HỘI NHỮNG NGƯỜI YÊU THÍCH TOÁN HỌC

**VIETMATHS.NET**


# ĐẠI SỐ SƠ CẤP

Giáo trình đào tạo giáo viên trung học
hệ Đại học, Cao đẳng sư phạm

*( Tái bản lần thứ 10)*

HOÀNG HUY SƠN

**Bấm nút Like hoặc G+1 để ủng hộ chúng tôi.**

**Chân thành cám ơn.**

# LỜI NÓI ĐẦU

Tài liệu "Đại số sơ cấp" được viết nhằm phục vụ sinh viên chuyên ngành Sư phạm Toán. Nội dung của tài liệu đề cập đến các vấn đề: Hàm số và đồ thị; Phương trình và hệ phương trình; Bất đẳng thức và bất phương trình.

Một số nội dung đề cập trong tài liệu, sinh viên đã được học sơ lược trong chương trình Toán phổ thông. Tuy nhiên, để trở thành thầy giáo dạy tốt môn Toán khi ra trường, đòi hỏi sinh viên phải nắm vững lý thuyết và hoàn thiện các phương pháp giải toán sơ cấp.

Xuất phát từ yêu cầu trên, chúng tôi cố gắng trình bày tương đối có hệ thống về cơ sở lý thuyết của các khái niệm: Hàm số; Phương trình; Bất đẳng thức; Bất phương trình; Hệ phương trình. Các nội dung chiếm một phần quan trọng trong chương trình Toán phổ thông như: Phương trình, bất phương trình vô tỉ; Phương trình, bất phương trình mũ và logarit; Phương trình lượng giác, chúng tôi trình bày thành các chương riêng để sinh viên dễ nghiên cứu.

Tài liệu được trình bày thành 6 chương:

1. Chương 1: Hàm số;
2. Chương 2: Phương trình – Hệ phương trình;
3. Chương 3: Bất đẳng thức – Bất phương trình;
4. Chương 4: Phương trình, bất phương trình vô tỉ;
5. Chương 5: Phương trình, bất phương trình mũ và logarit;
6. Chương 6: Phương trình lượng giác.

Một yêu cầu hết sức quan trọng trong giải toán là: Việc trình bày bài giải phải chặt chẽ và logic. Để rèn cho sinh viên những kỹ năng đó, chúng tôi cố gắng đưa vào tài liệu nhiều ví dụ về thực hành giải toán. Các ví dụ chiếm một khối lượng đáng kể trong tài liệu, giúp sinh viên có thể tự nghiên cứu tài liệu trước khi đến lớp. Điều này phù hợp với phương thức đào tạo theo hệ thống tín chỉ ở trường Đại học An Giang từ năm học 2009 – 2010.

Cuối mỗi chương có hệ thống bài tập đã được lựa chọn, nhiều về số lượng, đủ các mức độ từ dễ đến khó (đối với một số bài khó, chúng tôi có hướng dẫn cách giải), yêu cầu sinh viên tự giải để rèn kỹ năng tìm lời giải một bài toán. Với khối lượng quy định là 5 đơn vị học trình, tài liệu không thể đề cập hết tất cả các dạng toán hay gặp của các nội dung về phương trình, bất phương trình và hệ phương trình như một số tài liệu khác. Chúng tôi mong muốn ở sinh viên là tự tổng kết và đúc rút cho mình những kỹ năng giải toán thông qua tự giải các bài tập trong tài liệu.

Cuối cùng, chúng tôi rất mong nhận được các ý kiến đóng góp quí báu cho nội dung cũng như hình thức trình bày trong tài liệu của các bạn đồng nghiệp trong Bộ môn Toán và Hội đồng Khoa học Khoa Sư phạm cũng như các bạn sinh viên để tài liệu này có thể được hoàn chỉnh tốt hơn.

An Giang, tháng 02 năm 2009

Tác giả

MỤC LỤC

## BẢNG MỘT SỐ KÍ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT SỬ DỤNG TRONG TÀI LIỆU

$\mathbb{N}$: Tập hợp các số tự nhiên: $\{0;1;2;...\}$.

$\mathbb{Z}$: Tập hợp các số nguyên: $\{...;-2;-1;0;1;2;...\}$.

$\mathbb{Q}$: Tập hợp các số hữu tỉ: $\left\{\frac{a}{b} / a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$.

$\mathbb{R}$: Tập hợp các số thực.

$\mathbb{R}^*$: Tập hợp các số thực khác không.

$\mathbb{R}^+$: Tập hợp các số thực dương.

$\sum_1^n$: Phép lấy tổng từ 1 đến $n$.

$\{.../...\}$: Tập hợp.

$T_f$: Tập (miền) giá trị của hàm số $f$.

$\underset{x\in D}{Max} f(x)$: Giá trị lớn nhất của hàm số $f$ trên tập $D$.

$\underset{x\in D}{Min} f(x)$: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f$ trên tập $D$.

$\in$: Thuộc.

$\subseteq, \subset$: Tập con.

$\varnothing$: Tập hợp rỗng.

$\forall$: Mọi.

$\neq$: Khác.

\: Hiệu của hai tập hợp.

$\cup$: Hợp của hai tập hợp.

$\cap$: Giao của hai tập hợp.

$\bigcup_1^n$: Phép lấy hợp từ 1 đến $n$.

$\bigcap_1^n$: Phép lấy giao từ 1 đến $n$.

$\vee$: Hoặc (tuyển của hai mệnh đề).

$\Rightarrow$: Phép kéo theo, phương trình hệ quả.

$\Leftrightarrow$: Phép tương đương (khi và chỉ khi), phương trình tương đương.

Đpcm: Kết thúc chứng minh, điều phải chứng minh.

