TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
TẠP CHÍ KHOA HỌC
KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ
Tập 15, Số 6 (2018): 64-75
ISSN: 1859-3100

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
NATURAL SCIENCES AND TECHNOLOGY
Vol. 15, No. 6 (2018): 64-75

Email: tapchikhoahoc@hcmue.edu.vn; Website: http://tckh.hcmue.edu.vn

PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ CHO NGUYÊN TỬ HELI HAI CHIỀU

Nguyễn Phương Duy Anh[1], Hoàng Đỗ Ngọc Trầm[2*]
[1] *Khoa Khoa học Tự nhiên - Trường Đại học Thủ Dầu Một*
[2] *Khoa Vật lí - Trường Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh*
Ngày nhận bài: 30-01-2018; ngày nhận bài sửa: 13-3-2018; ngày duyệt đăng: 19-6-2018

TÓM TẮT

Toán tử Hamilton cho nguyên tử heli hai chiều được biểu diễn thành công dưới dạng đại số thông qua các toán tử sinh hủy lượng tử, từ đây mở ra khả năng ứng dụng phương pháp đại số để giải bài toán. Cụ thể, bộ hàm cơ sở dưới dạng đại số được đưa ra trong bài báo dưới dạng bộ hàm sóng của dao động tử điều hòa rất thuận tiện cho các tính toán giải tích các yếu tố ma trận, đồng thời vẫn mang các đặc điểm của hàm sóng nguyên tử hydro; do đó, có thể sử dụng hiệu quả cho việc giải bài toán đang xét và cả các bài toán nguyên tử hai chiều khác, ví dụ như exciton âm trong điện trường, từ trường.

Từ khóa: phương pháp đại số, hệ nguyên tử hai chiều, toán tử sinh hủy, bộ hàm cơ sở, exciton.

ABSTRACT

Algebraic method for two-dimensional helium atom

The Hamiltonian for a two-dimensional helium atom is successfully represented in the algebraic form via the quantum annihilation and creation operators. This success opens a possibility to apply algebraic methods for solving the problem. Particularly, a basic set in the algebraic form given in the paper as a set of harmonic oscillator wave functions is very useful for analytically calculating matrix elements as well as characterizes the hydrogen atom wave functions that makes the solving process effective not only for the considered problem but also for other two-dimensional problems such as negatively charged exciton in an electric/magnetic field.

Keywords: algebraic method, two-dimensional atomic systems, annihilation and creation operators, basic set, exciton.

1. Mở đầu

Nguyên tử heli hai chiều mô tả hệ vật lí thực là exciton âm trong bán dẫn lớp hay trong các hệ nguyên tử hai chiều được nghiên cứu rất tích cực gần đây cả thực nghiệm lẫn lí thuyết. Chính vì vậy, việc giải phương trình Schrödinger cho nguyên tử heli hai chiều trong điện trường, từ trường đến nay vẫn được quan tâm nghiên cứu [1, 2]. Trong công trình này, bài toán exciton âm được xét đến nhằm xây dựng phương pháp đại số giải phương trình Schrödinger không những cho bài toán đang xét mà có thể áp dụng cho các bài toán tiếp theo với sự có mặt của từ trường, điện trường.

* Email: *tramhdn@hcmup.edu.vn*

Biểu diễn đại số của phương trình Schrödinger cho dao động tử điều hòa qua các toán tử sinh hủy lượng tử đã được Dirac đưa ra và được mô tả trong các sách giáo khoa về cơ lượng tử. Biểu diễn này đã được sử dụng thành công cho bài toán exciton hai chiều trung hòa trong từ trường và nhờ đó mà áp dụng hiệu quả phương pháp toán tử FK giải phương trình Schrödinger cho hệ này [3]. Việc phát triển tiếp phương pháp đại số tính toán này cho exciton âm, một hệ phức tạp hơn là điều cần thiết. Nếu exciton trung hòa có thể xem là bài toán tương tự nguyên tử hydro trong chất rắn (bài toán một hạt) thì exciton âm chính là bài toán tương tự nguyên tử heli (bài toán hai hạt). Việc phát triển phương pháp đại số nêu trên không phải dễ dàng mà cần có sự nghiên cứu thấu đáo.

