Bài 26. Cho bất phương trình

$$(x+2)(x+4)(x^2+6x+10)\ge m.$$

Tìm các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Bài 27. Cho bất phương trình

$$2\cos^2 x+3m\cos x+1\ge 0.$$

Tìm các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x\in[0;\pi]$.

Bài 28. Cho bất phương trình

$$x^2+\frac{1}{x^2}+(2m+3)(x+\frac{1}{x})+2(m+2)>0.$$

Tìm các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x\ne 0$.

Bài 29. Cho bất phương trình

$$x^3-(2m+1)x^2+3(m+4)x-m-12>0.$$

Tìm các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x>1$.

Bài 30. Cho bất phương trình

$$(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)>m.$$

Tìm các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x>-1$.

Bài 31. Cho bất phương trình

$$x(x-2)(x+2)(x+4)<2m.$$

Tìm các giá trị của m để bất phương trình có nghiệm $x>0$.

Bài 32. Chứng minh rằng phương trình $4^x\left(4x^2+1\right)=1$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

CHƯƠNG IV. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

§1. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

1. Định nghĩa và các định lý

1.1. Định nghĩa

Ta gọi *phương trình vô tỉ*, mọi phương trình có chứa ẩn dưới dấu căn hay nói khác đi đó là phương trình dạng $f(x)=0$, trong đó $f(x)$ là một hàm số có chứa căn thức của biến số.

1.2. Các định lý. (*Các định lý sau làm cơ sở cho việc giải phương trình vô tỉ*).

1.2.1. Định lý. $f(x)=g(x)\Leftrightarrow\left[f(x)\right]^{2k+1}=[g(x)]^{2k+1}$

1.2.2. Định lý. $\sqrt[2k+1]{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=[g(x)]^{2k+1}$

1.2.3. Định lý. $\sqrt[2k+1]{f(x)}=\sqrt[2k+1]{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$

1.2.4. Định lý. $\sqrt[2k]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = [g(x)]^{2k} \end{cases}$

1.2.5. *Định lý.* $\sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \vee g(x) \ge 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

(Với k là số tự nhiên khác 0).

Việc chứng minh các định lý trên hết sức dễ dàng nhờ tính chất của lũy thừa và căn thức. Chúng tôi dành cho bạn đọc.

2. Các phương pháp giải phương trình vô tỉ

2.1. Phương pháp nâng lên lũy thừa

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$\sqrt{x+3} = 3x - 1 \quad (1)$$

Giải.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3} \\ 3x^2 - 7x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{2}{9} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy, phương trình có một nghiệm là $x = 1$.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = \sqrt{2x-8}$$

Giải. Để các căn bậc hai có nghĩa ta phải có điều kiện

$$\begin{cases} 2x - 8 \ge 0 \\ 7 - x \ge 0 \\ x + 3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \le x \le 7.$$

Ta có

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = \sqrt{2x-8}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-8} + \sqrt{7-x} = \sqrt{x+3}$$
$$\Leftrightarrow 2x - 8 + 2\sqrt{(2x-8)(7-x)} + 7 - x = x + 3$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-8)(7-x)} = 2$$

$\Leftrightarrow (2x-8)(7-x)=4$

$\Leftrightarrow -2x^2+22x-60=0$

$\Leftrightarrow x^2-11x+30=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=6 \end{array}\right.$

Cả hai giá trị của x đều thỏa mãn điều kiện trên. Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm $x=5; x=6.$

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\sqrt{-x^2+4x+5}+\sqrt{1-x^2}=2$$

Giải.

Điều kiện: $-1 \le x \le 1\,(*)$

Nếu bình phương hai vế của phương trình ta sẽ đưa đến phương trình bậc cao, do đó chuyển hạng tử thứ hai sang vế phải ta được

$$\sqrt{-x^2+4x+5}=2-\sqrt{1-x^2}$$

Với điều kiện $-1 \le x \le 1$ thì vế phải của phương trình trên không âm nên bình phương hai vế của phương trình ta được phương trình tương đương

$-x^2+4x+5=4-4\sqrt{1-x^2}+1-x^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=-x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ 1-x^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ 2x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Giá trị của x thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$\sqrt{x^3-1}=-x^3-4x+5$$

Giải.

$\sqrt{x^3-1}$ có nghĩa khi và chỉ khi $x \ge 1.$ Để bình phương được hai vế ta cần đặt điều kiện cho vế phải không âm, ta có

$-x^3-4x+5 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(-x^2-x-5\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow x \le 1.$

Như vậy, nghiệm của phương trình chỉ có thể $x=1$. Ta thử được phương trình nhận $x=1$ làm nghiệm. Vậy, phương trình có một nghiệm duy nhất là $x=1$.

