_i+1}\to\infty$ thỏa mãn $\varepsilon c_{2n_i+1} \le c\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)c_{2n_i+1}^\alpha + d$. Chọn $\varepsilon=\varepsilon_i=\dfrac{1+d}{c_{2n_i+1}}$, ta có $1+d \le c\left(\dfrac{1+d}{c_{2n_i+1}}\right)^\alpha \psi\left(\dfrac{1+d}{c_{2n_i+1}}\right)c_{2n_i+1}^\alpha + d$. Điều này dẫn đến $1 \le c\left(1+d\right)^\alpha \psi\left(\dfrac{1+d}{c_{2n_i+1}}\right)\to 0$. Điều này là một mâu thuẫn. Vậy $\{c_{2n+1}\}$ là dãy bị chặn. Bằng lập luận tương tự như trên, ta cũng chứng minh được $\{c_{2n+2}\}$ là dãy bị chặn. Vậy $\{c_n\}$ là dãy bị chặn. Mặt khác, từ (2.1), ta có

$$\begin{aligned} d(x_{2n},x_{2n+1}) &= d(fx_{2n-1},gx_{2n}) \\ &\le \frac{1-\varepsilon}{s^3}d(x_{2n-1},x_{2n}) + \gamma\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\left[1+d(x_{2n-1},x_0)+2d(x_{2n},x_0)+d(x_{2n+2},x_0)\right]^\beta. \end{aligned}$$

Do $\{c_n\}$ bị chặn nên tồn tại $M\ge 0$ sao cho $c_n\le M$ với mọi $n\in\mathbb{N}$. Do đó

$$\left[1+d(x_{2n-1},x_0)+2d(x_{2n},x_0)+d(x_{2n+2},x_0)\right]^\beta \le (1+4M)^\beta.$$

Đặt $K=\gamma(1+4M)^\beta \ge 0$. Ta có $d(x_{2n},x_{2n+1}) \le \dfrac{1-\varepsilon}{s^3}d(x_{2n-1},x_{2n}) + K\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)$. Cho $n\to\infty$, ta có $d^* \le \dfrac{1-\varepsilon}{s^3}d^* + K\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon) \le (1-\varepsilon)d^* + K\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)$. Suy ra $\varepsilon d^* \le K\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon) \le K\varepsilon\psi(\varepsilon)$. Vì vậy $d^*=0$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1})=0$.

Tiếp theo, ta chứng minh $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Do $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1})=0$ nên theo Bổ đề 1.6 ta chỉ cần chứng minh $\{x_{2n}\}$ là dãy Cauchy trong $(X,d,s,\preceq)$. Giả sử ngược lại $\{x_{2n}\}$ không là dãy Cauchy trong $(X,d,s,\preceq)$. Khi đó, tồn tại $\delta>0$ và hai dãy con $\{x_{2n(k)}\},\{x_{2m(k)}\}$ của $\{x_{2n}\}$ sao cho

$$m(k) \geq n(k) \geq k \text{ và } d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)}) \geq \delta. \tag{2.7}$$

Với mỗi $k \in \mathbb{N}^*$, $n(k)$ ta chọn $m(k)$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn (2.7). Khi đó

$$d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-2}) < \delta. \tag{2.8}$$

Ta có

$$\delta \leq d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)}) \leq s d(x_{2m(k)}, x_{2m(k)+1}) + s d(x_{2m(k)+1}, x_{2n(k)}). \tag{2.9}$$

Cho $k \to \infty$ trong (2.9), ta có

$$\frac{\delta}{s} \leq \limsup_{k \to \infty} d(x_{2m(k)+1}, x_{2n(k)}). \tag{2.10}$$

Từ (2.8), ta có

$$\begin{aligned} d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)}) &\leq s^2 d(x_{2m(k)}, x_{2m(k)-1}) + s^2 d(x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)-2}) + s d(x_{2m(k)-2}, x_{2n(k)}) \\ &< s^2 d(x_{2m(k)}, x_{2m(k)-1}) + s^2 d(x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)-2}) + s\delta. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Cho $k \to \infty$ trong (2.11), ta có

$$\limsup_{k \to \infty} d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)}) \leq s\delta. \tag{2.12}$$

Ta cũng có

$$d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1}) \leq s d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)}) + s d(x_{2n(k)}, x_{2n(k)-1}). \tag{2.13}$$

Cho $k \to \infty$ trong (2.13) và sử dụng (2.10), ta có

$$\limsup_{k \to \infty} d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1}) \leq s^2 \delta. \tag{2.14}$$

Tương tự,

$$d(x_{2m(k)+1}, x_{2n(k)-1}) \leq s d(x_{2m(k)+1}, x_{2m(k)}) + s d(x_{2m(k)}, x_{2n(k)-1}). \tag{2.15}$$

Cho $k \to \infty$ trong (2.15) và sử dụng (2.14), ta có

$$\limsup_{k \to \infty} d(x_{2m(k)+1}, x_{2n(k)-1}) \leq s^3 \delta. \tag{2.16}$$

Mặt khác, trong (2.1), thay x bởi $x_{2n(k)-1}$ và y bởi $x_{2m(k)}$, ta có

$$\begin{aligned} d(x_{2n(k)}, x_{2m(k)+1}) &= d(fx_{2n(k)-1}, gx_{2m(k)}) \\ &\leq \frac{1-\varepsilon}{s^3} M_{fg}(x_{2n(k)-1}, x_{2m(k)}) + \gamma \varepsilon^{\alpha} \psi(\varepsilon) \Big[1 + d(x_{2n(k)-1}, x_0) + d(x_{2m(k)}, x_0) \\ &\quad + d(x_{2n(k)}, x_0) + d(x_{2m(k)+1}, x_0) \Big]^{\beta}. \end{aligned}$$

Do $\{c_n\}$ bị chặn nên tồn tại $M \geq 0$ sao cho $c_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó

$$\Big[1 + d(x_{2n(k)-1}, x_0) + d(x_{2m(k)}, x_0) + d(x_{2n(k)}, x_0) + d(x_{2m(k)+1}, x_0) \Big]^{\beta} \leq (1 + 4M)^{\beta}.$$