Vấn đề khó nhất khi biểu diễn đại số cho bài toán nguyên tử là thành phần tương tác Coulomb (của electron với hạt nhân) có các tọa độ dưới mẫu số dẫn đến việc không thể áp dụng hệ thức giao hoán của các toán tử sinh hủy trong các tính toán yếu tố ma trận. Vấn đề này đã được giải quyết trong công trình [4] bằng cách áp dụng phép biến đổi Levi-Civita [5] đưa bài toán nguyên tử hydro hai chiều về bài toán dao động tử hai chiều. Bài toán mà công trình [4] xét, exciton trung hòa trong từ trường đều, vì vậy được đưa về bài toán dao động tử phi điều hòa. Với bài toán nguyên tử heli, phép biến đổi Levi-Civita cũng có thể sử dụng để đưa thành phần tương tác liên quan đến tương tác electron-hạt nhân về dạng đa thức. Tuy nhiên, không thể dùng phép biến đổi này để đa thức hóa thành phần tương tác electron-electron, mà chỉ có thể sử dụng phép biến đổi Fourier như chúng tôi trình bày trong nghiên cứu này.

Việc quan trọng tiếp theo sau khi biểu diễn đại số cho phương trình Schrödinger là xây dựng bộ hàm sóng cơ sở, làm nền tảng cho việc áp dụng các phương pháp gần đúng nói chung và phương pháp toán tử FK [3, 6] nói riêng cho việc giải phương trình. Bộ hàm cơ sở cần xây dựng một mặt phải đủ đơn giản để có thể tính được công thức giải tích cho các yếu tố ma trận nhằm giảm thiểu khối lượng tính toán của máy tính. Mặt khác, bộ hàm cơ sở này phải chứa đặc điểm vật lí của hệ tương tác Coulomb nhằm có được tốc độ hội tụ cao trong các giải thuật tính toán. Dựa vào bộ hàm cơ sở cho hệ một hạt được xây dựng thành công trong công trình [4], bộ hàm cơ sở cho hệ hai hạt sẽ được được xây dựng đáp ứng hai yêu cầu vừa nêu. Tham số tự do cũng được đưa vào để tùy biến bộ hàm cơ sở và có thể ứng dụng hiệu quả phương pháp toán tử FK.

2. Mô hình dao động tử phi điều hòa cho bài toán heli hai chiều

Phương trình Schrödinger không thứ nguyên cho hệ tương tác hai electron với một hạt nhân sau khi tách khối tâm để đưa về bài toán hai hạt có dạng như sau:

$$\left\{-\frac{1}{2}\left(\nabla_1^2+\nabla_2^2\right)-\alpha_h\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}\right)-\frac{Z}{r_1}-\frac{Z}{r_2}+\frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}\right\}\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=E\,\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) \qquad (1)$$

với hệ số $\alpha_h = \dfrac{m_e / m_h}{1 + m_e / m_h}$, trong đó m_e, m_h lần lượt là khối lượng electron và hạt nhân. Với nguyên tử heli thực, tỉ lệ m_e / m_h nhỏ cho nên hệ số $\alpha_h \approx 0.00014$ này có thể bỏ qua, tuy nhiên khi xét bài toán exciton âm hai chiều khối lượng hiệu dụng của electron và lỗ trống m_e^*, m_h^* được sử dụng và do chúng có giá trị gần nhau nên hệ số α_h không thể bỏ qua, ví dụ cho trường hợp bán dẫn GaAs thì $\alpha_h \approx 0.12$, bán dẫn GaSb là $\alpha_h \approx 0.14$ [7]. Chú ý rằng với phương trình (1)-(2) cho exciton, đơn vị năng lượng và khoảng cách lần lượt ứng với năng lượng Hartree và bán kính Borh hiệu dụng.

Sử dụng phép biến đổi Levi-Civita:

$$\begin{cases} x_s = {u_s}^2 - {v_s}^2, \\ y_s = 2u_s v_s, \end{cases} \qquad s = 1,2 \ , \tag{2}$$

với $dx_s dy_s = 4({u_s}^2 + {v_s}^2) du_s dv_s$, $r_s = \sqrt{{x_s}^2 + {y_s}^2} = {u_s}^2 + {v_s}^2$ [7], ta đưa phương trình (1) về không gian (u_s, v_s) như sau:

$$\hat{H}\,\Psi(u_1, v_1, u_2, v_2) = 0, \tag{3}$$

với $\quad \tilde{H} = r_1 r_2 \left(\hat{H} - E\right),$

$$\begin{aligned} \tilde{H} = &\left({u_1}^2 + {v_1}^2\right)\left[-\frac{1}{8}\left(\frac{\partial^2}{\partial {u_2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {v_2}^2}\right) - \frac{E}{2}\left({u_2}^2 + {v_2}^2\right) - Z^*\right] \\ &+ \left({u_2}^2 + {v_2}^2\right)\left[-\frac{1}{8}\left(\frac{\partial^2}{\partial {u_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {v_1}^2}\right) - \frac{E}{2}\left({u_1}^2 + {v_1}^2\right) - Z^*\right] \\ &- \frac{\alpha_h^*}{4}\left[\left(u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} - v_1 \frac{\partial}{\partial v_1}\right)\left(u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} - v_2 \frac{\partial}{\partial v_2}\right) + \left(v_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial}{\partial v_1}\right)\left(v_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + u_2 \frac{\partial}{\partial v_2}\right)\right] \\ &+ \frac{\left({u_1}^2 + {v_1}^2\right)\left({u_2}^2 + {v_2}^2\right)}{\sqrt{\left({u_1}^2 - {u_2}^2 - {v_1}^2 + {v_2}^2\right)^2 + 4\left(u_1 v_1 - u_2 v_2\right)^2}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Phương trình (3)-(4) mô tả hai dao động tử điều hòa hai chiều tương tác với nhau. Cấu trúc phương trình đơn giản hơn so với phương trình (1) do các thành phần chính đều có dạng đa thức theo biến số động lực học; vì vậy, có thể sử dụng bộ hàm cơ sở của dao động tử điều hòa cho các tính toán. Phương pháp tính toán đại số sử dụng các toán tử sinh hủy có thể sử dụng cho bài toán này và sẽ trình bày trong mục tiếp theo. Duy nhất số hạng cuối là thành phần tương tác có biến số dưới mẫu, tuy nhiên ta có thể sử dụng tính toán đại số sau khi biến đổi Fourier như sau

$$\hat{H}_C = \frac{(u_1^2+v_1^2)(u_2^2+v_2^2)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}e^{i(u_1{}^2-v_1{}^2)t_1+2iu_1v_1t_2}e^{-i(u_2{}^2-v_2{}^2)t_1-2iu_2v_2t_2}dt_1\,dt_2\,. \tag{5}$$

Ngoài ra, ta thấy rằng bài toán đang xét bảo toàn moment động lượng theo trục Oz do toán tử

$$\hat{L}_z = \hat{L}_{1z} + \hat{L}_{2z} = -i\left(x_1\frac{\partial}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial}{\partial x_1}\right) - i\left(x_2\frac{\partial}{\partial y_2} - y_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \tag{6}$$

giao hoán với Hamiltonian. Để sử dụng trong các tính toán, ta viết toán tử này trong không gian (u_s, v_s) như sau

$$\hat{L}_z = -\frac{1}{2}i\left(u_1\frac{\partial}{\partial v_1} - v_1\frac{\partial}{\partial u_1}\right) - \frac{1}{2}i\left(u_2\frac{\partial}{\partial v_2} - v_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right). \tag{7}$$

3. Biểu diễn đại số qua các toán tử sinh hủy

Các toán tử sinh hủy được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned}
\hat{u}_s &= \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(u_s + \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial u_s}\right), \quad \hat{u}_s^+ = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(u_s - \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial u_s}\right),\\
\hat{v}_s &= \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(v_s + \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial v_s}\right), \quad \hat{v}_s^+ = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(v_s - \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial v_s}\right),
\end{aligned} \tag{8}$$

trong đó ω là tham số tự do; $s = 1, 2$. Các toán tử này thỏa mãn các hệ thức giao hoán đặc trưng của các toán tử sinh hủy: $\left[\hat{u}_s, \hat{u}_t^+\right] = \delta_{st}$, $\left[\hat{v}_s, \hat{v}_t^+\right] = \delta_{st}$, với kí hiệu delta-Kronecker δ_{st} được sử dụng. Do bài toán ta đang xét có bảo toàn moment động lượng cho nên bộ hàm cơ sở được sử dụng là nghiệm riêng của toán tử $\hat{L}_z$. Tuy nhiên, qua biểu diễn các toán tử (8), $\hat{L}_z$ không có dạng trung hòa; do vậy ta sẽ sử dụng phép biến đổi chính tắc như sau để định nghĩa các toán tử sinh hủy mới:

$$\begin{aligned}
\hat{a}_s &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{u}_s + i\,\hat{v}_s\right), \quad \hat{a}_s^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{u}_s^+ - i\,\hat{v}_s^+\right),\\
\hat{b}_s &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{u}_s - i\,\hat{v}_s\right), \quad \hat{b}_s^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{u}_s^+ + i\,\hat{v}_s^+\right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Các toán tử $\hat{a}_s, \hat{a}_s^+, \hat{b}_s, \hat{b}_s^+$ $(s = 1, 2)$ giữ nguyên các tính chất của các toán tử sinh hủy, trong đó có các hệ thức giao hoán đặc trưng:

$$\left[\hat{a}_s, \hat{a}_t^+\right] = \delta_{st}, \quad \left[\hat{b}_s, \hat{b}_t^+\right] = \delta_{st} \tag{10}$$

mà ta sẽ sử dụng trong các tính toán đại số.

