

**HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG**

**PGS.TS. Lê Bá Long**

Tailieu.vn

**Bài giảng**

**LÝ THUYẾT XÁC SUẤT  
VÀ THỐNG KÊ**

*(Dành cho sinh viên hệ đại học chuyên ngành Kinh tế)*

Hà Nội, 2013



# LỜI NÓI ĐẦU

Các hiện tượng diễn ra trong tự nhiên, xã hội hoặc có tính chất tất định (có tính quy luật, có thể biết trước kết quả) hoặc có tính chất ngẫu nhiên (không biết trước kết quả). Mặc dù không thể nói trước một hiện tượng ngẫu nhiên xảy ra hay không xảy ra khi thực hiện một phép thử, tuy nhiên nếu tiến hành quan sát khá nhiều lần một hiện tượng ngẫu nhiên trong các phép thử như nhau, ta có thể rút ra được những kết luận khoa học về hiện tượng này. Lý thuyết xác suất nghiên cứu khả năng xuất hiện của các hiện tượng ngẫu nhiên và ứng dụng chúng vào thực tế.

Lý thuyết xác suất cũng là cơ sở để nghiên cứu Thống kê – môn học nghiên cứu các phương pháp thu thập thông tin, chọn mẫu, xử lý thông tin, nhằm rút ra các kết luận hoặc đưa ra quyết định cần thiết. Ngày nay, với sự hỗ trợ tích cực của máy tính điện tử và công nghệ thông tin, lý thuyết xác suất thống kê ngày càng được ứng dụng rộng rãi và hiệu quả trong mọi lĩnh vực khoa học tự nhiên và xã hội. Chính vì vậy lý thuyết xác suất thống kê được giảng dạy cho hầu hết các nhóm ngành ở đại học.

Tập bài giảng lý thuyết xác suất và thống kê toán được biên soạn lại theo chương trình qui định của Học viện Công nghệ Bru Chính Viện Thông dành cho hệ đại học chuyên ngành kinh tế với hình thức đào tạo theo tín chỉ. Nội dung của cuốn sách bám sát các giáo trình của các trường đại học khối kinh tế và theo kinh nghiệm giảng dạy nhiều năm của tác giả. Chính vì thế, giáo trình này cũng có thể dùng làm tài liệu học tập, tài liệu tham khảo cho sinh viên của các trường đại học và cao đẳng khối kinh tế.

Nội dung của tập bài giảng có 6 chương tương ứng với 3 tín chỉ:

**Chương 1:** Biến cố ngẫu nhiên và xác suất.

**Chương 2:** Biến ngẫu nhiên.

**Chương 3:** Biến ngẫu nhiên hai chiều.

**Chương 4:** Cơ sở lý thuyết mẫu.

**Chương 5:** Ước lượng các tham số của biến ngẫu nhiên.

**Chương 6:** Kiểm định giả thiết thống kê.

Ba chương đầu thuộc về lý thuyết xác suất, ba chương còn lại là những vấn đề cơ bản của lý thuyết thống kê. Điều kiện tiên quyết của môn học này là hai môn Toán cao cấp 1 và Toán cao cấp 2 trong chương trình toán đại cương khối kinh tế. Mặc dù tác giả rất có ý thức trình bày một cách tương đối đầy đủ và chặt chẽ. Tuy nhiên, vì sự hạn chế của chương trình toán dành cho khối kinh tế nên nhiều kết quả và định lý chỉ được phát biểu, minh họa và không có đủ kiến thức cơ sở để chứng minh chi tiết.

Giáo trình được viết cho đối tượng là sinh viên các trường đại học khối kinh tế, vì vậy tác giả cung cấp nhiều ví dụ minh họa tương ứng với từng phần lý thuyết và có nhiều ví dụ ứng dụng vào bài toán kinh tế. Ngoài ra tác giả cũng có ý thức trình bày thích hợp đối với người tự học. Trước khi nghiên cứu các nội dung chi tiết, người học nên xem phần giới thiệu của mỗi chương, để thấy được mục đích, ý nghĩa, yêu cầu chính của chương đó. Trong mỗi chương, mỗi nội dung, người học có thể tự đọc và hiểu được cặn kẽ thông qua cách diễn đạt và chỉ dẫn rõ ràng. Đặc biệt

học viên nên chú ý đến các nhận xét, bình luận, để hiểu sâu sắc hơn hoặc mở rộng tổng quát hơn các kết quả và hướng ứng dụng vào thực tế.

Các ví dụ là để minh họa trực tiếp khái niệm, định lý hoặc các thuật toán, vì vậy sẽ giúp người học dễ tiếp thu bài hơn. Sau mỗi chương đều có các câu hỏi luyện tập và các bài tập tự luận. Có khoảng từ 20 đến 30 bài tập cho mỗi chương, tương ứng với 3 -5 câu hỏi cho mỗi tiết lý thuyết. Hệ thống câu hỏi này bao trùm toàn bộ nội dung vừa được học. Có những câu hỏi kiểm tra trực tiếp các kiến thức vừa được học, nhưng cũng có những câu đòi hỏi học viên phải vận dụng một cách tổng hợp và sáng tạo các kiến thức đã học để giải quyết. Vì vậy, việc giải các bài tập này giúp học viên nắm chắc hơn lý thuyết và tự kiểm tra được mức độ tiếp thu lý thuyết của mình. Có đáp án và hướng dẫn giải các bài tập ở cuối cuốn sách. Tuy nhiên tác giả khuyến học viên nên cố gắng tự mình giải các bài tập này và chỉ đối chiếu hoặc tham khảo kết quả khi thực sự cần thiết.

Tuy tác giả đã rất cố gắng, song do thời gian bị hạn hẹp, nên các thiếu sót còn tồn tại trong tập bài giảng là điều khó tránh khỏi. Tác giả rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của bạn bè, đồng nghiệp, các học viên xa gần. Xin chân thành cảm ơn.

Tác giả xin bày tỏ lời cảm ơn tới PGS.TS Phạm Ngọc Anh, TS. Vũ Gia Tô, Ths. Lê Bá Cầu, TS. Nguyễn Thị Nga đã đọc bản thảo và cho những ý kiến phản biện quý giá.

Cuối cùng, tác giả xin bày tỏ sự cảm ơn đối với Ban Giám đốc Học viện Công nghệ Bưu Chính Viễn Thông, bạn bè đồng nghiệp đã khuyến khích, động viên, tạo nhiều điều kiện thuận lợi để chúng tôi hoàn thành tập tài liệu này.