**CHƯƠNG I.** **HÀM SỐ**

# §1. KHÁI NIỆM HÀM SỐ

## 1. Định nghĩa

Giả sử $X$ và $Y$ là hai tập hợp tùy ý. Nếu có một quy tắc $f$ cho tương ứng mỗi $x \in X$ với một và chỉ một $y \in Y$ thì ta nói rằng $f$ là một hàm từ $X$ vào $Y$, kí hiệu

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Nếu $X, Y$ là các tập hợp số thì $f$ được gọi là một *hàm số*. Trong chương này chúng ta chỉ xét các hàm số thực của các biến số thực, nghĩa là $X \subseteq \mathbb{R}$; $Y \subseteq \mathbb{R}$.

$X$ được gọi là *tập xác định* (hay là *miền xác định*) của hàm số $f$. (Người ta hay dùng kí hiệu tập xác định của hàm số là $D$).

Số thực $x \in X$ được gọi là biến số độc lập (gọi tắt là biến số hay đối số). Số thực $y = f(x) \in Y$ được gọi là giá trị của hàm số $f$ tại điểm $x$. Tập hợp tất cả các giá trị $f(x)$ khi $x$ lấy mọi số thực thuộc tập hợp $X$ gọi là *tập giá trị* (*miền giá trị*) của hàm số $f$ và được kí hiệu là $T_f$, (như vậy $T_f = \{f(x) \mid x \in X\} = f(X)$).

Hiển nhiên $T_f \subseteq Y$. Chú ý rằng $T_f$ có thể là một tập hợp con thực sự của $Y$ hoặc bằng tập $Y$.

Trong nhiều trường hợp, người ta cho hàm số $f$ dưới dạng $x \mapsto f(x)$ hoặc $y = f(x)$ mà không nêu rõ tập xác định $X$ và tập hợp $Y$ chứa tập các giá trị của $f$. Khi đó, ta hiểu rằng $Y = \mathbb{R}$ và $X$ là tập hợp các số thực $x \in \mathbb{R}$ sao cho quy tắc đã cho thì $f(x)$ tồn tại.

**Ví dụ 1.** Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + 1$. Theo cách hiểu trên thì $Y = \mathbb{R}$; tập xác định của $f$ là $D = \mathbb{R}$, tập các giá trị của $f$ là $T_f = \{x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{R}\} = [1; +\infty)$.

**Ví dụ 2.** Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$. Khi đó, tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tập giá trị là $T_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

**Ví dụ 3**. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Tập xác định $D = [-1; 1]$, $T_f = [0; 1]$.

**Ví dụ 4.** Tìm tập giá trị của các hàm số

*a.* $y = f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$;

*b.* $y = f(x) = \dfrac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$.

***Giải.***

*a.* $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$. Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Giả sử $y_0 \in T_f$. Khi đó $y_0 = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$(1) có nghiệm đối với $x$.

$(1) \Leftrightarrow y_0\left(x^2 + x + 1\right) = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow \left(y_0 - 1\right)x^2 + \left(y_0 + 1\right)x + y_0 - 1 = 0$ $(2)$.

Xét $y_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow y_0 = 1$; $(2) \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $1 \in T_f$.

Xét $y_0 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow y_0 \neq 1$. Khi đó, (2) có nghiệm khi và chỉ khi

$\left(y_0 + 1\right)^2 - 4\left(y_0 - 1\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3y_0^2 + 10y_0 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \leq y_0 \leq 3.$

Vậy $T_f = [\dfrac{1}{3}; 3]$.

*b.* Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R}$. Cũng tương tự như câu *a.* $y_0$ thuộc tập giá trị của hàm số đã cho khi và chỉ khi $y_0 = \dfrac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ $(1)$ có nghiệm đối với $x$

$(1) \Leftrightarrow y_0\left(\sin x + \cos x + 2\right) = \sin x + 2\cos x + 1 \Leftrightarrow \left(y_0 - 1\right)\sin x + \left(y_0 - 2\right)\cos x = 1 - 2y_0.$

(1) có nghiệm khi và chỉ khi

$\left(y_0 - 1\right)^2 + \left(y_0 - 2\right)^2 \geq \left(1 - 2y_0\right)^2 \Leftrightarrow y_0^2 + y_0 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y_0 \leq 1.$

Vậy $T_f = \left[-2; 1\right]$.

**Ví dụ 5.** Tìm tập giá trị của hàm số $y = f(x) = \cos\dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Đặt $t = \dfrac{2x}{1 + x^2}$, xem *t* là hàm số của biến *x*, áp dụng phương pháp đã trình bày ở ví dụ *4.a.* ta được với $x \in \mathbb{R}$ thì $t \in [-1; 1]$. Miền giá trị của hàm số $y = f(x) = \cos\dfrac{2x}{1 + x^2}$ trên tập xác định $D = \mathbb{R}$ cũng chính là miền giá trị của hàm số $y = \cos t$ với $t \in [-1; 1]$. Từ đó hàm số $y = f\left(x\right) = \cos\dfrac{2x}{1 + x^2}$ có tập giá trị là đoạn $\left[\cos 1; 1\right]$.

**2. Đồ thị của hàm số**

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có tập xác định $D$, ta gọi tập hợp các điểm $\left(x; f\left(x\right)\right)$ với $\forall x \in D$ là *đồ thị* của hàm số $y = f\left(x\right)$.

Việc biểu diễn các điểm $\left(x; f\left(x\right)\right)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = f\left(x\right)$ lên mặt phẳng tọa độ *Oxy* gọi là vẽ đồ thị của hàm số.

Chú ý rằng một đường $\left(\zeta\right)$ (đường cong hoặc đường thẳng) trong mặt phẳng tọa độ chỉ có thể là đồ thị của một hàm số nào đó, nếu nó cắt một đường thẳng cùng phương với trục *Oy* tại không quá tại một điểm.

