ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
KHOA TOÁN
*****

BÀI GIẢNG

TOÁN TỐI ƯU

Biên soạn : **TS. Hoàng Quang Tuyến**

Đà Nẵng - 2012

Giới thiệu

Tập tài liệu này được biên soạn bởi Thầy giáo TS Hoàng Quang Tuyến, sử dụng cho giảng dạy môn **Toán Tối Ưu** trong chương trình đào tạo thạc sỹ ngành Phương Pháp Toán Sơ Cấp của Đại Học Đà Nẵng. Đã có một số bản đánh máy tài liệu này, nhưng các bản trước đó đều có khá nhiều lỗi chẳng hạn như thiếu một số dòng, sai ký hiệu, sai công thức,... Mình đã mượn thầy Tuyến bản viết tay giáo trình của môn Toán Tối Ưu của thầy và soạn lại trên **Latex**. Hy vọng sẽ giúp ích cho các bạn học viên khóa sau đỡ vất vả hơn khi học môn này.
Đây là bản đầu tiên nên có thể vẫn còn một vài chỗ nhầm lẫn, mong được mọi người cùng góp ý để giáo trình được hoàn thiện một cách chính xác nhất. Mọi ý kiến đóng góp, xin gửi vào địa chỉ email của mình

hablack18@gmail.com

Chương 1

CƠ BẢN VỀ GIẢI TÍCH LỒI

1.1 Tập lồi

Các ký hiệu:

- Một vector a luôn hiểu là một vector cột.
- Chuyển vị của vector a là một vector hàng a^T.
- Tích vô hướng của hai vector a, b là $\langle a, b\rangle$ hay $a^T b$.
- Tập các số thực là $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1. *Đường thẳng đi qua hai điểm a, b trong không gian Euclid n-chiều $\mathbb{R}^n$ là tập hợp các điểm $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng*

$$x = \lambda a + (1-\lambda)b, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Định nghĩa 1.2. *Đoạn thẳng nối hai điểm a, b trong $\mathbb{R}^n$ là tập hợp các điểm $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng*

$$x = \lambda a + (1-\lambda)b, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Định nghĩa 1.3. *Tập $M \subset \mathbb{R}^n$ gọi là đa tạp affine nếu với hai điểm bất kỳ $x, y \in M$ thì đường thẳng đi qua x, y cũng thuộc M. Tức là*

$$\lambda x + (1-\lambda)y, \forall x, y \in M, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mỗi đa tạp affine đều có duy nhất một không gian con L song song với nó. Tức là $L = M + a, a \in \mathbb{R}^n$. Thứ nguyên của M là thứ nguyên của L.

Định nghĩa 1.4. *Siêu phẳng trong $\mathbb{R}^n$ là tập*

$$\{x = (x_1, x_2, \ldots x_n) | x_1 a^1 + x_2 a^2 + \ldots + x_n a^n = \alpha, a^i \in \mathbb{R}, \forall i = 1..n, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Ví dụ 1.1.1. *Siêu phẳng trong không gian 2 chiều là đường thẳng, trong không gian 3 chiều là mặt phẳng.*

Bài tập 1.1. *Siêu phẳng có phải là đa tạp?*

Định nghĩa 1.5. *(Về các nửa không gian)*

- *Nửa không gian đóng trong $\mathbb{R}^n$ là tập*

  $$\left\{x = (x_1, x_2, \dots x_n) \,\middle|\, x_1a^1 + x_2a^2 + \dots + x_na^n \le \alpha, a^i \in \mathbb{R}, \forall i = 1..n, \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

- *Nửa không gian mở trong $\mathbb{R}^n$ là tập*

  $$\{x = (x_1, x_2, \dots x_n) | x_1a^1 + x_2a^2 + \dots + x_na^n < \alpha, a^i \in \mathbb{R}, \forall i = 1..n, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

- *Đây là các nửa không gian được xác định bởi siêu phẳng*

  $$x_1a^1 + x_2a^2 + \dots + x_na^n = \alpha$$

- *Hai nửa không gian đóng, mở nằm bên kia siêu phẳng so với hai nửa siêu phẳng trên là*

  $$\{x = (x_1, x_2, \dots x_n) | x_1a^1 + x_2a^2 + \dots + x_na^n \ge \alpha, a^i \in \mathbb{R}, \forall i = 1..n, \alpha \in \mathbb{R}\},$$
  $$\{x = (x_1, x_2, \dots x_n) | x_1a^1 + x_2a^2 + \dots + x_na^n > \alpha, a^i \in \mathbb{R}, \forall i = 1..n, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Định nghĩa 1.6. *(Tập lồi)*
Tập $D \subset \mathbb{R}^n$ gọi là tập lồi nếu

$$\forall a, b \in D \text{ và } \lambda \in [0, 1] \text{ ta có } \lambda a + (1 - \lambda)b \in D.$$