*Hà Nội, 2013*

**TÁC GIẢ**

# MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU.....	13
<b>MỤC LỤC</b> .....	<b>15</b>
<b>CHƯƠNG 1: BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN VÀ XÁC SUẤT</b> .....	<b>11</b>
1.1 PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ .....	12
1.1.1 Phép thử (Experiment).....	12
1.1.2 Biến cố (Event) .....	12
1.2 ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT.....	13
1.2.1 Định nghĩa cổ điển về xác suất.....	13
1.2.2 Định nghĩa thống kê về xác suất .....	19
1.3 QUAN HỆ CỦA CÁC BIẾN CỐ .....	20
1.3.1 Quan hệ biến cố đối.....	20
1.3.2 Tổng của các biến cố .....	20
1.3.3 Tích của các biến cố .....	20
1.3.4 Biến cố xung khắc .....	20
1.3.5 Hệ đầy đủ các biến cố.....	21
1.3.6 Tính độc lập của các biến cố.....	21
1.4 CÁC ĐỊNH LÝ VÀ TÍNH CHẤT XÁC SUẤT .....	22
1.4.1 Xác suất chắc chắn và xác suất không thể .....	22
1.4.2 Quy tắc cộng xác suất.....	22
1.4.3 Quy tắc xác suất của biến cố đối .....	24
1.4.4 Xác suất có điều kiện.....	25
1.4.5 Quy tắc nhân xác suất.....	27
1.4.6 Công thức xác suất đầy đủ .....	30
1.4.7 Công thức Bayes .....	31
1.5 DÃY PHÉP THỬ BERNOULLI .....	34
1.6 NGUYÊN LÝ XÁC SUẤT LỚN, XÁC SUẤT NHỎ .....	37
CÂU HỎI ÔN TẬP VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 1 .....	37
<b>CHƯƠNG 2: BIẾN NGẪU NHIÊN</b> .....	<b>42</b>
2.1 ĐỊNH NGHĨA VÀ PHÂN LOẠI BIẾN NGẪU NHIÊN .....	43
2.1.1 Khái niệm biến ngẫu nhiên .....	43
2.1.2 Phân loại .....	44
2.2 PHÂN BỐ XÁC SUẤT CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN .....	45
2.2.1 Hàm phân bố xác suất.....	45
2.2.2 Hàm khối lượng xác suất và bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc .....	46
2.2.3 Hàm mật độ phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục .....	50
2.3 CÁC THAM SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN .....	52
2.3.1 Kỳ vọng .....	52
2.3.2 Phương sai .....	56
2.3.3 Phân vị, Trung vị.....	59
2.3.4 Mốt .....	60

2.3.5 Mô men, hệ số bất đối xứng, hệ số nhọn .....	61
2.4 MỘT SỐ QUY LUẬT PHÂN BỐ XÁC SUẤT RỜI RẠC THƯỜNG GẶP .....	62
2.4.1 Phân bố Bernoulli .....	62
2.4.2 Phân bố nhị thức .....	63
2.4.3 Phân bố Poisson .....	65
2.5 MỘT SỐ QUY LUẬT PHÂN BỐ XÁC SUẤT LIÊN TỤC THƯỜNG GẶP .....	67
2.5.1 Phân bố đều .....	67
2.5.2 Phân bố chuẩn .....	69
2.5.3 Tính gần đúng phân bố nhị thức .....	73
2.5.4 Phân bố “Khi bình phương” .....	75
2.5.5 Phân bố Student .....	76
CÂU HỎI ÔN TẬP VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 2 .....	77
CHƯƠNG 3: VÉC TƠ NGẪU NHIÊN .....	81
3.1 KHÁI NIỆM VÉC TƠ NGẪU NHIÊN .....	81
3.1.1 Khái niệm và phân loại véc tơ ngẫu nhiên .....	81
3.1.2 Hàm phân bố xác suất đồng thời và hàm phân bố xác suất biên .....	82
3.2 HÀM KHỐI LƯỢNG XÁC SUẤT VÀ BẢNG PHÂN BỐ XÁC SUẤT .....	83
3.2.1 Hàm khối lượng xác suất đồng thời và bảng phân bố xác suất đồng thời .....	83
3.2.2 Bảng phân bố xác suất biên .....	84
3.2.3 Quy luật phân bố xác suất có điều kiện .....	87
3.2.4 Tính độc lập của các biến ngẫu nhiên .....	90
3.3 CÁC THAM SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC HAI CHIỀU .....	90
3.3.1 Kỳ vọng và phương sai của các biến ngẫu nhiên thành phần .....	90
3.3.2 Hiệp phương sai .....	91
3.3.3 Hệ số tương quan .....	91
3.3.4 Kỳ vọng có điều kiện, hàm hồi quy .....	94
3.4 LUẬT SỐ LỚN VÀ ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM .....	96
3.4.1 Bất đẳng thức Markov và bất đẳng thức Trêbusép .....	96
3.4.2 Hội tụ theo xác suất .....	97
3.4.3 Luật số lớn Trêbusép .....	97
3.4.4 Luật số lớn Bernoulli .....	99
3.4.5 Định lý giới hạn trung tâm .....	99
CÂU HỎI ÔN TẬP VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 3 .....	100
CHƯƠNG 4: CƠ SỞ LÝ THUYẾT MẪU .....	105
4.1 SỰ CẦN THIẾT PHẢI LẤY MẪU .....	105
4.2 MẪU NGẪU NHIÊN .....	106
4.2.1 Khái niệm mẫu ngẫu nhiên .....	106
4.2.2 Một vài phương pháp chọn mẫu ngẫu nhiên .....	107
4.2.3 Mô hình hóa mẫu ngẫu nhiên .....	107
4.2.4 Biểu diễn giá trị cụ thể của mẫu ngẫu nhiên theo bảng và theo biểu đồ .....	108
4.3 THỐNG KÊ VÀ CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU NGẪU NHIÊN .....	113
4.3.1 Định nghĩa thống kê .....	113