## 3. Hàm số đơn điệu

**3.1. Định nghĩa.** Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là tập *D*, khoảng $(a;b)$ là tập con của *D*. Khi đó ta có

Hàm số $y = f(x)$ gọi là *đồng biến* (hay *tăng*) trên khoảng $(a;b)$, nếu với $\forall x_1, x_2 \in (a;b),\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Hàm số $y = f(x)$ gọi là *nghịch biến* (hay *giảm*) trên khoảng $(a;b)$, nếu với $\forall x_1, x_2 \in (a;b),\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Một hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ thì ta nói *hàm số đơn điệu* trên khoảng đó.

**3.2. Một số ví dụ**

**Ví dụ 1.** Hàm số $y = x^3$ đồng biến trên toàn bộ tập xác định $\mathbb{R}$.

**Ví dụ 2.** Hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định $(-\infty;2)$; $(2;+\infty)$.

*Dựa vào định nghĩa 3.1, dễ dàng chứng minh được các tính chất sau*

**3.3. Tính chất**

**3.3.1.** Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$, thì hàm số $y = f(x) + c$ (*c* là hằng số) cũng đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$.

**3.3.2.** Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$, thì hàm số $y = kf(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$ nếu $k > 0$; hàm số $y = kf(x)$ nghịch biến (đồng biến) trên khoảng $(a;b)$ nếu $k < 0$.

**3.3.3.** Nếu hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số $y = f(x) + g(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$.

**3.3.4.** Nếu hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ không âm trên khoảng $(a;b)$ và cùng đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$, thì hàm số $y = f(x).g(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$.

*Chú ý.* Đồ thị của hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ cắt đường thẳng cùng phương với trục $Ox$ nhiều nhất tại một điểm.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$; hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$. Khi đó trên khoảng $(a;b)$, đồ thị của các hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau không quá tại một điểm.

*Áp dụng.* Tìm $x$ thỏa mãn $5^{x-2} = 3 - x$.

Để ý rằng hàm số $y = f(x) = 5^{x-2}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, còn hàm số $y = g(x) = 3 - x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Dễ thấy $x=2$ thỏa mãn phương trình đã cho. Vậy, $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

**4. Hàm số chẵn, hàm số lẻ**

**4.1. Định nghĩa.** Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định trên $D$.

Hàm số $f$ gọi là *hàm số chẵn* nếu với mọi $x\in D$, ta có $-x\in D$ và $f(-x)=f(x)$.

Hàm số $f$ gọi là *hàm số lẻ* nếu với mọi $x\in D$, ta có $-x\in D$ và $f(-x)=-f(x)$.

**4.2. Một số ví dụ**

**Ví dụ 1.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y=f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}$.

Tập xác định của hàm số là $[-1;1]$ nên dễ thấy

$\forall x, x\in[-1;1]\Rightarrow -x\in[-1;1]$ và $f(-x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}=-\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)=-f(x)$.

Vậy $f$ là hàm số lẻ.

**Ví dụ 2.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $1\in D$ nhưng $-1\notin D$, nên hàm số đã cho không phải là hàm số chẵn cũng như hàm số lẻ.

**Ví dụ 3.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y=f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$, nên $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Ta có

$\forall x\in D,\ f(-x)=\sqrt{(-x)^2+(-x)+1}+\sqrt{(-x)^2-(-x)+1}=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}=f(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

**Ví dụ 4.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y=f(x)=x^2-4x$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$, do đó $x\in D$ thì $-x\in D$.

Nhưng $f(1)=-3$; $f(-1)=5$, nên $f(1)\neq\pm f(-1)$.

Vậy, $f$ không phải hàm số chẵn cũng như hàm số lẻ.

**4.3. Đồ thị của hàm số chẵn và hàm số lẻ**

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $D$ là hàm số chẵn và có đồ thị là $(G)$. Với mỗi điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc đồ thị $(G)$, ta xét điểm đối xứng với nó qua trục tung là $M'(-x_0;y_0)$.

Từ định nghĩa hàm số chẵn, ta có $-x_0\in D$ và $f(-x_0)=f(x_0)$. Do đó

$M\in G\Leftrightarrow y_0=f(x_0)\Leftrightarrow y_0=f(-x_0)\Leftrightarrow M'\in(G)$.

Điều đó chứng tỏ $(G)$ có trục đối xứng là trục tung.

Nếu $f$ là hàm số lẻ thì lí luận tương tự, ta cũng được $(G)$ có tâm đối xứng là gốc tọa độ $O$.

**5. Hàm số tuần hoàn**

**5.1. Định nghĩa.** Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $D$ được gọi là *hàm số tuần hoàn* nếu tồn tại một số dương $T$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có

$i) x+T \in D$ và $x-T \in D$;

$ii) f(x \pm T)=f(x)$.

Số nhỏ nhất (nếu có) trong các số $T$ có các tính chất trên gọi là chu kỳ của hàm số tuần hoàn $f(x)$.

**5.2. Một số ví dụ**

**Ví dụ 1.** Các hàm số lượng giác $y=\cos x$; $y=\sin x$ là các hàm số tuần hoàn có chu kỳ $T=2\pi$.

Các hàm số lượng giác $y=\tan x$; $y=\cot x$ là các hàm số tuần hoàn có chu kỳ $T=\pi$.

**Ví dụ 2.** Chứng minh các hàm số sau đây không phải là hàm số tuần hoàn

$y=f(x)=x^4+2x^3$;

$y=g(x)=\sqrt{2x-3}$;

$y=h(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$.

***Giải.***

+ Xét $f(x)=0 \Leftrightarrow x^4+2x^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Nếu hàm số $y=f(x)=x^4+2x^3$ là hàm số tuần hoàn thì tồn tại số $T>0$ sao cho $f(0+T)=f(0)=0$, suy ra $T>0$ là nghiệm của $f(x)$, vô lý. Vậy, hàm số $f(x)$ không phải là hàm số tuần hoàn.