Định nghĩa 1.7. *(Nón lồi)*
Tập $D \subset \mathbb{R}^n$ gọi là nón lồi nếu

$$\forall x, y \in D \text{ thì } x + y \in D \text{ và } tx \in D, \forall t \ge 0.$$

Ví dụ 1.1.2. $\mathbb{R}^n_+$ *là nón lồi.*

Bài tập 1.2. *Nón lồi có phải là tập lồi?*

Định nghĩa 1.8. *(Bao lồi)*
Bao lồi của tập A là tập lồi nhỏ nhất chứa A, ký hiệu $CovA$.

Ví dụ 1.1.3. $A = \{x; y\} \Rightarrow CovA = \{\lambda x + (1 - \lambda)y | 0 \le \lambda \le 1\}.$

Định nghĩa 1.9. *(Tổ hợp lồi của hai tập).*
Cho $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^n$, tổ hợp lồi của A và B là tập hợp các điểm thuộc $\mathbb{R}^n$ có dạng

$$x = \lambda a + (1-\lambda)b, a \in A, b \in B, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Bài tập 1.3. *Tổ hợp lồi là tập lồi?*

Định lý 1.1. *Tập lồi là đóng với phép giao, phép cộng, phép nhân với một số và phép lấy tổ hợp tuyến tính. Tức là, nếu A, B là hai tập lồi trong $\mathbb{R}^n$ thì các tập sau đây cũng lồi :*

i) $A \cap B := \{x | x \in A, x \in B\}$,

ii) $\lambda A + \beta B := \{x = \lambda a + \beta b | a \in A, b \in B, \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Định nghĩa 1.10. *Thứ nguyên của một tập lồi A là thứ nguyên của đa tạp affine nhỏ nhất chứa A, gọi là bao affine của A ký hiệu là $affA$. Thứ nguyên của tập lồi A ký hiệu là $dimA$.*

Nhận xét 1. *Nếu $A \subset \mathbb{R}^n$ thì $dimA \leq n$.*

Định nghĩa 1.11. *Tập hợp các điểm trong tương đối của một tập $A \subset \mathbb{R}^n$ là tập hợp*

$$riA := \{x \in A | \exists U(x), U(x) \cap affA \subset A\},$$

trong đó : $U(x)$ là lân cận mở của x.

Bài tập 1.4. *Nếu $A \neq \emptyset$ và lồi thì $riA \neq \emptyset$.*

Định nghĩa 1.12. *Một tập hợp được gọi là tập lồi đa diện (hay khúc lồi) nếu nó là giao của hữu hạn các nửa không gian đóng.*

Như vậy, khúc lồi là tập hợp thỏa mãn các bất phương trình dạng :

$$\begin{cases} a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + & \ldots + a_{1n}x^n \leq b_1 \\ a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + & \ldots + a_{2n}x^n \leq b_2 \\ & \ldots \\ a_{m1}x^1 + a_{m2}x^2 + & \ldots + a_{mn}x^n \leq b_m \end{cases}$$

Hệ bất phương trình này có thể viết dưới dạng $Ax \leq b$, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Nhận xét 2. *Khúc lồi là một tập đóng, có thể không bị chặn.*

Định nghĩa 1.13. *Một khúc lồi bị chặn gọi là đa diện lồi. Một tập con A' của khúc lồi A được gọi là một diện của A nếu:*

$$\forall a, b \in A, x = \lambda a + (1 - \lambda)b; 0 < \lambda < 1, x \in A' \Rightarrow a, b \in A'.$$

Nhận xét 3.