Toán tử $\hat{L}_z$ qua biểu diễn đại số có dạng trung hòa như sau

$$\hat{L}_z = -\frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^+\hat{a}_1 - \hat{b}_1^+\hat{b}_1 + \hat{a}_2^+\hat{a}_2 - \hat{b}_2^+\hat{b}_2\right). \tag{11}$$

Ngoài ra, Hamiltonian có thể biểu diễn đại số qua các toán tử sinh hủy. Để minh họa, một số thành phần trong Hamiltonian được biểu diễn như sau

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial u_1^{\ 2}} + \frac{\partial^2}{\partial v_1^{\ 2}} = \omega\left(\hat{a}_1^+\hat{b}_1^+ - \hat{a}_1^+\hat{a}_1 - \hat{b}_1^+\hat{b}_1 - 1 + \hat{a}_1\hat{b}_1\right),\\
&u_1^{\ 2} + v_1^{\ 2} = \frac{1}{\omega}\left(\hat{a}_1^+\hat{b}_1^+ + \hat{a}_1\hat{b}_1 + \hat{a}_1^+\hat{a}_1 + \hat{b}_1^+\hat{b}_1 + 1\right),\\
&u_1\frac{\partial}{\partial v_1} + v_1\frac{\partial}{\partial u_1} = \frac{-i}{2}\left(\hat{a}_1^{\,2} - \hat{b}_1^{\,2} + \hat{a}_1^{+2} - \hat{b}_1^{+2}\right),\\
&u_1^{\ 2} - v_1^{\ 2} = \frac{1}{2\omega}\left(\hat{a}_1^{\,2} + \hat{b}_1^{\,2} + 2\hat{a}_1^+\hat{b}_1 + 2\hat{a}_1\hat{b}_1^+ + \hat{a}_1^{+2} + \hat{b}_1^{+2}\right),\\
&2u_1v_1 = \frac{-i}{2\omega}\left(\hat{a}_1^{\,2} - \hat{b}_1^{\,2} + 2\hat{a}_1\hat{b}_1^+ - 2\hat{b}_1\hat{a}_1^+ + \hat{b}_1^{+2} - \hat{a}_1^{+2}\right).
\end{aligned} \tag{12}$$

Với biểu diễn (12) ta có thể viết Hamiltonian của bài toán dưới dạng đại số. Ta thấy các toán tử đều nằm dưới dạng đa thức của các toán tử sinh hủy, tuy nhiên còn có các toán tử trong thành phần của toán tử (5) có dạng hàm e-mũ sau

$$\hat{O}_1 = e^{i\,t_1(u_1^{\ 2} - v_1^{\ 2}) + i\,t_2(2u_1v_1)}. \tag{13}$$

Toán tử này có thể biểu diễn qua toán tử sinh hủy và đưa về dạng chuẩn thuận tiện cho tính toán đại số như trình bày trong Phụ lục. Chú ý rằng các toán tử (12), (13) ta viết cho trường hợp chỉ số $s = 1$ cho tọa độ u_1, v_1; trường hợp chỉ số $s = 2$ cho tọa độ u_2, v_2, ta có thể viết hoàn toàn tương tự.

4. Bộ hàm cơ sở dạng đại số

Tiếp theo, bộ hàm cơ sở dạng đại số sẽ được xây dựng. Các bộ hàm cơ sở này là hàm sóng riêng của hệ hai dao động tử điều hòa hai chiều (bốn bậc tự do). Ngoài ra, bộ hàm cơ sở này cũng được xây dựng ứng với giá trị xác định của moment động lượng toàn phần. Để đạt được mục đích đó, các hàm số phải là hàm riêng chung của các toán tử trung hòa $\hat{a}_1^+\hat{a}_1, \hat{b}_1^+\hat{b}_1, \hat{a}_2^+\hat{a}_2, \hat{b}_2^+\hat{b}_2$ và của toán tử $\hat{L}_z$.