+ Hàm số $y=g(x)=\sqrt{2x-3}$ cũng không phải là hàm số tuần hoàn, lập luận giống như đối với hàm số $f(x)$.

+ Hàm số $y=h(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$. Giả sử hàm số $h(x)$ là hàm số tuần hoàn thì tồn tại số thực dương $T$ sao cho với $\forall x \in D \Rightarrow x \pm T \in D$. Do $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$, nên $2+T$ thuộc $D$ suy ra $2=(2+T)-T \in D$, vô lý. Vậy hàm số $h(x)$ không phải là hàm số tuần hoàn.

*Chú ý.* Chúng ta có một số dấu hiệu để nhận biết một hàm số đã cho không phải là một hàm số tuần hoàn, chẳng hạn ta có hai dấu hiệu sau.

+ Nếu một hàm số có tập xác định dạng $D=\mathbb{R}\setminus A$, với $A$ là một tập hợp hữu hạn thì hàm số đó không phải là một hàm số tuần hoàn.

+ Nếu phương trình $f(x)=k$ có nghiệm, nhưng số nghiệm là một số hữu hạn, thì hàm số

$y = f(x)$ không phải là một hàm số tuần hoàn.

**Ví dụ 3.** Cho hàm số

$$y = f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{1}{2 + \tan^2 x}, & x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Chứng minh rằng hàm số $y = g(x) = f(x) + f(ax)$ là hàm số tuần hoàn, khi và chỉ khi $a$ là một số hữu tỉ.

***Giải.***

Dễ dàng chứng minh được $f(x)$ là hàm số tuần hoàn.

*Điều kiện đủ.* Nếu $a$ là số hữu tỉ thì $a = \dfrac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0.$ Khi đó có số dương $T = q\pi$ thỏa

$$g(x + q\pi) = f(x + q\pi) + f(ax + aq\pi) = f(x) + f(ax + p\pi) = f(x) + f(ax) = g(x).$$

Chứng minh tương tự ta cũng được $g(x - q\pi) = g(x).$ Chứng tỏ hàm số $g(x)$ là hàm số tuần hoàn.

*Điều kiện cần.* Giả sử $a$ là số vô tỉ. Ta thấy $g(0) = f(0) + f(0) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1.$ Nếu tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $g(x_0) = 1$ thì $f(x_0) + f(ax_0) = 1,$ nhưng $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$ với mọi $x,$ nên suy ra $f(x_0) = f(ax_0) = \dfrac{1}{2}.$ Do đó $\tan x_0 = 0$ và $\tan(ax_0) = 0.$

Vì vậy $x_0 = m\pi$ và $ax_0 = n\pi$ với $m, n \in \mathbb{Z}.$

Do $x_0 \neq 0$ nên $a = \dfrac{ax_0}{x_0} = \dfrac{n\pi}{m\pi} = \dfrac{n}{m}$ là số hữu tỉ.

Điều này mâu thuẫn với $a$ là số vô tỉ.

Suy ra phương trình $g(x) = 1$ chỉ có một nghiệm duy nhất $x = 0,$ nên $g(x)$ không phải là hàm số tuần hoàn. Vậy, nếu $g(x)$ là hàm số tuần hoàn thì $a$ phải là số vô tỉ.

### 6. Hàm số hợp

**6.1. Định nghĩa**. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $D_1$ và $y = g(x)$ xác định trên $D_2$. Khi đó ta gọi *hàm số hợp* của hai hàm số $f$ và $g$ kí hiệu $g \circ f$ được xác định $y = (g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right]$ xác định trên tập $D = \left\{x \in D_1 \mid f(x) \in D_2\right\}.$

**6.2. Ví dụ**

Cho các hàm số $y = f(x) = \lg x$; $y = g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}.$

Xác định các hàm số hợp $f \circ g$ và $g \circ f.$

***Giải.*** Ta có $(g\circ f)(x)=g\left[f(x)\right]=g\left[\lg x\right]=\dfrac{\lg x+1}{\lg x-1}$.

Hàm số này xác định trên tập $(0;+\infty)\setminus\{10\}$.

$(f\circ g)(x)=f\left[g(x)\right]=f\left[\dfrac{x+1}{x-1}\right]=\lg\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

Hàm số này xác định trên tập $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Ví dụ này cho thấy $g\circ f\neq f\circ g$.

### 7. Hàm số ngược

**7.1. Định nghĩa.** Cho hàm số

$$\begin{aligned} f:\ & X\to Y\\ & x\mapsto y=f(x)\end{aligned}$$

nếu với mỗi giá trị $y\in T_f=f(X)$, có một và chỉ một $x\in X$ sao cho $f(x)=y$, tức là phương trình $f(x)=y$ với ẩn $x$ có nghiệm duy nhất, thì bằng cách cho tương ứng với mỗi $y\in f(X)$ phần tử duy nhất $x\in X$, ta xác định được hàm số

$$\begin{aligned} g:\ & f(X)\to X\\ & y\mapsto x=g(y)\end{aligned}$$

($x$ thỏa mãn $f(x)=y$).

Hàm số $g$ xác định như vậy được gọi là *hàm số ngược* của hàm số $f$.

Theo thông lệ, người ta thường kí hiệu đối số là $x$ và hàm số là $y$. Khi đó hàm số ngược của hàm số $y=f(x)$ sẽ được viết lại là $y=g(x)$.

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có hàm số ngược, để tìm hàm số ngược của hàm số $y=f(x)$ ta giải phương trình $f(x)=y$ ẩn $x$, phương trình này có nghiệm duy nhất $x=g(y)$, đổi kí hiệu theo cách viết thông thường ta được hàm số ngược $y=g(x)$.

*Chú ý.* Người ta thường kí hiệu hàm số ngược của hàm số $y=f(x)$ là $y=f^{-1}(x)$.