- *Mọi diện của một tập lồi đa diện cũng là tập lồi đa diện. (Chứng minh nhận xét này xem như bài tập)*
- *Một diện có thứ nguyên 0 gọi là một đỉnh (điểm cực biên).*
- *Cạnh là diện có thứ nguyên bằng 1.*

Định nghĩa 1.14. *Điểm $x \in C$ gọi là điểm cực biên của tập C (C không nhất thiết lồi) nếu C không có đoạn thẳng nào nhận x làm điểm trong.*

Định nghĩa 1.15. *Một vector $h \neq 0$ được gọi là phương vô hạn của tập C nếu :*

$$x + \lambda h \subset C, \forall x \in C, \forall \lambda > 0.$$

Định lý 1.2.

i) Mọi khúc lồi không chứa trọn một đường thẳng đều có ít nhất một đỉnh.

ii) Mọi khúc lồi A có đỉnh đều là tập

$$A := \left\{ x = \sum_{i \in I} \lambda_i v^i + \sum_{j \in J} \beta_j d^j \,\middle|\, \sum_{i \in I} \lambda_i = 1, \lambda_i, \beta_j \geq 0 \right\}.$$

Trong đó: $v^i \in \{$Tập I đỉnh$\}, d^j \in \{$Tập J phương vô hạn$\}$

Chú ý 1.1.1.

i) Nếu khúc lồi A bị chặn thì A chỉ là tổ hợp lồi của các đỉnh (tập I đỉnh):

$$A := \left\{ x = \sum_{i \in I} \lambda_i v^i \,\middle|\, \sum_{i \in I} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \right\}.$$

ii) Nếu D là tập lồi đa diện (khúc lồi) thì D có thể biểu diễn:

$$D = E + D_0,$$

trong đó: E là không gian con, D_0 là khúc lồi có đỉnh.

Định nghĩa 1.16. *Ta nói siêu phẳng* $H = \{x \,|\langle v, x\rangle = \alpha\}$ *tách hai tập* A *và* B *nếu:*

$$\langle v, a\rangle \leq \alpha, \langle v, a\rangle \geq \alpha, \forall a \in A, \forall b \in B, \tag{1.1}$$

ta nói H *tách hẳn* A *và* B *nếu* (1.1) *có ít nhất một đẳng thức thực sự.*

Định lý 1.3. *Cho* A *là một tập lồi đóng và* $x^0 \notin A$*. Lúc đó tồn tại một siêu phẳng tách* A *và* x^0

Hệ quả 1.3.1. *(Bổ đề Farkas)*
Cho $a \in \mathbb{R}^n$ *và* A *là ma trận cấp* $m_{\times}n$*. Khi đó:*

$$\langle a, x\rangle \geq 0, \forall x \text{ thỏa mãn } Ax \geq 0 \Leftrightarrow \exists y \geq 0 \in \mathbb{R}^m \text{ sao cho } a = A^T y.$$

Nhận xét 4. *Ý nghĩa hình học của bổ đề là siêu phẳng đi qua gốc tọa độ* $\langle a, x\rangle = 0$ *tách nón* $\{x|Ax \geq 0\}$ *về một phía khi và chỉ khi vector pháp tuyến* a *của siêu phẳng thuộc nón sinh bởi các hàng của ma trận* A*.*

1.2 Hàm lồi

Giáo trình này chỉ xét các hàm số thực và nhận giá trị hữu hạn.

Định nghĩa 1.17. $\forall x, y \in A, 0 \leq \lambda \leq 1$

- *, Hàm số f xác định trên tập lồi A gọi là hàm lồi trên A nếu :*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

- *Hàm f gọi là lồi chặt nếu :*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \forall x, y \in A, 0 < \lambda < 1.$$

- *Hàm f gọi là* ***tựa lồi*** *(quasi convex) trên A nếu*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{ tập mức } \{x \in A|f(x) \leq \lambda\} \text{ là một tập lồi .}$$

- *Hàm f gọi là* ***tựa lõm*** *(quasi convcave) trên A nếu* $-f$ *tựa lồi.*

Ví dụ 1.2.1. $f(x) = \dfrac{\langle a, x\rangle + \alpha}{\langle b, x\rangle + \beta}$

Định nghĩa 1.18. *Các hàm* $\lambda f, f+g$ *và* $\max(f, g)$ *được định nghĩa như sau:*

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x),$$
$$(f+g)(x) := f(x) + g(x),$$
$$\max(f, g)(x) := \max\{f(x), g(x)\}.$$

Định lý 1.4. *Cho f là hàm lồi trên tập lồi A và g là hàm lồi trên tập lồi B. Lúc đó trên $A \cap B$ các hàm sau là lồi:*

i) $\lambda f + \beta g, \forall \lambda, \beta \geq 0,$

ii) $\max(f, g).$

Chứng minh định lý này như bài tập.