4.3.2 Trung bình mẫu .....	114
4.3.3 Phương sai mẫu, Độ lệch chuẩn mẫu .....	114
4.3.4 Tần suất mẫu .....	115
4.3.5 Cách tính giá trị cụ thể của trung bình mẫu $\bar{x}$ và phương sai mẫu $s^2$ .....	116
4.4 MẪU NGẪU NHIÊN HAI CHIỀU .....	117
4.4.1 Khái niệm mẫu ngẫu nhiên hai chiều .....	117
4.4.2 Biểu diễn giá trị cụ thể của mẫu ngẫu nhiên hai chiều .....	118
4.4.3 Một số thống kê đặc trưng của mẫu ngẫu nhiên hai chiều .....	118
4.5 PHÂN BỐ XÁC SUẤT CỦA MỘT SỐ THỐNG KÊ ĐẶC TRƯNG MẪU .....	119
4.5.1 Trường hợp biến ngẫu nhiên gốc có phân bố chuẩn .....	119
4.5.2 Trường hợp biến ngẫu nhiên gốc hai chiều cùng có phân bố chuẩn .....	122
4.5.3 Trường hợp biến ngẫu nhiên gốc có phân bố Bernoulli .....	123
4.5.4 Trường hợp biến ngẫu nhiên gốc hai chiều cùng có phân bố Bernoulli .....	124
CÂU HỎI ÔN TẬP VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 4 .....	125
CHƯƠNG 5: ƯỚC LƯỢNG CÁC THAM SỐ CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN .....	127
5.1. PHƯƠNG PHÁP ƯỚC LƯỢNG ĐIỂM .....	127
5.1.1 Ước lượng không chệch (unbiased estimator) .....	127
5.1.2 Ước lượng hiệu quả (efficient estimator) .....	128
5.1.3 Ước lượng vững (consistent estimator) .....	129
5.2 PHƯƠNG PHÁP ƯỚC LƯỢNG BẰNG KHOẢNG TIN CẬY .....	129
5.2.1 Khái niệm khoảng tin cậy .....	130
5.2.2 Khoảng tin cậy của kỳ vọng của biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn .....	130
5.2.3 Khoảng tin cậy cho tham số $p$ của biến ngẫu nhiên gốc có phân bố Bernoulli .....	134
5.2.4 Ước lượng phương sai của biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn .....	135
CÂU HỎI ÔN TẬP VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 5 .....	139
CHƯƠNG 6: KIỂM ĐỊNH GIẢ THIẾT THỐNG KÊ .....	143
6.1 KHÁI NIỆM CHUNG VỀ GIẢ THIẾT THỐNG KÊ .....	143
6.1.1 Giả thiết thống kê .....	143
6.1.2 Tiêu chuẩn kiểm định giả thiết thống kê .....	144
6.1.3 Miền bác bỏ giả thiết .....	144
6.1.4 Giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định .....	145
6.1.5 Quy tắc kiểm định giả thiết thống kê .....	145
6.1.6 Sai lầm loại một và sai lầm loại hai .....	145
6.1.7 Thủ tục kiểm định giả thiết thống kê .....	146
6.2 KIỂM ĐỊNH THAM SỐ .....	146
6.2.1 Kiểm định giả thiết về kỳ vọng của biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn .....	146
6.2.2 Kiểm định giả thiết về phương sai của biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn .....	153
6.2.3 Kiểm định giả thiết về tần suất $p$ của tổng thể .....	155
6.2.4 Kiểm định giả thiết về hai kỳ vọng của hai biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn .....	156
6.2.5 Kiểm định giả thiết về sự bằng nhau của hai tần suất tương ứng với hai tổng thể .....	162
CÂU HỎI ÔN TẬP VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 6 .....	164

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP ÁN BÀI TẬP .....	167
HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP ÁN CHƯƠNG 1 .....	167
HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP ÁN CHƯƠNG 2 .....	171
HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP ÁN CHƯƠNG 3 .....	177
HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP ÁN CHƯƠNG 4 .....	180
HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP ÁN CHƯƠNG 5 .....	181
HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP ÁN CHƯƠNG 6 .....	184
PHỤ LỤC I: GIÁ TRỊ HÀM MẬT ĐỘ .....	188
PHỤ LỤC II: GIÁ TRỊ HÀM PHÂN BỐ CHUẨN TẮC .....	189
PHỤ LỤC III: GIÁ TRỊ TỐI HẠN CỦA PHÂN BỐ STUDENT .....	190
PHỤ LỤC IV: GIÁ TRỊ TỐI HẠN CỦA PHÂN BỐ “KHI BÌNH PHƯƠNG” .....	191
PHỤ LỤC V: GIÁ TRỊ HÀM KHỐI LƯỢNG XÁC SUẤT POISSON .....	192
PHỤ LỤC VI: GIÁ TRỊ HÀM PHÂN BỐ POISSON .....	194
<b>BẢNG CHỈ DẪN THUẬT NGỮ</b> .....	196
TÀI LIỆU THAM KHẢO .....	198



## CHƯƠNG 1: BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN VÀ XÁC SUẤT

Các hiện tượng trong tự nhiên hay xã hội xảy ra một cách ngẫu nhiên (không biết trước kết quả) hoặc tất định (biết trước kết quả sẽ xảy ra). Chẳng hạn một vật nặng được thả từ trên cao chắc chắn sẽ rơi xuống đất, trong điều kiện bình thường nước sôi ở  $100^{\circ}\text{C}$  ... Đó là những hiện tượng diễn ra có tính quy luật, tất định. Trái lại khi tung đồng xu ta không biết mặt sấp hay mặt ngửa sẽ xuất hiện. Ta không thể biết trước có bao nhiêu cuộc gọi đến tổng đài, có bao nhiêu khách hàng đến điểm phục vụ trong khoảng thời gian nào đó. Ta không thể xác định trước chỉ số chứng khoán trên thị trường chứng khoán ở một thời điểm khớp lệnh trong tương lai ... Đó là những hiện tượng ngẫu nhiên. Tuy nhiên, nếu tiến hành quan sát khá nhiều lần một hiện tượng ngẫu nhiên trong những hoàn cảnh như nhau, thì trong nhiều trường hợp ta có thể rút ra những kết luận có tính quy luật về những hiện tượng này. Lý thuyết xác suất nghiên cứu các quy luật của các hiện tượng ngẫu nhiên. Việc nắm bắt các quy luật này sẽ cho phép dự báo các hiện tượng ngẫu nhiên đó sẽ xảy ra như thế nào. Chính vì vậy các phương pháp của lý thuyết xác suất được ứng dụng rộng rãi trong việc giải quyết các bài toán thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau của khoa học tự nhiên, kỹ thuật và kinh tế-xã hội.

Chương này trình bày một cách có hệ thống các khái niệm cơ bản và các kết quả chính về lý thuyết xác suất:

- Các khái niệm phép thử, biến cố.
- Quan hệ giữa các biến cố.
- Các định nghĩa về xác suất: định nghĩa xác suất theo cổ điển, theo thống kê.
- Các tính chất của xác suất: công thức cộng và công thức nhân xác suất, xác suất của biến cố đối.
- Xác suất có điều kiện, công thức nhân trong trường hợp không độc lập. Công thức xác suất đầy đủ và định lý Bayes.

Khi đã nắm vững các kiến thức về đại số tập hợp (một trường hợp cụ thể của đại số Boole) như hợp, giao tập hợp, tập con, phần bù của một tập con ... học viên sẽ dễ dàng trong việc tiếp thu, biểu diễn hoặc mô tả các biến cố.

Để tính xác suất các biến cố theo phương pháp cổ điển đòi hỏi phải tính số các trường hợp thuận lợi đối với biến cố và số các trường hợp đồng khả năng có thể. Vì vậy học viên cần nắm vững các phương pháp đếm - giải tích tổ hợp (đã được học ở lớp 12 và trong chương 1 của môn đại số). Tuy nhiên để thuận lợi cho người học chúng tôi sẽ nhắc lại các kết quả chính về phương pháp đếm trong mục 1.2.2.

Một trong những khó khăn của bài toán xác suất là xác định được biến cố và sử dụng đúng các công thức thích hợp. Bằng cách tham khảo các ví dụ và giải nhiều bài tập sẽ rèn luyện tốt kỹ năng này.

## 1.1 PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ

### 1.1.1 Phép thử

Trong thực tế ta thường gặp nhiều thí nghiệm, quan sát mà các kết quả của nó không thể dự báo trước được. Ta gọi chúng là các *phép thử ngẫu nhiên*.