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1} \quad (1)$$

Giải. (1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)^3 = x-1$

$\Leftrightarrow 4x+2+3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)=x-1 \quad (2)$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)=-x-1 \quad (3)$

Thay $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}$ bởi $\sqrt[3]{x-1}$ vào (3) ta được phương trình hệ quả
$\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}\sqrt[3]{x-1}=-x-1 \; (4)$

$\Leftrightarrow (x+1)(3x+1)(x-1)=-(x+1)^3$

$\Leftrightarrow x^3+x^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Thử lại thì chỉ có $x=-1$ thỏa phương trình (1). Vậy, phương trình (1) có một nghiệm là $x=-1$.

Chú ý. Tất cả các phép biến đổi đều là tương đương, chỉ từ (3) đến (4) là phép biến đổi hệ quả, tức là phép thế $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}$ bởi $\sqrt[3]{x-1}$.

Chúng ta thử phân tích để thấy rõ khi thế $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}$ bởi $\sqrt[3]{x-1}$ không phải là phép biến đổi tương đương. Để cho gọn ta đặt $u=\sqrt[3]{x+1}, v=\sqrt[3]{3x+1}$, $t=\sqrt[3]{x-1}$. Lúc đó ta có

$$u+v=t \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow (u+v)^3=t^3 \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow u^3+v^3+3uv(u+v)=t^3 \qquad (3)$$

Thay $u+v=t$ vào (3) ta được

$$u^3+v^3+3uvt=t^3 \qquad (4)$$

Chúng ta khẳng định (4) là hệ quả của (3) và phép biến đổi từ (3) đến (4) không làm mở rộng tập xác định nên (4) phải được biến đổi thành dạng

$$(u+v-t).A(x)=0$$

Nghiệm ngoại lai xuất hiện chắc chắn là nghiệm của phương trình $A(x)=0.$

Ta có

(4) $\Leftrightarrow u^3+v^3+3uvt-t^3=0$

$\Leftrightarrow (u+v-t)[(u-v)^2+(v+t)^2+(t+u)^2]=0.$

Trở lại ban đầu ta có $A(x)=[(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{3x+1})^2+(\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{x-1})^2+(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1})^2].$

Rõ ràng $x=0$ là nghiệm của phương trình $A(x)=0.$

Qua bài toán này, chúng ta thấy có những phép biến đổi phương trình tưởng như là phép biến đổi tương đương nhưng thực chất là phép biến đổi hệ quả.

2.2. Phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$4x^2-12x-5\sqrt{4x^2-12x+11}+15=0 \quad (*)$$

Giải.

Đặt $t=\sqrt{4x^2-12x+11}$

Điều kiện: $t\geq 0$

Khi đó phương trình $(*)$ trở thành

$$t^2-5t+4=0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=4 \end{array}\right.$$

Với $t=1$ ta có

$$\sqrt{4x^2-12x+11}=1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2-12x+11=1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-12x+10=0.$$

Trường hợp này phương trình vô nghiệm.

Với $t=4$ ta có

$$\sqrt{4x^2-12x+11}=4$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-12x+11=16$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-12x-5=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{14}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{14}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là $x=\dfrac{3+\sqrt{14}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{3-\sqrt{14}}{2}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{(3+x)(6-x)}=3\,(1)$$

Giải.

Cách 1.

Điều kiện: $\begin{cases} 3+x\geq 0 \\ 6-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3\leq x\leq 6$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{3+x}\geq 0 \\ v=\sqrt{6-x}\geq 0 \end{cases}$

Ta có hệ phương trình theo u và v

$$\begin{cases} u+v-uv=3 \\ u^2+v^2=9 \end{cases} (*)$$

Đặt $S=u+v, P=uv; S\geq 0; P\geq 0; S^2-4P\geq 0.$

Khi đó $(*)$ trở thành hệ

$$\begin{cases} S-P=3 \\ S^2-2P=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=S-3 \\ S^2-2S-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=-1 \\ P=-4 \end{cases} \vee \begin{cases} S=3 \\ P=0. \end{cases}$$

Chỉ có $\begin{cases} S=3 \\ P=0 \end{cases}$ thỏa điều kiện.