Định lý 1.5. *Một hàm lồi xác định trên tập lồi A thì liên tục tại mọi điểm trong của A.*

- Chú ý: Hàm lồi xác định trên tập lồi thì liên tục tại mọi điểm trong, chưa chắc liên tục trên điểm biên.
- Kí hiệu: $f'(a)$ hoặc $\nabla f(a)$ là **đạo hàm** của f tại a.

Định lý 1.6.

1. *Cho $f : A \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi trên tập lồi mở A. Điều kiện cần và đủ để f lồi trên A là :*

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y), \forall x, y \in A.$$

2. *Nếu f khả vi hai lần thì f lồi trên A khi và chỉ khi $\forall x \in A$ ma trận Hessian H(x) của f tại x xác định không âm,tức là :*

$$y^T H(x) y \geq 0, \forall x \in A, y \in \mathbb{R}^n.$$

Chú ý 1.2.1. *Tính khả vi của một hàm lồi giữ vai trò quan trọng bậc nhất trong tối ưu hóa.*

Định nghĩa 1.19. *Ta gọi đạo hàm theo hướng d của một hàm số f (không nhất thiết lồi) tại x là một đại lượng số :*

$$f'(x, d) := \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x + \lambda d) - f(x)}{\lambda}$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Định lý 1.7. *Nếu f là một hàm lồi trên tập A thì $\forall x \in A$ và $\forall d \in \mathbb{R}^n$ sao cho $x + d \in A$ đạo hàm theo hướng d của f tại x luôn tồn tại và nghiệm đúng*

$$f'(x, d) \leq f(x + d) - f(x).$$

Ngoài ra, với mỗi x cố định, $f'(x, .)$ là hàm lồi trên tập lồi $\{d : x + d \in A\}$.

Nhận xét 5.

- *Nếu f khả vi thì:* $f'(x,d) = \langle \nabla f(x), d \rangle, \forall d$
- *Hàm lồi chưa chắc khả vi tại mọi điểm*

Định nghĩa 1.20. *Cho f là một hàm trên tập lồi A. Một vector $y^* \in \mathbb{R}^n$ được gọi là dưới vi phân tại $x^* \in A$ nếu*

$$f(x) \geq f(x^*) + \langle y^*, x - x^* \rangle, \forall x \in A.$$

Tập các điểm y^* thỏa mãn bất đẳng thức này được ký hiệu $\partial f(x^*)$.
Trường hợp $\partial f(x^*)$ chỉ có một điểm ta nói f khả vi tại x^*.

Nhận xét 6.

i) *Tương tự trường hợp hàm một biến, bất đẳng thức*

$$f(x) \geq f(x^*) + \langle y^*, x - x^* \rangle, \forall x \in A$$

có nghĩa rằng siêu phẳng đi qua điểm $(x^*, f(x^*))$ nằm dưới đồ thị hàm số.

ii) *Tập $\partial f(x^*)$ có thể rỗng, tuy nhiên với hàm lồi khác $\emptyset$.*

Định lý 1.8. *Cho f là hàm lồi (hữu hạn) trên tập lồi A. Khi đó f có dưới vi phân tại mọi điểm trong tương đối riA.*

Nhận xét 7.
Nếu $A \equiv \mathbb{R}^n$ thì f có dưới vi phân tại mọi điểm vì $ri\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$.

1.3 Tính chất cực trị

Cho $D \subset \mathbb{R}^n, D \neq \emptyset$ và hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ (không nhất thiết lồi).

Định nghĩa 1.21. *Một điểm $x^* \in D$ được gọi là cực tiểu địa phương của f trên D nếu tồn tại một lân cận mở U của x^* sao cho $f(x^*) \leq f(x)$ với mọi $x \in D \cap U$. Điểm x^* được gọi là cực tiểu tuyệt đối (toàn cục) của f trên D nếu :*

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in D.$$

Dưới đây là hai tính chất cơ bản về cực trị của hàm lồi :

Định lý 1.9.

i) Mọi điểm cực tiểu địa phương của một hàm lồi trên một tập lồi đều là điểm cực tiểu tuyệt đối.

ii) Nếu x^* là điểm cực tiểu của hàm lồi f trên tập lồi D và $x^* \in intD$ thì $0 \in \partial f(x^*)$.

Định lý 1.10. *Cực đại của hàm lồi (nếu có) trên tập lồi có điểm cực biên bao giờ cũng đạt tại một điểm trên biên.*