**7.2. Ví dụ**

Cho hàm số $y=x^2-2x$ trên tập xác định $[1;+\infty)$. Tìm hàm số ngược.

***Giải.***

Trên tập xác định $[1;+\infty)$ phương trình $x^2-2x=y$ có nghiệm duy nhất $x=1+\sqrt{1+y}$.

Vậy hàm số ngược cần tìm là $y=1+\sqrt{1+x}$.

*Chú ý.*

Từ định nghĩa của hàm số ngược, suy ra rằng: Tập xác định của hàm số ngược $y=f^{-1}(x)$ là tập giá trị của hàm số $y=f(x)$, tập giá trị của hàm số ngược là tập xác định của hàm số

$y = f(x)$.

Dĩ nhiên hàm số $y = f(x)$ lại là hàm số ngược của hàm số $y = f^{-1}(x)$. Vì vậy ta nói hai hàm số $y = f(x)$ và $y = f^{-1}(x)$ là hai hàm số ngược nhau.

### 7.3. Điều kiện đủ để hàm số có hàm số ngược

**7.3.1. Định lý.** Mọi hàm số đồng biến (hay nghịch biến) trên tập xác định của nó đều có hàm số ngược.

**Chứng minh.** Giả sử hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên tập xác định $D$, với mỗi $y \in f(D)$ có ít nhất $x \in D$ sao cho $f(x) = y$. Ta chứng minh rằng $x$ là duy nhất. Thật vậy, giả sử còn có $x'$ ($x' \neq x, x < x'$ chẳng hạn) sao cho $y = f(x')$, thế thì $x < x'$ sẽ kéo theo $f(x) < f(x')$ vì hàm số đồng biến, do đó $f(x) \neq f(x')$; điều này mâu thuẫn với $f(x) = y = f(x')$. Vậy theo định nghĩa, hàm số $y = f(x)$ có hàm số ngược.

Chứng minh tương tự trong trường hợp hàm số nghịch biến.

### 7.4. Đồ thị của hàm số ngược

**7.4.1. Định lý.** Trong hệ trục tọa độ Đề Các vuông góc $Oxy$, đồ thị của hai hàm số ngược nhau $y = f(x)$ và $y = f^{-1}(x)$ đối xứng nhau qua đường phân giác thứ nhất $y = x$.

**Chứng minh.** Giả sử hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $D$ và tập giá trị là $T_f = f(D)$, khi đó hàm số ngược có tập xác định là $f(D)$ và tập giá trị là $D$.

Gọi $M(a;b)$ là một điểm trên đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có $a \in D$, $b = f(a) \in f(D)$.

Theo định nghĩa của hàm số ngược, nếu $x = b$ thì $f^{-1}(b) = a$, nên $N(b;a)$ thuộc đồ thị của hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$. Hai điểm $M$ và $N$ là đối xứng với nhau qua đường phân giác thứ nhất $y = x$. Như vậy mỗi điểm thuộc đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đều đối xứng với một điểm thuộc đồ thị hàm số $y = f^{-1}(x)$ qua đường phân giác thứ nhất.

Ngược lại, ta cũng thấy rằng với mỗi điểm thuộc đồ thị của hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$ đều đối xứng với một điểm thuộc đồ thị của hàm số $y = f(x)$ qua đường phân giác thứ nhất.

Vậy, đồ thị của hai hàm số ngược nhau đối xứng với nhau qua đường phân giác thứ nhất.

*Chú ý.* Từ tính chất của đồ thị hàm số ngược ta suy ra rằng đồ thị của hai hàm số ngược nhau, nếu cắt nhau thì cắt nhau trên đường thẳng $y = x$. Từ đó ta có thể áp dụng để giải các phương trình dạng $f(x) = f^{-1}(x)$ bằng cách đưa về phương trình $f(x) = x$ hoặc $f^{-1}(x) = x$. *Chẳng hạn ta xét ví dụ sau.*

**Ví dụ.** Giải phương trình $x^3 + (3 - a^2)a = 3.\sqrt[3]{3x + (a^2 - 3)a}$ với $a \in (-2;2)$.

***Giải.*** Hàm số $y = \dfrac{x^3 + (3 - a^2)a}{3}$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên có hàm số ngược là

$y=\sqrt[3]{3x+\left(a^2-3\right)a}$. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=\dfrac{x^3+\left(3-a^2\right)a}{3}$ và

$y=\sqrt[3]{3x+\left(a^2-3\right)a}$ chính là hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=x$ và $y=\dfrac{x^3+\left(3-a^2\right)a}{3}$.

Do đó phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^3+\left(3-a^2\right)a}{3}=x\Leftrightarrow x^3-3x+\left(3-a^2\right)a=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-a^3-3(x-a)=0\Leftrightarrow (x-a)\left(x^2+ax+a^2-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=\dfrac{-a\pm\sqrt{12-3a^2}}{2} \end{array}\right.$$ (do $a\in(-2;2)$ nên $12-3a^2>0$).

(Dĩ nhiên hai hàm số $y=\dfrac{x^3+\left(3-a^2\right)a}{3}$ và $y=\sqrt[3]{3x+\left(a^2-3\right)a}$ không trùng nhau)

*Bằng phương pháp như trên chúng ta có thể giải được phương trình*

$$x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}.\ (1)$$

Thật vậy phương trình (1) có thể viết được dưới dạng $\dfrac{x^3+1}{2}=\sqrt[3]{2x-1}$

Hàm số $y=\dfrac{x^3+1}{2}$ có hàm số ngược là $y=\sqrt[3]{2x-1}$ (hai hàm số này không trùng nhau), nên phương trình (1) tương đương với $\dfrac{x^3+1}{2}=x$, từ đó ta được nghiệm $x=1$; $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

*Chú ý*. Giải phương trình (1) có thể đặt $y=\sqrt[3]{2x-1}$ suy ra $y^3+1=2x$. Khi đó, phương trình (1) được viết thành hệ phương trình $\begin{cases} x^3+1=2y \\ y^3+1=2x \end{cases}$

*Đây là hệ phương trình đối xứng ta sẽ nghiên cứu ở phần sau.*

**8. Các hàm số sơ cấp cơ bản**

*Ta gọi các hàm số sau đây là hàm số sơ cấp cơ bản*

**8.1. Hàm hằng:** $y=a, a\in\mathbb{R}$

Hàm hằng $y=a$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$, tập giá trị $T_y=\{a\}$.