Với $\begin{cases} S=3 \\ P=0 \end{cases}$ thì u, v là nghiệm của phương trình

$$t^2-3t=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=3 \end{array}\right.$$

Khi đó ta có

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{3+x}=0 \\ \sqrt{6-x}=3 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3+x}=3 \\ \sqrt{6-x}=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=6 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là $x=-3$ hoặc $x=6.$

Cách 2. Đặt

$$t=\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}\geq 0$$

$$\Rightarrow t^2=9+2\sqrt{(3+x)(6-x)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3+x)(6-x)}=\frac{t^2-9}{2}$$

(1) trở thành phương trình theo biến t

$$t-\frac{t^2-9}{2}=3$$

$$\Leftrightarrow t^2-2t-3=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=3. \end{array}\right.$$

Ta nhận $t=3\Rightarrow \sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}=3,$ điều kiện $-3\leq x\leq 6.$ Bình phương hai vế của phương trình ta được $\sqrt{(3+x)(6-x)}=0 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=6.$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là $x=-3$ hoặc $x=6$.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$2\sqrt[5]{(1+x)^2}+3\sqrt[5]{1-x^2}+\sqrt[5]{(1-x)^2}=0 \quad (1)$$

Giải.

Vì $x=-1$ không là nghiệm, nên chia hai vế của (1) cho $\sqrt[5]{(x+1)^2}$ ta được phương trình

$$2+3\sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt[5]{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}=0$$

Đặt $t=\sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}}$. Ta có phương trình $t^2+3t+2=0$ (2)

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}}=-1 \\ \sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}}=-2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1-x}{1+x}=-1 \\ \frac{1-x}{1+x}=-32 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\frac{33}{31}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x=-\frac{33}{31}$.

Ví dụ 4. Cho phương trình chứa tham số m

$$2\left(x^2-2x\right)+\sqrt{x^2-2x-3}-m=0 \quad (1)$$

Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc đoạn $[4;5]$.

Giải.

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x-3},\ x\in[4;5]$

Ta có phương trình $2t^2+t+6-m=0 \Leftrightarrow 2t^2+t+6=m(2)$.

Với $x\in[4;5]$ thì $t\in\left[\sqrt{5};2\sqrt{3}\right]$. Từ đó (1) có nghiệm thuộc đoạn $[4;5] \Leftrightarrow$ (2) có nghiệm thuộc đoạn $\left[\sqrt{5};2\sqrt{3}\right] \Leftrightarrow \underset{t\in[\sqrt{5};2\sqrt{3}]}{Min} f(t)\le m\le \underset{t\in[\sqrt{5};2\sqrt{3}]}{Max} f(t)$

với $f(t)=2t^2+t+6$. Ta có $f'(t)=2t+1=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}\notin[\sqrt{5};2\sqrt{3}]$.

$f(\sqrt{5})=16+\sqrt{5},\ f(2\sqrt{3})=30+2\sqrt{3}.$

Như vậy, (2) có nghiệm thuộc đoạn $\left[\sqrt{5};2\sqrt{3}\right]$ khi và chỉ khi $16+\sqrt{5}\le m\le 30+2\sqrt{3}$.

Vậy, giá trị m cần tìm là $16+\sqrt{5}\le m\le 30+2\sqrt{3}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}\quad (1).$$

Giải.

Đặt $t=\sqrt[3]{2x-1}\Rightarrow t^3=2x-1$, (1) trở thành $x^3+1=2t\Rightarrow x^3=2t-1$. Như vậy ta có

$$\begin{cases} x^3=2t-1 \\ t^3=2x-1 \end{cases}\Rightarrow x^3-t^3=2(t-x).$$

Từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3+1=2t \\ x^3-t^3=2(t-x) \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+1=2t \\ (x-t)\left[\left(x+\dfrac{t}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}t^2+2\right]=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=x \\ x^3-2x+1=0 \end{cases}\Rightarrow x=1\vee x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là $x=1\vee x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình

$$x^2+\sqrt{x+5}=5\ (1).$$

Giải.

Đặt $t=\sqrt{x+5}\ge 0\to t^2=x+5$

$$\Rightarrow (1)\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+t=5 \\ t^2-x=5 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+t=5 \\ (x+t)(x-t+1)=0 \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=-x\ge 0 \\ x^2-x-5=0 \end{cases} \\ \begin{cases} t=x+1 \\ x^2+x-4=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 0 \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge -1 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2} \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là $x=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\vee x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

Ví dụ 7. Cho phương trình

$$\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}+\sqrt{16-x^2}=m\,(1)$$

Tìm m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm.