Phép thử ngẫu nhiên thường được ký hiệu bởi chữ  $\mathcal{C}$ . Tuy không biết kết quả sẽ xảy ra như thế nào, nhưng trong nhiều trường hợp ta có thể liệt kê được hoặc biểu diễn tất cả các kết quả của phép thử  $\mathcal{C}$ .

#### Ví dụ 1.1:

- Phép thử tung đồng xu có hai khả năng xảy ra là mặt sấp, ký hiệu  $S$ , hoặc mặt ngửa, ký hiệu  $N$ . Ta gọi  $S, N$  là các biến cố sơ cấp. Tập các biến cố sơ cấp được gọi là không gian mẫu. Vậy không gian mẫu của phép thử là  $\Omega = \{S, N\}$ .

- Với phép thử gieo xúc xắc 6 mặt, có thể xem các biến cố sơ cấp là số các chấm trên mỗi mặt xuất hiện. Vậy không gian mẫu  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

- Phép thử tung đồng thời 2 đồng xu có không gian mẫu là:

$$\Omega = \{(S, S), (S, N), (N, S), (N, N)\}.$$

Chú ý rằng bản chất của các biến cố sơ cấp không có vai trò đặc biệt gì trong lý thuyết xác suất. Chẳng hạn có thể mã hóa và xem không gian mẫu của phép thử tung đồng tiền là  $\Omega = \{0, 1\}$ , trong đó 0 là biến cố sơ cấp chỉ mặt sấp xuất hiện và 1 để chỉ mặt ngửa xuất hiện.

### 1.1.2 Biến cố

Với phép thử  $\mathcal{C}$  ta có thể xét các biến cố (còn gọi là sự kiện) mà việc xảy ra hay không xảy ra hoàn toàn được xác định bởi kết quả của  $\mathcal{C}$ . Các biến cố ngẫu nhiên được ký hiệu bằng các chữ in hoa  $A, B, C, \dots$ . Mỗi kết quả  $\omega$  (biến cố sơ cấp) của phép thử  $\mathcal{C}$  được gọi là kết quả thuận lợi cho biến cố  $A$  nếu  $A$  xảy ra khi kết quả của phép thử  $\mathcal{C}$  là  $\omega$ .

**Ví dụ 1.2:** Nếu gọi  $A$  là biến cố “số chấm xuất hiện là chẵn” trong phép thử gieo xúc xắc ở ví dụ 1.1 thì  $A$  có các kết quả thuận lợi là các mặt có 2, 4, 6 chấm, vì biến cố  $A$  xuất hiện khi kết quả của phép thử là mặt 2 chấm, 4 chấm hoặc 6 chấm. Mặt 1 chấm, 3 chấm, 5 chấm không phải là kết quả thuận lợi đối với  $A$ .

Tung hai đồng xu, biến cố xuất hiện một mặt sấp một mặt ngửa (xin âm dương) có các kết quả thuận lợi là  $(S, N)$  và  $(N, S)$ .

Như vậy có thể xem mỗi biến cố  $A$  là một tập con của không gian mẫu  $\Omega$  có các phần tử là các kết quả thuận lợi đối với  $A$ .

Cần chú ý rằng mỗi biến cố chỉ có thể xảy ra khi một phép thử được thực hiện, nghĩa là gắn với không gian mẫu nào đó.

Có hai biến cố đặc biệt sau:

- **Biến cố chắc chắn:** là biến cố luôn luôn xảy ra khi thực hiện phép thử. Không gian mẫu  $\Omega$  là một biến cố chắc chắn.

• **Biến cố không thể:** là biến cố nhất định không xảy ra khi thực hiện phép thử. Biến cố không thể được ký hiệu  $\emptyset$ .

Tung một con xúc xắc, biến cố xuất hiện mặt có số chấm nhỏ hơn hay bằng 6 là biến cố chắc chắn, biến cố xuất hiện mặt có 7 chấm là biến cố không thể.

## 1.2 ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT

Một biến cố ngẫu nhiên xảy ra hay không trong kết quả của một phép thử là điều không thể biết hoặc đoán trước được. Tuy nhiên bằng những cách khác nhau ta có thể định lượng khả năng xuất hiện của biến cố, đó là xác suất xuất hiện của biến cố.

Xác suất của một biến cố là một con số đặc trưng khả năng khách quan xuất hiện biến cố đó khi thực hiện phép thử.

Xác suất của biến cố  $A$  ký hiệu  $P(A)$ . Trường hợp biến cố chỉ gồm một biến cố sơ cấp  $\{a\}$  ta ký hiệu  $P(a)$  thay cho  $P(\{a\})$ .

Trường hợp các kết quả của phép thử xuất hiện đồng khả năng thì xác suất của một biến cố có thể được xác định bởi tỉ số của số trường hợp thuận lợi đối với biến cố và số trường hợp có thể. Với cách tiếp cận này ta có *định nghĩa xác suất theo phương pháp cổ điển*.

Trường hợp các kết quả của phép thử không đồng khả năng xuất hiện nhưng có thể thực hiện phép thử lặp lại nhiều lần độc lập, khi đó tần suất xác định khả năng xuất hiện của biến cố. Vì vậy ta có thể tính xác suất của biến cố thông qua tần suất xuất hiện của biến cố đó. Với cách tiếp cận này ta có *định nghĩa xác suất theo thống kê*.

### 1.2.1 Định nghĩa cổ điển về xác suất

#### 1.2.1.1 Định nghĩa và ví dụ

Giả sử phép thử  $\mathcal{C}$  thoả mãn hai điều kiện sau:

- (i) Không gian mẫu có một số hữu hạn phân tử.
- (ii) Các kết quả xảy ra đồng khả năng.

Khi đó xác suất của biến cố  $A$  được xác định và ký hiệu

$$P(A) = \frac{\text{số trường hợp thuận lợi đối với } A}{\text{số trường hợp cơ sở}} \quad (1.1)$$

Nếu xem biến cố  $A$  như là tập con của không gian mẫu  $\Omega$  thì

$$P(A) = \frac{\text{số phần tử của } A}{\text{số phần tử của } \Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad (1.2)$$

**Ví dụ 1.3:** Biến cố  $A$  xuất hiện mặt chẵn trong phép thử gieo con xúc xắc ở ví dụ 1.1 có 3 trường hợp thuận lợi ( $|A| = 3$ ) và 6 trường hợp có thể ( $|\Omega| = 6$ ). Vậy  $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

Biến cố xuất hiện một mặt sấp và một mặt ngửa khi gieo đồng thời hai đồng xu có 2 kết quả thuận lợi và 4 kết quả đồng khả năng có thể, vậy có xác suất xuất hiện của biến cố đó là  $\frac{1}{2}$ .

Để tính xác suất cổ điển ta sử dụng phương pháp đếm của giải tích tổ hợp.