**8.2. Hàm số lũy thừa:** $y=f(x)=x^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y=x^\alpha$ tùy thuộc vào $\alpha$, cụ thể ta có:

+ Nếu $\alpha$ nguyên dương thì $D=\mathbb{R}$.

+ Nếu $\alpha$ nguyên âm hoặc $\alpha=0$ thì $D=\mathbb{R}^*$.

+ Nếu $\alpha$ không nguyên thì $D = \mathbb{R}^+$.

Miền giá trị của hàm số lũy thừa cũng tùy thuộc vào $\alpha$, chẳng hạn:

· $\alpha = 2$, ta có $y = f(x) = x^2; T_f = [0; +\infty)$.

· $\alpha = 3$, ta có $y = f(x) = x^3; T_f = \mathbb{R}$.

· $\alpha = \dfrac{1}{2}$, ta có $y = f(x) = x^{\frac{1}{2}}; T_f = [0; +\infty)$.

· $\alpha = -\dfrac{1}{3}$, ta có $y = f(x) = x^{-\frac{1}{3}}; T_f = \mathbb{R}^+$.

*Chú ý.* Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ đi qua điểm $(1;1)$.

### 8.3. Hàm số mũ: $y = f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$

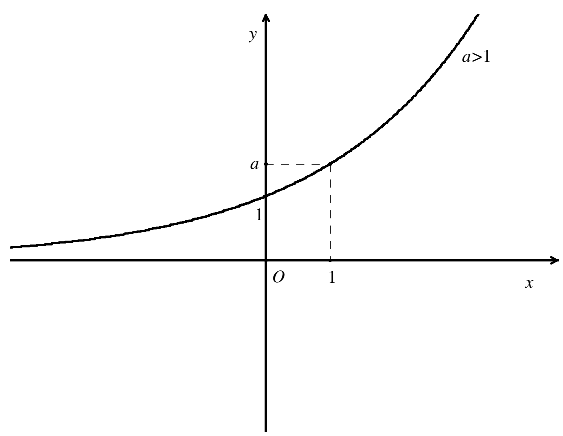
Hàm số mũ $y = a^x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$. Miền giá trị của hàm số mũ là $T_f = (0; +\infty)$.

+ Nếu $a > 1$, thì hàm số mũ đồng biến trên tập xác định.

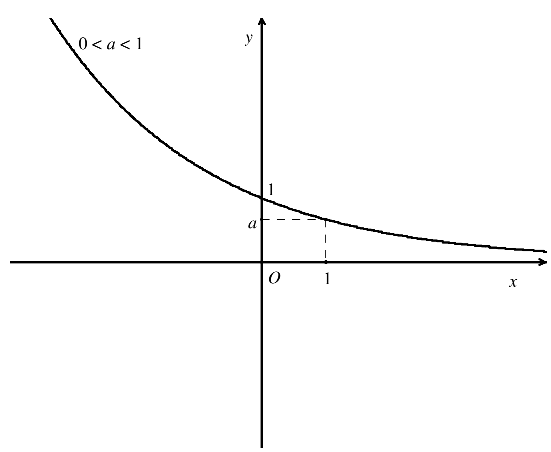
+ Nếu $0 < a < 1$, thì hàm số mũ nghịch biến trên tập xác định.

*Chú ý*. Đồ thị của hàm số mũ đi qua điểm $(0;1)$. Đồ thị của hàm số mũ như sau.

+ Đồ thị của hàm số $y = a^x, a > 1$




+ Đồ thị của hàm số $y = a^x, 0 < a < 1$



**8.4. Hàm số logarit:** $y = f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$

Hàm số logarit $y = \log_a x$ có tập xác định $D = (0; +\infty)$.

Miền giá trị của hàm số logarit là $T_f = \mathbb{R}$.

+ Nếu $a > 1$, thì hàm số logarit đồng biến trên tập xác định.

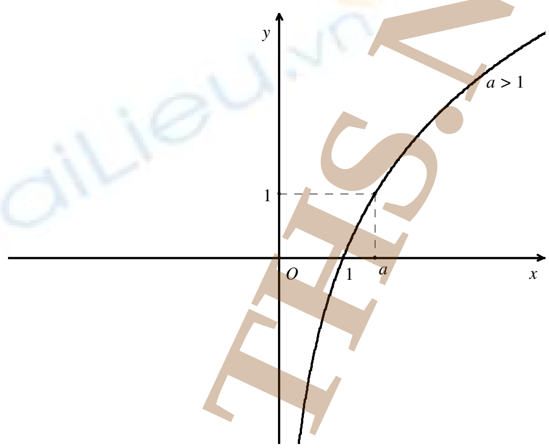
+ Nếu $0 < a < 1$, thì hàm số logarit nghịch biến trên tập xác định.

*Chú ý*. Đồ thị của hàm số logarit đi qua điểm $(1;0)$.