Giải. Đặt $t=\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\geq 0; -4\leq x\leq 4.$

$$\Rightarrow t^2=8+2\sqrt{16-x^2}\Leftrightarrow \sqrt{16-x^2}=\frac{t^2-8}{2}$$

(1) trở thành $t^2+2t-8=2m.$

Xét hàm số $t=h(x)=\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}; -4\leq x\leq 4$

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{4+x}}-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}=\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{2\sqrt{4-x}.\sqrt{4+x}}$$

$h'(x)=0\Leftrightarrow x=0; h(-4)=h(4)=2\sqrt{2}; h(0)=4.$

Như vậy $x\in[-4;4]\Rightarrow t\in[2\sqrt{2};4].$

Ta có nhận xét: Khi $t=4$ thì phương trình $t=\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}$ có một nghiệm x, khi $2\sqrt{2}\leq t<4$ thì phương trình $t=\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}$ có hai nghiệm x.

Xét hàm số $f(t)=t^2+2t-8$

$f'(t)=2t+2=0\Leftrightarrow t=-1\notin[2\sqrt{2};4].$ Hàm số $f(t)=t^2+2t-8$ đồng biến trên $[2\sqrt{2};4]$ nên đường thẳng $y=2m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(t)=t^2+2t-8$ trên $[2\sqrt{2};4]$ nhiều nhất tại đúng một điểm.

Mặt khác ta có $f(2\sqrt{2})=4\sqrt{2}; f(4)=16.$ Kết hợp với nhận xét trên thì phương trình (1) có hai nghiệm khi và chỉ khi $4\sqrt{2}\leq 2m<16$ hay $2\sqrt{2}\leq m<8.$

Ví dụ 8. Cho phương trình

$$\frac{2(1+x^2)}{1-x^2}+m\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)+2m=0$$

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải.

Điều kiện: $|x|<1.$

Đặt $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\geq 2.$ Suy ra

$$t^2=\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2=\frac{1+x}{1-x}+2+\frac{1-x}{1+x}=\frac{2(1+x^2)}{1-x^2}+2$$

$$\Rightarrow \frac{2(1+x^2)}{1-x^2}=t^2-2.$$

Phương trình (1) có dạng

$$t^2 + mt + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-t^2 + 2}{t + 2} = f(t).$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi m thuộc miền giá trị của hàm số $f(t) = \dfrac{-t^2 + 2}{t + 2}, t \ge 2.$

Ta có $f'(t) = \dfrac{-t^2 - 4t - 2}{(t+2)^2} < 0, \forall t \ge 2 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến.

$f(2) = -\dfrac{1}{2}, \lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = -\infty.$ Vậy, phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $m \le -\dfrac{1}{2}.$

2.3. Phương pháp lượng giác hóa

Trong một số trường hợp, nếu chúng ta đặt ẩn phụ bởi các hàm số lượng giác, thì việc giải quyết bài toán trở nên dễ dàng hơn. Kiến thức cần nhớ như sau.

+ Nếu trong phương trình, điều kiện của ẩn x là $-k \le x \le k, k > 0$ hay phương trình có chứa $\sqrt{k^2 - x^2}$ thì đặt $x = k\sin t, t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; hoặc đặt $x = k\cos t, t \in [0; \pi]$.

+ Nếu trong phương trình, điều kiện của ẩn x là $|x| \ge k, k > 0$ hay phương trình có chứa $\sqrt{x^2 - k^2}$ thì đặt $x = \dfrac{k}{\cos t}; t \in [0; \frac{\pi}{2}) \cup [\pi; \frac{3\pi}{2})$; hoặc đặt $x = \dfrac{k}{\sin t}, t \in [-\frac{\pi}{2}; 0) \cup (0; \frac{\pi}{2}]$.