### 1.2.1.2 Các qui tắc đếm

#### A. Qui tắc cộng

Nếu có  $m_1$  cách chọn loại đối tượng  $x_1$ ,  $m_2$  cách chọn loại đối tượng  $x_2$ , ...,  $m_n$  cách chọn loại đối tượng  $x_n$ . Các cách chọn đối tượng  $x_i$  không trùng với cách chọn  $x_j$  nếu  $i \neq j$  thì có  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$  cách chọn một trong các đối tượng đã cho.

Chẳng hạn để biết số SV có mặt của một lớp đông ta có thể lấy tổng số SV có mặt của các tổ do tổ trưởng cung cấp.

#### B. Qui tắc nhân

Giả sử công việc  $H$  gồm nhiều công đoạn liên tiếp  $H_1, H_2, \dots, H_k$ .

Có  $n_1$  cách thực hiện công đoạn  $H_1$ , ứng với mỗi công đoạn  $H_1$  có  $n_2$  cách thực hiện công đoạn  $H_2$  ... Vậy có tất cả  $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$  cách thực hiện công việc  $H$ .

**Ví dụ 1.4:** Một nhân viên có 4 chiếc áo sơ mi và 3 quần dài đồng phục, thì anh ta có  $4 \cdot 3 = 12$  cách chọn áo sơ mi và quần đồng phục.

**Ví dụ 1.5:** Tung một con xúc xắc (6 mặt) hai lần. Tìm xác suất để trong đó có 1 lần ra 6 chấm.

**Giải:** Theo quy tắc nhân ta có số các trường hợp có thể khi tung con xúc xắc 2 lần là  $6 \cdot 6 = 36$ .

Gọi  $A$  là biến cố “trong 2 lần tung con xúc xắc có 1 lần được mặt 6”. Nếu lần thứ nhất ra mặt 6 thì lần thứ hai chỉ có thể ra các mặt từ 1 đến 5, do đó có 5 trường hợp. Tương tự cũng có 5 trường hợp chỉ xuất hiện mặt 6 ở lần tung thứ hai. Áp dụng quy tắc cộng ta suy ra biến cố “chỉ có một lần ra mặt 6 khi 2 tung xúc xắc” có 10 trường hợp thuận lợi. Vậy xác suất cần tìm là  $\frac{10}{36}$ .

#### Ví dụ 1.6:

- Có bao nhiêu số có 4 chữ số.
- Có bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau.
- Có bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau và chữ số cuối là 0.

**Giải:** a. Có 9 cách chọn chữ số đầu tiên (vì chữ số đầu tiên khác 0) và các chữ số còn lại có 10 cách chọn cho từng chữ số. Vậy có  $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$  số cần tìm.

b. Có 9 cách chọn chữ số đầu tiên (vì chữ số đầu tiên khác 0), 9 cách chọn chữ số thứ hai, 8 cách chọn chữ số thứ ba và 7 cách chọn chữ số thứ tư. Vậy có  $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$  số cần tìm.

c. Vì chữ số thứ tư là số 0 và các chữ số này khác nhau do đó có 9 cách chọn chữ số đầu tiên, 8 cách chọn chữ số thứ hai, 7 cách chọn chữ số thứ ba. Vậy có  $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$  số cần tìm.

#### C. Hoán vị

Mỗi cách đổi chỗ của  $n$  phần tử hoặc mỗi cách sắp xếp  $n$  phần tử vào  $n$  vị trí trong một hàng được gọi là phép hoán vị  $n$  phần tử. Sử dụng quy tắc nhân ta có thể tính được:

Có  $n!$  hoán vị  $n$  phần tử. Quy ước  $0! = 1$ .

**Ví dụ 1.7:**

- a. Có bao nhiêu cách bố trí 5 nam SV và 4 nữ SV theo một hàng.
- b. Có bao nhiêu cách bố trí 5 nam SV và 4 nữ SV theo một hàng, sao cho các nữ SV ở vị trí số chẵn.

**Giải:** a. Số cách bố trí 9 SV (gồm 5 nam SV và 4 nữ SV) theo một hàng là  $9! = 362880$ .  
 b. Có 5! cách bố trí nam SV, ứng với mỗi cách bố trí nam SV có 4! cách bố trí nữ SV vào vị trí chẵn tương ứng. Vậy có  $5!4! = 2880$  cách bố trí theo yêu cầu.

**Ví dụ 1.8: (Hoán vị vòng tròn)** Có  $n$  người ( $n \geq 3$ ), trong đó có hai người là anh em.

- a. Có bao nhiêu cách sắp xếp  $n$  người ngồi xung quanh một bàn tròn.
- b. Có bao nhiêu cách sắp xếp  $n$  người ngồi xung quanh một bàn tròn, trong đó có hai người là anh em ngồi cạnh nhau.
- c. Có bao nhiêu cách sắp xếp  $n$  người ngồi xung quanh một bàn tròn, trong đó có hai người là anh em không ngồi cạnh nhau.

**Giải:** a. Có 1 người ngồi ở vị trí bất kỳ, vì vậy  $n-1$  người còn lại có  $(n-1)!$  cách chọn vị trí ngồi. Vậy có  $(n-1)!$  cách sắp xếp  $n$  người ngồi xung quanh một bàn tròn.  
 b. Người anh ngồi ở một vị trí tùy ý, người em ngồi vào 1 trong 2 chỗ cạnh người anh (có 2 cách) và  $n-2$  người còn lại còn lại ngồi tùy ý vào  $n-2$  chỗ còn lại (có  $(n-2)!$  cách). Vậy số các cách sắp xếp theo yêu cầu là  $2.(n-2)!$ .  
 c. Sử dụng kết quả phần a. và b. ta suy ra số cách sắp xếp  $n$  người ngồi xung quanh một bàn tròn, trong đó có hai người là anh em không ngồi cạnh nhau là

$$(n-1)! - 2.(n-2)! = (n-2)![(n-1) - 2].$$

**Ví dụ 1.9:** Xếp ngẫu nhiên 6 cuốn sách toán và 4 sách lý vào 1 giá sách. Tính xác suất 3 cuốn sách toán đứng cạnh nhau.

**Giải:** Số trường hợp có thể là số cách sắp xếp 10 cuốn sách vào giá sách đó là  $10!$ .  
 Ta xem 3 cuốn sách toán đứng cạnh nhau như là một cuốn sách lớn. Như vậy ta cần sắp xếp 8 cuốn sách vào giá sách (có 8! cách), ngoài ra 3 cuốn sách toán đứng cạnh nhau có 3! cách sắp xếp. Do đó số các trường hợp thuận lợi là  $8!3!$ . Vậy xác suất 3 cuốn sách toán đứng cạnh nhau là  $P = \frac{8!3!}{10!} = \frac{1}{15}$ .

**D. Chinh hợp**

Chọn lần lượt  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) phần tử không hoàn lại trong tập  $n$  phần tử ta được một chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử. Sử dụng quy tắc nhân ta có thể tính được số các chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử là

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{1.3}$$

**Ví dụ 1.10:** Có  $A_{10}^4 = 10.9.8.7 = 5040$  cách bố trí 10 người ngồi vào 4 chỗ.

**Ví dụ 1.11:** Một người gọi điện thoại quên mất hai số cuối của số điện thoại và chỉ nhớ được rằng chúng khác nhau. Tìm xác suất để quay ngẫu nhiên một lần được đúng số cần gọi.