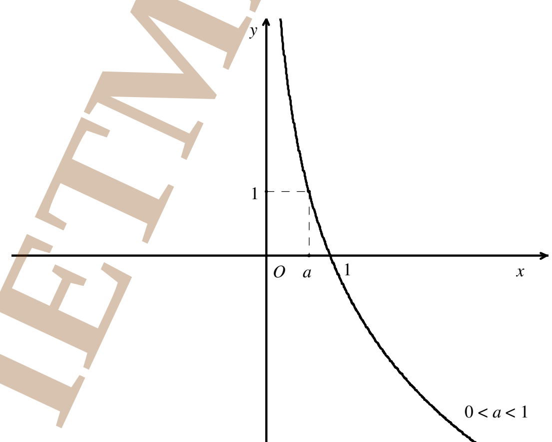
Hàm số $y = \log_a x$ và hàm số $y = a^x$ là hai hàm số ngược nhau.

Đồ thị của hàm số logarit như sau.

+ $y = \log_a x, a > 1$




+ $y = \log_a x, 0 < a < 1$




**8.5. Hàm số lượng giác**

**8.5.1. Hàm số $y = \sin x$ và hàm số $y = \cos x$**

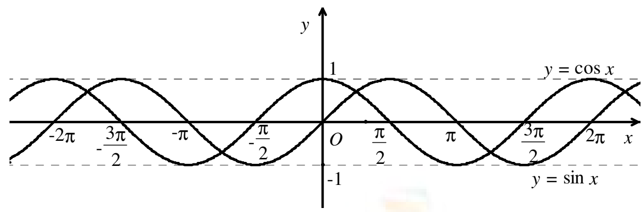
Các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ đều có tập xác định $D = \mathbb{R}$,

và miền giá trị là đoạn $[-1;1]$. Các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ đều là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.

Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ, đồng biến trên mỗi khoảng $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi), k \in \mathbb{Z};$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi), k \in \mathbb{Z}.$

Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn, đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi), k \in \mathbb{Z};$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}.$

Đồ thị của các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ như sau.




**8.5.2. Hàm số** $y = \tan x; y = \cot x$

· Hàm số $y = \tan x$

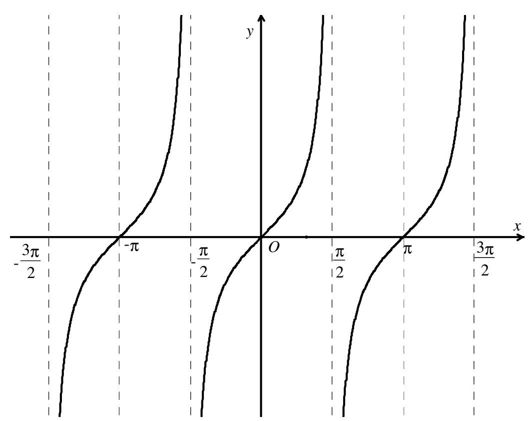
Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Miền giá trị là $\mathbb{R}.$

Hàm số $y = \tan x$ luôn luôn đồng biến trên mỗi khoảng $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}.$

Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ, và là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi.$

Đồ thị của hàm số $y = \tan x$ như sau.




· Hàm số $y = \cot x$

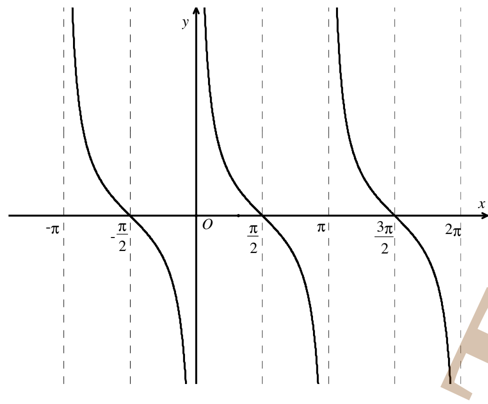
Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}.$

Miền giá trị là $\mathbb{R}.$

Hàm số $y = \cot x$ luôn luôn nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}.$

Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ, và là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi.$

Đồ thị của hàm số $y = \cot x$ như sau.




## 8.6. Hàm số lượng giác ngược

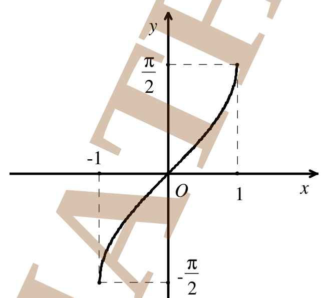
### 8.6.1. Hàm số $y = arc\sin x$

Hàm số $y = arc\sin x$ là hàm số ngược của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

Hàm số $y = arc\sin x$ có tập xác định là $D = [-1;1]$. Miền giá trị là $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

Hàm số $y = arc\sin x$ tăng trên tập xác định. Hàm số $y = arc\sin x$ là hàm số lẻ.

Đồ thị của hàm số $y = arc\sin x$ như sau.



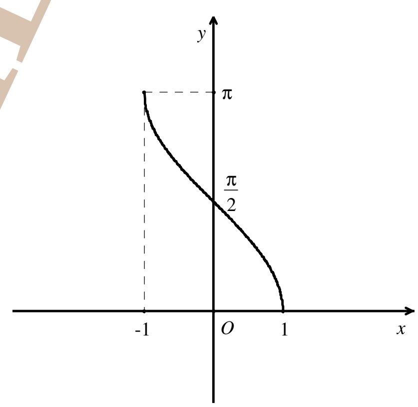

### 8.6.2. Hàm số $y = arc\cos x$

Hàm số $y = arc\cos x$ là hàm số ngược của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[0;\pi]$.

Hàm số $y = arc\cos x$ có tập xác định là $D = [-1;1]$. Miền giá trị là $[0;\pi]$.

Hàm số $y = arc\cos x$ giảm trên tập xác định.

Đồ thị của hàm số $y = arc\cos x$ như sau.