+ Nếu trong phương trình, ẩn x nhận mọi giá trị thuộc $\mathbb{R}$ hay phương trình có chứa $\sqrt{x^2 + k^2}$ thì đặt $x = k\tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ngoài ra, tùy từng trường hợp, cũng có thể đặt $x = \cos^2 t; x = \sin^2 t, \ldots$

Sau đây ta xét một số ví dụ.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$1 + \frac{2}{3}\sqrt{x - x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x} \quad (1)$$

Giải. Điều kiện: $\begin{cases} x - x^2 \ge 0 \\ x \ge 0 \\ 1 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le 1.$

Đặt $x = \cos^2 t, t \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Khi đó phương trình (1) được biến đổi về dạng

$$1 + \frac{2}{3}\sqrt{\cos^2 t - \cos^4 t} = \sqrt{\cos^2 t} + \sqrt{1 - \cos^2 t}$$
$$\Leftrightarrow 3 + 2|\sin t \cos t| = 3(|\cos t| + |\sin t|)$$
$$\Leftrightarrow 3 + 2\sin t \cos t = 3(\cos t + \sin t).$$

Đặt $u=\sin t+\cos t, 1\le u\le \sqrt{2}, \sin t\cos t=\dfrac{u^2-1}{2}$.

Ta có phương trình $3+u^2-1=3u \Leftrightarrow u^2-3u+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1 \\ u=2. \end{array}\right.$

Ta chọn $u=1 \Rightarrow \sin t+\cos t=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(t+\dfrac{\pi}{4})=1 \Leftrightarrow \sin(t+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=k2\pi \\ t=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi k \end{array}\right. ; k\in\mathbb{Z}.$$

Vì $t\in[0;\dfrac{\pi}{2}]$, nên ta chọn $\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\cos^2 0=1 \\ x=\cos^2\dfrac{\pi}{2}=0. \end{array}\right.$

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1. \end{array}\right.$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2 \quad (1)$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-1\ge 0 \\ x-\sqrt{x^2-1}\ge 0 \\ x+\sqrt{x^2-1}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1$. Đặt $x=\dfrac{1}{\sin t}, t\in(0;\dfrac{\pi}{2})$. Khi đó vế trái của phương trình (1)

được biến đổi về dạng

$$\sqrt{\frac{1}{\sin t}-\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}}+\sqrt{\frac{1}{\sin t}+\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{\sin t}-\cot t}+\sqrt{\frac{1}{\sin t}+\cot t}$$

$$=\sqrt{\frac{1-\cos t}{\sin t}}+\sqrt{\frac{1+\cos t}{\sin t}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}}+\sqrt{\frac{2\cos^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}}$$

$$=\sqrt{\tan\frac{t}{2}}+\sqrt{\cot\frac{t}{2}}\ge 2$$

(Theo bất đẳng thức Côsi)

Do đó phương trình (1) tương đương với điều kiện để dấu bằng xảy ra

$$\sqrt{\tan\frac{t}{2}} = \sqrt{\cot\frac{t}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan\frac{t}{2} \geq 0 \\ \tan\frac{t}{2} = \cot\frac{t}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Ví dụ 3. Cho phương trình: $\sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt{x} = m$ (1)

Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm.

Giải. Điều kiện: $x \geq 0$. Đặt $x = \tan t, t \in [0; \frac{\pi}{2})$. Ta có, phương trình (1) trở thành

$$\sqrt[4]{\tan^2 t + 1} - \sqrt{\tan t} = m \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\cos t}} - \sqrt{\tan t} = m \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{\sin t}}{\sqrt{\cos t}} = m.$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{1-\sqrt{\sin t}}{\sqrt{\cos t}}, f'(t) = \dfrac{\sin t.\sqrt{\sin t} - 1}{\sqrt{2\sin t.\cos t}} < 0, \forall t \in (0; \frac{\pi}{2})$,

Suy ra hàm số luôn luôn nghịch biến trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$. Mặt khác ta có

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sqrt{\sin t}}{\sqrt{\cos t}} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin t)\sqrt{\cos t}}{\cos t\left(1+\sqrt{\sin t}\right)} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right)^2 \sqrt{\cos t}}{\left(\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}\right)\left(1+\sqrt{\sin t}\right)}$$

$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right)\sqrt{\cos t}}{\left(\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}\right)\left(1+\sqrt{\sin t}\right)} = 0,$$

và $f(0) = 1$, như vậy miền giá trị của hàm số $f(t), t \in [0; \frac{\pi}{2})$ là $T_f = (0;1]$.

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $0 < m \leq 1$.

2.4. Một số phương pháp khác

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$x + \sqrt{2-x^2} = 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

Giải. Điều kiện: $x + \sqrt{2-x^2} \geq 0$.

Ta có

$2\sqrt{x^2-2x+2} = 2\sqrt{(x-1)^2+1} \geq 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$.

$x+\sqrt{2-x^2} \le 2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+\sqrt{2-x^2}=2 \\ 2\sqrt{x^2-2x+2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Vậy, phương trình có một nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=\frac{x}{2} \quad (1)$$

Giải.