**Giải:** Gọi  $A$  là biến cố “quay ngẫu nhiên một lần được đúng số cần gọi”. Số các trường hợp có thể là số các cặp hai chữ số khác nhau từ 10 chữ số từ 0 đến 9. Nó bằng số các chỉnh hợp chập 2 của 10 phần tử. Vậy số các trường hợp có thể là  $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$ .

Số các trường hợp thuận lợi của  $A$  là 1. Vậy  $P(A) = \frac{1}{90}$ .

Cũng có thể tính trực tiếp số trường hợp có thể của biến cố  $A$  như sau: Có 10 khả năng cho con số ở hàng chục và với mỗi con số hàng chục có 9 khả năng cho con số ở hàng đơn vị khác với hàng chục. Áp dụng quy tắc nhân ta được số các trường hợp có thể là  $10 \cdot 9 = 90$ .

### E. Tổ hợp

Chọn đồng thời  $k$  phần tử của tập  $n$  phần tử ta được một tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử. Cũng có thể xem một tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử là một tập con  $k$  phần tử của tập  $n$  phần tử.

Hai chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử là khác nhau nếu:

- có ít nhất 1 phần tử của chỉnh hợp này không có trong chỉnh hợp kia.
- các phần tử đều như nhau nhưng thứ tự khác nhau.

Do đó với mỗi tổ hợp chập  $k$  có  $k!$  chỉnh hợp tương ứng. Mặt khác hai chỉnh hợp khác nhau ứng với hai tổ hợp khác nhau là khác nhau.

Vậy số các tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử là  $C_n^k$  thỏa mãn:

$$k!C_n^k = A_n^k \Rightarrow C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (1.4)$$

Một vài trường hợp cụ thể

$$C_n^0 = 1; C_n^1 = n; C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}; C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}; C_n^k = C_n^{n-k}. \quad (1.5)$$

**Ví dụ 1.12:** Một công ty cần tuyển 2 nhân viên. Có 6 người nộp đơn trong đó có 4 nữ và 2 nam. Giả sử khả năng trúng tuyển của cả 6 người là như nhau. Tính xác suất biến cố:

- a. Hai người trúng tuyển là nam
- b. Hai người trúng tuyển là nữ
- c. Có ít nhất 1 nữ trúng tuyển.

**Giải:** Số trường hợp có thể là số tổ hợp chập 2 của 6 phần tử, vậy  $|\Omega| = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ .

- a. Chỉ có 1 trường hợp cả 2 nam đều trúng tuyển do đó xác suất tương ứng là  $P = \frac{1}{15}$ .

b. Có  $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$  cách chọn 2 trong 4 nữ, vậy xác suất tương ứng  $P = \frac{6}{15}$ .

c. Trong 15 trường hợp có thể chỉ có 1 trường hợp cả 2 nam được chọn, vậy có 14 trường hợp ít nhất 1 nữ được chọn. Do đó xác suất tương ứng  $P = \frac{14}{15}$ .

Ta cũng có thể tính số trường hợp thuận lợi của biến cố “có ít nhất 1 nữ được chọn” như sau.

Vì chỉ chọn 2 ứng viên nên biến cố có ít nhất 1 nữ trúng tuyển được chia thành 2 loại:

- Có 2 nữ được chọn: Có 6 cách
- Có 1 nữ và 1 nam được chọn: Có  $4 \cdot 2$  cách chọn

Sử dụng quy tắc cộng ta được 14 trường hợp ít nhất 1 nữ được chọn.

**Ví dụ 1.13:** Một hộp có 8 bi màu đỏ, 3 bi trắng và 9 bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 bi từ hộp. Tính xác suất trong các trường hợp sau:

- a. 3 bi lấy được cùng màu đỏ
- b. 2 đỏ và 1 trắng
- c. Ít nhất 1 trắng
- d. Mỗi màu 1 bi
- e. Nếu lấy lần lượt không hoàn lại 3 bi, tính xác suất lấy được mỗi màu 1 bi.

**Giải:** a.  $P = \frac{C_8^3}{C_{20}^3} = \frac{14}{285} = 0,0491$

b.  $P = \frac{C_8^2 C_3^1}{C_{20}^3} = \frac{7}{95} = 0,0737$

c.  $P = \frac{C_3^1 C_{17}^2 + C_3^2 C_{17}^1 + C_3^3}{C_{20}^3} = \frac{23}{57}$  hoặc  $P = 1 - \frac{C_{17}^3}{C_{20}^3} = 1 - \frac{34}{57} = \frac{23}{57} = 0,4035$

d.  $P = \frac{C_8^1 C_3^1 C_9^1}{C_{20}^3} = \frac{18}{95} = 0,1895$ .

e.  $P = \frac{8 \cdot 3 \cdot 9}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{3}{95} = 0,0316$ .

**Nhận xét 1.1:**

Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp có thể liên hệ với nhau như sau:

- Có thể xem mỗi hoán vị  $n$  phần tử là một cách sắp xếp  $n$  phần tử này thành một hàng.
- Mỗi chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử là một cách sắp xếp  $k$  phần tử từ  $n$  phần tử này thành một hàng.

- Khi sắp xếp các phần tử thành một hàng ta ngầm hiểu từ trái sang phải, vì vậy trường hợp hoán vị vòng quanh cần chọn một phần tử làm điểm xuất phát do đó có  $(n-1)!$  cách hoán vị vòng quanh của  $n$  phần tử.
- Có thể xem mỗi tổ hợp chập  $k$  của  $n$  vật là một cách sắp xếp  $n$  vật thành một hàng, trong đó có  $k$  vật loại 1 giống nhau và  $n-k$  vật loại 2 còn lại cũng giống nhau. Có  $n!$  cách sắp xếp  $n$  vật thành một hàng.

Vì các vật cùng loại giống nhau không phân biệt được, do đó nếu số cách sắp xếp các vật thỏa mãn yêu cầu trên là  $N$  thì ứng với mỗi một cách sắp xếp trong  $N$  cách ở trên có  $k!$  hoán vị vật loại 1,  $(n-k)!$  hoán vị vật loại 2 được đếm trong tổng số  $n!$  cách.

$$\text{Vậy } k!(n-k)!N = n! \Rightarrow N = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ta có thể mở rộng kết quả này như sau.

### Công thức tổ hợp mở rộng

Số cách sắp xếp  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  vật theo một hàng: trong đó có  $n_1$  vật loại 1 giống nhau,  $n_2$  vật loại 2 giống nhau, ...,  $n_k$  vật loại  $k$  giống nhau là

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} \quad (1.6)$$

Công thức này có thể giải thích như sau:

Có  $n!$  cách sắp xếp  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  vật khác nhau theo một hàng.