### 8.6.3. Hàm số $y = arc\tan x$

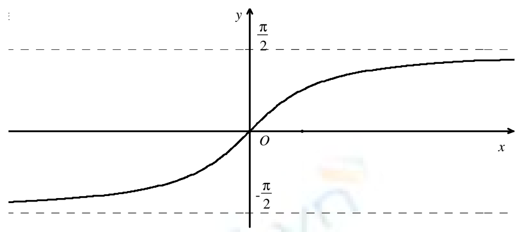
Hàm số $y = arc\tan x$ là hàm số ngược của hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$.

Hàm số $y = arc\tan x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$. Miền giá trị là $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$.

Hàm số $y = arc\tan x$ luôn luôn tăng trên tập xác định.

Hàm số $y = arc\tan x$ là hàm số lẻ.

Đồ thị của hàm số $y = arc\tan x$ như sau.




**8.6.4. Hàm số $y = arc\cot x$**

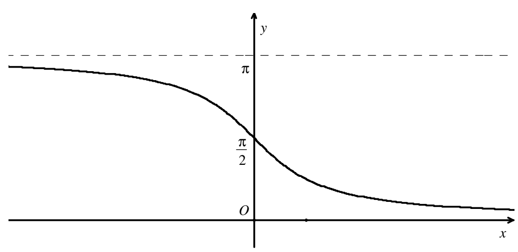
Hàm số $y = arc\cot x$ là hàm số ngược của hàm số $y = \cot x$ trên khoảng $(0;\pi)$.

Hàm số $y = arc\cot x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$. Miền giá trị là $(0;\pi)$.

Hàm số $y = arc\cot x$ luôn luôn giảm trên tập xác định.

Hàm số $y = arc\cot x$ là hàm số lẻ.

Đồ thị của hàm số $y = arc\cot x$ như sau.




Ta gọi *hàm số sơ cấp* là hàm số cho bởi một công thức duy nhất $y = f(x)$ với $f(x)$ là tổng, hiệu, tích, thương hoặc là hàm hợp của một số hữu hạn các hàm số sơ cấp cơ bản.

## §2. MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ

### 1. Trục đối xứng, tâm đối xứng của đồ thị

Chúng ta đã biết đồ thị hàm số chẵn nhận trục $Oy$ làm trục đối xứng, đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ $O$ làm tâm đối xứng. Sau đây chúng ta đưa ra dấu hiệu cho biết đồ thị của một hàm số có trục đối xứng, tâm đối xứng. (Trong phần này chúng ta chỉ xét trục đối xứng của đồ thị hàm số, cùng phương với trục tung).

**1.1. Định lý.** Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nhận đường thẳng $\Delta$ có phương trình $x = \alpha$ làm trục đối xứng khi và chỉ khi $f(2\alpha - x) = f(x)$ với mọi $x \in D$.

Thật vậy, muốn cho đường thẳng $\Delta$ có phương trình $x = \alpha$ là trục đối xứng của đồ thị $y = f(x)$ thì ắt có và đủ là nếu điểm $M(x;y)$ thuộc đồ thị thì điểm $M'$ đối xứng với điểm $M$ qua $\Delta$ cũng thuộc đồ thị. Ở đây điểm $M'$ có tọa độ $(2\alpha - x; y)$, như vậy với mọi $x \in D$

ta có $f(2\alpha - x) = f(x)$.

**Ví dụ.** Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ nhận đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$ làm trục đối xứng vì ta có $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(-x - \dfrac{b}{a}\right)^2 + b\left(-x - \dfrac{b}{a}\right) + c,$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

**1.2. Định lý.** Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận điểm $I(\alpha;\beta)$ làm tâm đối xứng khi và chỉ khi $f(2\alpha - x) = 2\beta - f(x), \forall x \in D.$

Thật vậy, muốn cho điểm $I(\alpha;\beta)$ là tâm đối xứng của đồ thị, ắt có và đủ là nếu điểm $M(x;y)$ thuộc đồ thị thì điểm $M'$ đối xứng với nó qua $I$, tức là điểm có tọa độ $M'(2\alpha - x; 2\beta - y)$ cũng thuộc đồ thị, tức là với mọi $x \in D,$ ta phải có

$$2\beta - f(x) = f(2\alpha - x).$$

*Chú ý.* Trong định lý 1.1 cho $\alpha = 0$ và trong định lý 1.2 cho $\alpha = \beta = 0,$ ta được kết quả

+ Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

+ Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

Trong thực tế muốn chứng minh đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận đường thẳng $x = x_0$ làm trục đối xứng thì ta có thể làm như sau:

· Dời hệ trục tọa độ $Oxy$ về hệ trục $IXY,$ với $I(x_0;0)$ theo công thức $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y \end{cases}$

· Lập hàm số mới bằng cách thay $x = X + x_0$; $y = Y$ vào hàm số $y = f(x)$;

· Chứng minh hàm số mới $Y = g(X)$ là hàm số chẵn để kết luận $x = x_0$ là trục đối xứng.

Tương tự như trên, muốn chứng minh $I(x_0, y_0)$ là tâm đối xứng của đồ thị $(C)$ của hàm số $y = f(x)$, ta dời hệ trục tọa độ $Oxy$ sang hệ trục $IXY,$ bằng phép đặt $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$;

Sau đó chứng minh hàm số mới $Y = g(X)$ là hàm số lẻ để kết luận điểm $I(x_0; y_0)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

**Ví dụ 1.** Chứng minh đồ thị của hàm số $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 1$ nhận đường thẳng $x = 1$ làm trục đối xứng. Từ đó tìm giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành.

***Giải.*** Đặt $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y \end{cases}$

Hàm số đã cho trở thành

$Y = (X+1)^4 - 4(X+1)^3 - 2(X+1)^2 + 12(X+1) - 1$

$\Leftrightarrow Y = X^4 - 8X^2 + 6.$

Hàm số $Y = X^4 - 8X^2 + 6$ là hàm số chẵn. Vậy đường thẳng $x = 1$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số đã cho.