Ta có

$x+4\sqrt{x-4}=\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2$

$x-4\sqrt{x-4}=\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2$

Phương trình (1) tương đương với

$\left|\sqrt{x-4}+2\right|+\left|\sqrt{x-4}-2\right|=\frac{x}{2}$

Điều kiện: $x \ge 4$. Ta có

· $\sqrt{x-4}+2>0 \Rightarrow \left|\sqrt{x-4}+2\right|=\sqrt{x-4}+2$

· $\left|\sqrt{x-4}-2\right|=\left[\begin{array}{ll} \sqrt{x-4}-2; & x\ge 8 \\ 2-\sqrt{x-4}; & 4\le x<8. \end{array}\right.$

Vì vậy

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} 2\sqrt{x-4}=\frac{x}{2}, & x\ge 8 & (2) \\ 4=\frac{x}{2}, & 4\le x<8 & (3) \end{array}\right.$$

Giải hai phương trình (2) và (3) ta được $x=8$ là nghiệm của (1).

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x \quad (1)$$

Giải.

Điều kiện: $x>\frac{3}{2}$

$(1) \Leftrightarrow x^2-3x+2=(1-x)\sqrt{3x-2} \Leftrightarrow (x-1)\left[(x-2)+\sqrt{3x-2}\right]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ \sqrt{3x-2}=2-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} x\le 2 \\ 3x-2=(2-x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy, phương trình có một nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1 \ (1)$$

Giải.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\ge 1 \Rightarrow t^2=x^2+1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow (4x-1)t=2t^2+2x-1$

$$\Leftrightarrow 2t^2-(4x-1)t+(2x-1)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2} \text{ (loại)} \vee \ t=2x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=2x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ x^2+1=(2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ x=0 \vee x=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}.$$

Vậy, phương trình có một nghiệm duy nhất $x=\dfrac{4}{3}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1$$

Giải.

Điều kiện: $1\le x\le 7$

Ta có

$$x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1$$
$$\Leftrightarrow (x-1)-2\sqrt{x-1}+2\sqrt{7-x}-\sqrt{(x-1)(7-x)}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)-2\sqrt{x-1}+2\sqrt{7-x}-\sqrt{x-1}\sqrt{7-x}=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}-2\right)-\sqrt{7-x}\left(\sqrt{x-1}-2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}=2 \\ \sqrt{x-1}=\sqrt{7-x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=4. \end{array}\right.$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là $x=4 \vee x=5$.

Ví dụ 6. Tìm m để phương trình

$$\sqrt[4]{x^4-13x+m}+x-1=0$$

có đúng một nghiệm.

Giải.

$$\sqrt[4]{x^4-13x+m}+x-1=0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4-13x+m}=1-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ x^4-13x+m=(1-x)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ -4x^3+6x^2+9x+1=m \end{cases}$$

Xét hàm số

$$f(x)=-4x^3+6x^2+9x+1, x\le 1$$
$$f'(x)=-12x^2+12x+9$$
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1
f'		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	12

Dựa vào bảng biến thiên ta được giá trị m cần tìm là

$$\left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{3}{2} \\ m>12. \end{array}\right.$$

Ví dụ 7. Tìm m để phương trình

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-4}+5}=m \quad (1)$$

có đúng hai nghiệm.

Giải. Phương trình (1) chính là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số

$y=\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-4}+5}$ và đường thẳng $y=m.$

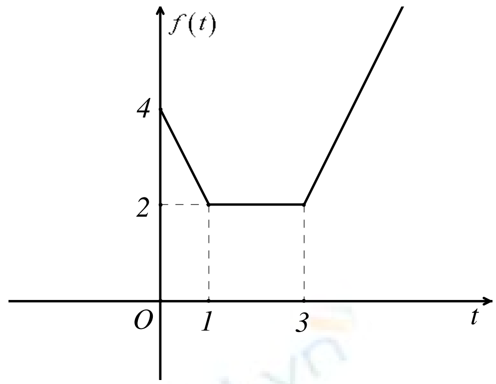
Đặt $t=\sqrt{x-4}\ge 0.$ (1) trở thành $\sqrt{t^2-2t+1}+\sqrt{t^2-6t+9}=m \Leftrightarrow |t-1|+|t-3|=m.(2)$

Ta có nhận xét rằng, ứng với mỗi $t\ge 0$ thì phương trình $t=\sqrt{x-4}$ cho ta một nghiệm $x.$ Do đó (1) có đúng hai nghiệm x khi và chỉ khi (2) có đúng hai nghiệm $t\ge 0.$

Xét hàm số $f(t)=|t-1|+|t-3|, t\ge 0$

$$f(t)=\begin{cases}-2t+4; & 0\le t<1\\ 2; & 1\le t<3\\ 2t-4; & t\ge 3\end{cases}$$

Vẽ đồ thị hàm số $f(t)$, ta được phương trình đã cho có đúng hai nghiệm khi và chỉ khi $2<m\le 4$.