Vì các vật cùng loại giống nhau không phân biệt được, do đó nếu số cách sắp xếp các vật thỏa mãn yêu cầu trên là  $N$  thì ứng với mỗi một cách sắp xếp trong  $N$  cách ở trên có  $n_1!$  hoán vị vật loại 1,  $n_2!$  hoán vị vật loại 2, ...,  $n_k!$  hoán vị vật loại  $k$  được đếm trong tổng số  $n!$  cách. Vì

$$\text{Vậy } n_1!n_2!\dots n_k!N = n! \Rightarrow N = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

**Ví dụ 1.14:** Cần sắp xếp 4 cuốn sách toán, 6 sách lý và 2 sách hóa khác nhau trên cùng một giá sách. Có bao nhiêu cách sắp xếp trong mỗi trường hợp sau:

- Các cuốn sách cùng môn học phải đứng cạnh nhau.
- Chỉ cần các sách toán đứng cạnh nhau.
- Nếu các cuốn sách trong mỗi môn học giống nhau thì có bao nhiêu cách sắp xếp.

**Giải:** a. Có  $4!$  cách sắp xếp các cuốn sách toán,  $6!$  cách sắp xếp các cuốn sách lý,  $2!$  cách sắp xếp các cuốn sách hóa và  $3!$  cách sắp xếp 3 nhóm toán, lý, hóa.

Vậy số cách sắp xếp theo yêu cầu là  $4!6!2!3!=207.360$ .

b. Ta ghép 4 sách toán thành 1 cuốn sách to. Như vậy có 9 cuốn sách cần sắp xếp, do đó có  $9!$  cách sắp xếp. Trong mỗi trường hợp này các cuốn sách toán luôn đứng bên nhau, nhưng có  $4!$  cách sắp xếp 4 cuốn sách toán.



Vậy số cách sắp xếp theo yêu cầu là  $9!4! = 8.709.120$ .

c. Vì các cuốn sách cùng loại không phân biệt do đó có thể áp dụng công thức (1.6) và số cách sắp xếp là  $\frac{12!}{4!6!2!} = 13.860$ .

### 1.2.2 Định nghĩa thống kê về xác suất

Định nghĩa xác suất theo cổ điển trực quan, dễ hiểu. Tuy nhiên khi phép thử có không gian mẫu vô hạn hoặc các kết quả không đồng khả năng thì cách tính xác suất cổ điển không áp dụng được. Trong trường hợp này người ta sử dụng phương pháp thống kê như sau.

Giả sử phép thử  $C$  có thể được thực hiện lặp lại nhiều lần độc lập trong những điều kiện giống hệt nhau. Nếu trong  $n$  lần thực hiện phép thử  $C$  biến cố  $A$  xuất hiện  $k_n(A)$  lần (gọi là tần số xuất hiện) thì tỉ số:

$$f_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$$

được gọi là tần suất xuất hiện của biến cố  $A$  trong  $n$  phép thử.

Người ta chứng minh được (định lý luật số lớn Bernoulli) khi  $n$  tăng lên vô hạn thì  $f_n(A)$  tiến đến một giới hạn xác định. Ta định nghĩa giới hạn này là xác suất của biến cố  $A$ , ký hiệu  $P(A)$ .

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(A) \quad (1.7)$$

Trên thực tế các tần suất  $f_n(A)$  xấp xỉ nhau khi  $n$  đủ lớn và  $P(A)$  được chọn bằng giá trị xấp xỉ này.

**Ví dụ 1.15:** Một công ty bảo hiểm muốn xác định xác suất để một thanh niên 25 tuổi sẽ bị chết trong năm tới, người ta theo dõi 100.000 thanh niên và thấy rằng có 798 người bị chết trong vòng 1 năm sau đó. Vậy xác suất cần tìm xấp xỉ bằng  $\frac{798}{100.000} \approx 0,008$ .

**Ví dụ 1.16:** Thống kê cho thấy tần suất sinh con trai xấp xỉ 0,513. Vậy xác suất để bé trai ra đời lớn hơn bé gái.

**Nhận xét 1.2:** Định nghĩa xác suất theo thống kê khắc phục được hạn chế của định nghĩa cổ điển, phương pháp này hoàn toàn dựa trên các thí nghiệm hoặc quan sát thực tế để tìm xác suất của biến cố. Tuy nhiên định nghĩa thống kê về xác suất cũng chỉ áp dụng cho các phép thử mà có thể lặp lại được nhiều lần một cách độc lập trong những điều kiện giống hệt nhau. Ngoài ra để xác định một cách tương đối chính xác giá trị của xác suất thì cần tiến hành một số lần  $n$  đủ lớn các phép thử, mà việc này đôi khi không thể làm được vì hạn chế về thời gian và kinh phí.

Ngày nay với sự trợ giúp của công nghệ thông tin, người ta có thể mô phỏng các phép thử ngẫu nhiên mà không cần thực hiện các phép thử trong thực tế. Điều này cho phép tính xác suất theo phương pháp thống kê thuận tiện hơn.

### 1.3 QUAN HỆ CỦA CÁC BIẾN CỐ

Một cách tương ứng với các phép toán của tập hợp, trong lý thuyết xác suất người ta xét các quan hệ sau đây của các biến cố *trong cùng một phép thử*.

#### 1.3.1 Quan hệ biến cố đối

Với mỗi biến cố  $A$ , luôn luôn có biến cố gọi là biến cố đối của  $A$ , ký hiệu  $\bar{A}$  và được xác định như sau: Biến cố  $A$  xảy ra khi và chỉ khi biến cố đối  $\bar{A}$  không xảy ra.

**Ví dụ 1.17:** Bắn một phát đạn vào bia. Gọi  $A$  là biến cố “bắn trúng bia”.

Biến cố đối của  $A$  là  $\bar{A}$  “bắn trượt bia”.

#### 1.3.2 Tổng của các biến cố

Tổng của hai biến cố  $A, B$  là biến cố được ký hiệu  $A \cup B$ .

Biến cố tổng  $A \cup B$  xảy ra khi và chỉ khi có ít nhất  $A$  hoặc  $B$  xảy ra.

Tổng của một dãy các biến cố  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  là biến cố  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  hoặc  $\bigcup_{i=1}^n A_i$ .

Biến cố tổng xảy ra khi *có ít nhất một trong các biến cố  $A_i$  xảy ra*, với  $i = 1, \dots, n$ .

**Ví dụ 1.18:** Một mạng điện gồm hai bóng đèn mắc nối tiếp. Gọi  $A_1$  là biến cố “bóng đèn thứ nhất bị cháy”,  $A_2$  là biến cố “bóng đèn thứ hai bị cháy”. Gọi  $A$  là biến cố “mạng mất điện”. Ta thấy rằng mạng bị mất điện khi ít nhất một trong hai bóng bị cháy.

Vậy  $A = A_1 \cup A_2$ .

#### 1.3.3 Tích của các biến cố

Tích của hai biến cố  $A, B$  là biến cố được ký hiệu  $A \cap B$ .

Biến cố tích  $A \cap B$  xảy ra khi cả hai biến cố  $A, B$  đồng thời cùng xảy ra.