Ví dụ 8. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{y}=m\\ x-\sqrt{y}=0\end{cases}$$

Giải. Điều kiện: $x\ge 0, y\ge 0$.

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{y}=m\\ x-\sqrt{y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2x^2+1}+x=m\ (1)\\ y=x^2\end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm $x\ge 0$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2x^2+1}+x;\ x\ge 0$.

$f'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}+1>0,\forall x\ge 0\Rightarrow f(x)$ đồng biến. Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m\ge 1$.

Ví dụ 9. Tìm m để phương trình

$$x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=m(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x})\ (1)$$

có nghiệm.

Giải.

Điều kiện: $0\le x\le 4$.

(1) $\Leftrightarrow (x\sqrt{x}+\sqrt{x+12})(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x})=m$

Xét hàm số $y=f(x)=(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12})(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x})=h(x).g(x)$ có tập xác định là $D=[0;4]$.

Nhận xét rằng $h(x)=x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}$ đồng biến và không âm trên D.

Hàm số $g(x)=\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}$ có $g'(x)=\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}}{2\sqrt{5-x}.\sqrt{4-x}}>0,\forall x\in D\Rightarrow$ hàm số $g(x)=\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}$ đồng biến trên D và cũng thấy rằng $g(x)$ không âm trên D.

Như vậy, hàm số $f(x)$ đồng biến trên D.

Vậy, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$f(0)\le m\le f(4)\Leftrightarrow 2\sqrt{3}(\sqrt{5}-2)\le m\le 12.$$

Ví dụ 10. Tìm m để phương trình

$$x+\frac{11}{2x}+\sqrt{4+\frac{28}{x^2}}=m$$

Có nghiệm $x>0$.

Giải.

Xét hàm số $y=f(x)=x+\dfrac{11}{2x}+\sqrt{4+\dfrac{28}{x^2}}$, ta có

$$y'=1-\frac{11}{2x^2}-\frac{14}{x^3\sqrt{1+\dfrac{7}{x^2}}}=\frac{2x^2\sqrt{x^2+7}-11\sqrt{x^2+7}-28}{2x^2\sqrt{x^2+7}}$$

$y'=0\Leftrightarrow 2x^2\sqrt{x^2+7}-11\sqrt{x^2+7}-28=0.$ Đặt $t=\sqrt{x^2+7}\ge\sqrt{7}\Rightarrow x^2=t^2-7$

Ta có $2(t^2-7)t-11t-28=0\Leftrightarrow 2t^3-25t-28=0\Leftrightarrow t=4\vee t=\dfrac{-4\pm\sqrt{2}}{2}$.

Do $t\ge\sqrt{7}$, nên ta chọn $t=4\Rightarrow x=3$.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{11}{2x}+\sqrt{4+\frac{28}{x^2}}\right)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{11}{2x}+\sqrt{4+\frac{28}{x^2}}\right)=+\infty.$$

$f(3)=\dfrac{15}{2}$. Như vậy miền giá trị của hàm số $y=x+\dfrac{11}{2x}+\sqrt{4+\dfrac{28}{x^2}}$ trên $(0;+\infty)$ là $T_f=[\dfrac{15}{2};+\infty)$. Vậy, phương trình đã cho có nghiệm $x>0$, khi và chỉ khi $m\ge\dfrac{15}{2}$.

§2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

1. Định nghĩa và các định lý

1.1. Định nghĩa

Bất phương trình vô tỉ là một bất phương trình có chứa ẩn dưới dấu căn thức. Nói khác đi đó là một bất phương trình có dạng $f(x) > 0,$ (hoặc $f(x) < 0, f(x) \geq 0, f(x) \leq 0$), trong đó $f(x)$ là hàm số có chứa căn thức của biến số.

1.2. Các định lý

1.2.1. Định lý. $\sqrt[2k+1]{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g^{2k+1}(x)$.

1.2.2. Định lý. $\sqrt[2k+1]{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq g^{2k+1}(x)$.

1.2.3. Định lý. $\sqrt[2k]{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^{2k}(x) \end{cases} \end{array}\right.$

1.2.4. Định lý. $\sqrt[2k]{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^{2k} \end{cases}$

2. Các phương pháp giải bất phương trình vô tỉ

2.1. Phương pháp nâng lũy thừa

Ví dụ 1. Giải bất phương trình

$$\sqrt{2-x} > \sqrt{7-x} - \sqrt{-3-2x}$$

Giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \\ -3-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \leq 7 \\ x \leq \dfrac{-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \dfrac{-3}{2}$ (*)

Ta có

$\sqrt{2-x} > \sqrt{7-x} - \sqrt{-3-2x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{-3-2x} > \sqrt{7-x}$

$\Leftrightarrow 2-x+2\sqrt{(2-x)(-3-2x)} - 3 - 2x > 7 - x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-x-6} > x+4$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \\ 2x^2 - x - 6 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -4 \\ 2x^2 - x - 6 > (x+4)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -\dfrac{3}{2} \\ x > 2 \end{array}\right. \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -4 \\ \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 11 \end{array}\right. \end{cases}$

$x < -4 \vee -4 \le x < -2$

$\Leftrightarrow x < -2$

Kết hợp với điều kiện (*) thì nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < -2$.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình

$$\sqrt[3]{3x^2 - 1} \ge \sqrt[3]{2x^2 + 1}$$

Giải. Lập phương hai vế của bất phương trình đã cho ta được bất phương trình tương đương

$3x^2 - 1 \ge 2x^2 + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 2 \ge 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -\sqrt{2} \\ x \ge \sqrt{2}. \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[\begin{array}{l} x \le -\sqrt{2} \\ x \ge \sqrt{2}. \end{array}\right.$

Ví dụ 3. Giải bất phương trình

$$\frac{\sqrt{x^2 - 16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} < \frac{5}{\sqrt{x-3}}$$

Giải. Bất phương trình đã cho tương đương với

$\begin{cases} x \ge 4 \\ \sqrt{x^2 - 16} + x - 3 < 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ \sqrt{x^2 - 16} < 8 - x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \le x < 8 \\ x^2 - 16 < (8 - x)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \le x < 8 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \le x < 5$

Vậy, nghiệm của bất phương trình đã cho là $4 \le x < 5$.

Ví dụ 4. Giải bất phương trình

$$\sqrt{6x+1} - \sqrt{8x} \le \sqrt{2x+3} - \sqrt{4x+2}$$

Giải. Điều kiện:

$\begin{cases} 6x + 1 \ge 0 \\ 8x \ge 0 \\ 2x + 3 \ge 0 \\ 4x + 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0 \; (*)$

Khi đó, bất phương trình đã cho tương đương với

$\sqrt{6x+1}+\sqrt{4x+2} \le \sqrt{2x+3}+\sqrt{8x}$

$\Leftrightarrow 10x+3+2\sqrt{6x+1}.\sqrt{4x+2} \le 10x+3+2\sqrt{2x+3}.\sqrt{8x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{24x^2+16x+2} \le \sqrt{16x^2+24x}$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1 \le 0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$

$x=\frac{1}{2}$ thỏa điều kiện (*). Vậy, bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 5. Giải bất phương trình

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} \le 2-\frac{x^2}{4} \quad (1)$$

Giải.

Điều kiện để các căn bậc hai có nghĩa là $-1 \le x \le 1$.

Khi đó vế phải của (1) cũng không âm, do đó bình phương hai vế của bất phương trình đã cho ta được bất phương trình tương đương

$2+2\sqrt{1-x^2} \le 4-x^2+\frac{x^4}{16}$

$\Leftrightarrow \frac{x^4}{16}+(1-x^2)-2\sqrt{1-x^2}+1 \ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^4}{16}+(\sqrt{1-x^2}-1)^2 \ge 0.$

Bất phương trình cuối luôn đúng.

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $-1 \le x \le 1$.

2.2. Phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ 1. Giải bất phương trình

$$\sqrt{5x^2+10x+1} \ge 7-2x-x^2$$

Giải.

Đặt $t=\sqrt{5x^2+10x+1} \ge 0$. Bất phương trình trở thành

$t \ge 7-\frac{t^2-1}{5}$

$\Leftrightarrow t^2+5t-36 \ge 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -9 \\ t \ge 4 \end{array}\right.$

Vì $t \ge 0$, nên ta nhận $t \ge 4$, ta có