Tích của một dãy các biến cố  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  là biến cố  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$  hoặc  $\bigcap_{i=1}^n A_i$ .

Biến cố tích xảy ra khi tất cả các biến cố  $A_i$  *đồng thời cùng xảy ra*, với mọi  $i = 1, \dots, n$ .

**Ví dụ 1.19:** Một mạng điện gồm hai bóng đèn mắc song song. Gọi  $A_1$  là biến cố “bóng đèn thứ nhất bị cháy”,  $A_2$  là biến cố “bóng đèn thứ hai bị cháy”. Gọi  $A$  là biến cố “mạng mất điện”.

Ta thấy rằng mạng mắc song song bị mất điện khi cả hai bóng bị cháy. Vậy  $A = A_1 \cap A_2$ .

#### 1.3.4 Biến cố xung khắc

Hai biến cố  $A, B$  gọi là xung khắc nếu hai biến cố này không thể đồng thời cùng xảy ra. Nói cách khác biến cố tích  $A \cap B$  là biến cố không thể, nghĩa là  $A \cap B = \emptyset$ .

Đôi khi người ta còn ký hiệu tổng của hai biến cố xung khắc  $A$  và  $B$  là  $A + B$ .

**Ví dụ 1.20:** Một bình có 3 loại cầu: cầu màu trắng, màu đỏ và màu xanh. Lấy ngẫu nhiên 1 cầu từ bình. Gọi  $A_t, A_d, A_x$  lần lượt là biến cố quả cầu rút được là cầu trắng, đỏ, xanh. Các biến cố này xung khắc từng đôi một, vì mỗi quả cầu chỉ có 1 màu.

### 1.3.5 Hệ đầy đủ các biến cố

Dãy các biến cố  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  được gọi là một hệ đầy đủ các biến cố nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

- (i) Xung khắc từng đôi một, nghĩa là  $A_i \cap A_j = \emptyset$  với mọi  $i \neq j; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$
- (ii) Tổng của chúng là biến cố chắc chắn, nghĩa là  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ .

Đặc biệt với mọi biến cố  $A$ , hệ hai biến cố  $\{A, \bar{A}\}$  là hệ đầy đủ.

**Ví dụ 1.21:** Một nhà máy có ba phân xưởng sản xuất ra cùng một loại sản phẩm. Giả sử rằng mỗi sản phẩm của nhà máy chỉ do một trong ba phân xưởng này sản xuất. Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm, gọi  $A_1, A_2, A_3$  lần lượt là biến cố sản phẩm được chọn do phân xưởng thứ nhất, thứ hai, thứ ba sản xuất. Khi đó hệ ba biến cố  $\{A_1, A_2, A_3\}$  là hệ đầy đủ.

Hệ ba biến cố  $\{A_t, A_d, A_x\}$  trong ví dụ 1.20 cũng là đầy đủ.

### 1.3.6 Tính độc lập của các biến cố

Hai biến cố  $A$  và  $B$  được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra biến cố này không ảnh hưởng tới việc xảy ra hay không xảy ra biến cố kia.

Trường hợp tổng quát: hệ các biến cố  $A_1, A_2, \dots, A_n$  được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của một nhóm bất kỳ  $k$  biến cố, trong đó  $1 \leq k \leq n$ , không làm ảnh hưởng tới việc xảy ra hay không xảy ra của một nhóm nào đó các biến cố còn lại.

**Ví dụ 1.22:** Ba xạ thủ  $A, B, C$  mỗi người bắn một viên đạn vào mục tiêu. Gọi  $A, B, C$  lần lượt là biến cố  $A, B, C$  bắn trúng mục tiêu.

- a. Hãy mô tả các biến cố:  $A \cap B \cap C, \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}, A \cup B \cup C$ .
- b. Biểu diễn các biến cố sau theo  $A, B, C$ :
  - $D$ : Có ít nhất 2 xạ thủ bắn trúng.
  - $E$ : Có nhiều nhất 1 xạ thủ bắn trúng.
  - $F$ : Chỉ có xạ thủ  $C$  bắn trúng.
  - $G$ : Chỉ có 1 xạ thủ bắn trúng.
- c. Các biến cố  $A, B, C$  có xung khắc không, có độc lập không?

**Giải:**

- a.  $A \cap B \cap C$ : là biến cố cả 3 đều bắn trúng.  
 $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ : là biến cố cả 3 đều bắn trượt.  
 $A \cup B \cup C$ : là biến cố có ít nhất 1 người bắn trúng.

b. Biến cố có ít nhất hai xạ thủ bắn trúng:

$$D = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$$

Vì chỉ có 3 xạ thủ bắn vào bia nên biến cố “có nhiều nhất một xạ thủ bắn trúng” cũng là biến cố “có ít nhất hai xạ thủ bắn trượt”, vậy:

$$E = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{C} \cap \bar{A}).$$

Biến cố chỉ có C bắn trúng:  $F = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C$ .

Biến cố chỉ có một xạ thủ bắn trúng:  $G = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$ .

c. Ba biến cố  $A, B, C$  độc lập nhưng không xung khắc.

**Nhận xét 1.3:**

- Từ ví dụ trên cho thấy tính chất xung khắc hoặc độc lập của các biến cố được suy từ ý nghĩa của phép thử.
- Nếu  $A, B$  độc lập thì các cặp biến cố:  $A, \bar{B}$ ;  $\bar{A}, B$ ;  $\bar{A}, \bar{B}$  cũng độc lập.
- Một số tài liệu ký hiệu tổng, tích của hai biến cố  $A, B$  là  $A+B$  và  $AB$ . Mỗi cách ký hiệu có những thuận lợi riêng. Nhưng ký hiệu theo cách này rất khó biểu diễn các tính chất dạng đại số Boole của các biến cố, chẳng hạn tính chất phân phối của tổng đối với tích và tích đối với tổng của các biến cố được xét trong chú ý sau.
- Chú ý rằng các biến cố với phép toán tổng, tích và lấy biến cố đối tạo thành đại số Boole, do đó các phép toán được định nghĩa ở trên có các tính chất như các phép toán hợp, giao, lấy phần bù đối với các tập con của không gian mẫu. Chẳng hạn phép toán tổng, phép toán tích các biến cố có tính giao hoán, kết hợp, tổng phân bố đối với tích, tích phân bố đối với tổng, thỏa mãn luật De Morgan ...

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \dots$$

## 1.4 CÁC ĐỊNH LÝ VÀ TÍNH CHẤT XÁC SUẤT

### 1.4.1 Xác suất chắc chắn và xác suất không thể

Các định nghĩa trên của xác suất thỏa mãn các tính chất sau:

1. Với mọi biến cố  $A$  :

$$0 \leq P(A) \leq 1. \tag{1.8}$$

2. Xác suất của biến cố không thể bằng 0, xác suất của biến cố chắc chắn bằng 1.

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1 \tag{1.9}$$

### 1.4.2 Quy tắc cộng xác suất

#### 1.4.2.1 Trường hợp xung khắc

Nếu  $A, B$  là hai biến cố xung khắc thì