Hàm sóng của dao động tử điều hòa có dạng

$$|\, j_1, j_2, j_3, j_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{j_1!\, j_2!\, j_3!\, j_4!}}(\hat{a}_1^+)^{j_1}(\hat{b}_1^+)^{j_2}(\hat{a}_2^+)^{j_3}(\hat{b}_2^+)^{j_4}\,|0(\omega)\rangle \tag{14}$$

với j_1, j_2, j_3, j_4 là các số nguyên không âm; trạng thái chân không được định nghĩa

$$\hat{a}_1|0(\omega)\rangle = 0, \quad \hat{b}_1|0(\omega)\rangle = 0, \quad \hat{a}_2|0(\omega)\rangle = 0, \quad \hat{b}_2|0(\omega)\rangle = 0. \tag{15}$$

Dễ dàng kiểm tra được (14) là hàm riêng của $\hat{L}_z$ ứng với trị riêng

$$m = \frac{1}{2}(-j_1 + j_2 - j_3 + j_4)\,. \quad (16)$$

Từ (16) ta có

$$2m = -j_1 + j_2 - j_3 + j_4 = -\left(j_1 + j_3\right) + j_2 + j_4 \,, \quad (17)$$

suy ra $j_1 + j_2 + j_3 + j_4 = 2m + 2(j_1 + j_3)$ cũng là số chẵn, cho phép ta đặt:

$$2n = j_1 + j_3 + j_2 + j_4 \quad (18)$$

với n là số nguyên không âm. Ta chọn bộ hàm cơ sở (14) với hai số lượng tử n, m do đó trong bốn chỉ số lượng tử j_1, j_2, j_3, j_4 chỉ còn hai chỉ số độc lập. Chọn hai chỉ số lượng tử còn lại là j_1, j_2 ta có

$$j_3 = n - m - j_1\,, \qquad j_4 = n + m - j_2\,. \quad (19)$$

Bộ hàm cơ sở (14) được viết lại như sau

$$\left|n, m, j_1, j_2\right\rangle = N_{nm\,j_1 j_2} (\hat{a}_1^+)^{j_1} (\hat{b}_1^+)^{j_2} (\hat{a}_2^+)^{n-m-j_1} (\hat{b}_2^+)^{n+m-j_2} \left|0(\omega)\right\rangle, \quad (20)$$

với hệ số chuẩn hóa

$$N_{nm\,j_1\,j_2} = \frac{1}{\sqrt{j_1!\,j_2!\left(n-m-j_1\right)!\left(n+m-j_2\right)!}}\,.$$

Các chỉ số lượng tử n, m, j_1, j_2 có miền xác định như sau

$n = 0, 1, 2, ...;\quad m = -n, -n+1, ..., n-1, n\,;$

$j_1 = 0, 1, ..., n-m\,;\quad j_2 = 0, 1, ..., n+m\,,$

hay viết ngắn gọn

$$0 \le j_1 \le n - m,\; 0 \le j_2 \le n + m,\; |m| \le n\,. \quad (21)$$

Bộ hàm cơ sở (20) có thể sử dụng cho việc giải phương trình Schrödinger bằng phương pháp đại số. Bộ hàm này không chỉ sử dụng cho bài toán nguyên tử heli mà còn cho các bài toán phức tạp hơn như heli trong từ trường, điện trường. Đặc biệt tham số tự do ω cho phép chúng ta thay tùy biến bộ hàm cơ sở để phù hợp với các bài toán khác nhau.

5. Kết luận

Trong bài báo này, phương trình Schrödinger cho nguyên tử heli hai chiều được biểu diễn đại số qua các toán tử sinh hủy. Bộ hàm cơ sở cũng được xây dựng dưới dạng đại số thuận tiện cho tính toán. Bộ hàm này vừa là hàm sóng của hệ hai dao động tử điều hòa hai chiều rất thuận tiện cho tính toán, đồng thời vẫn mang đặc điểm vật lí của hàm sóng nguyên tử hydro hai chiều làm cho việc vận dụng các phương pháp giải khác nhau sau này có hiệu quả cao. Chú ý là trong công trình này mô hình nguyên tử heli hai chiều có thể vận dụng cho bài toán thực là exciton âm hai chiều. Việc áp dụng để giải phương trình Schrödinger cho exciton âm hai chiều trong từ trường sẽ trình bày trong bài báo tiếp theo.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

❖ ***Lời cảm ơn:*** *Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển Khoa học và Công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) cho đề tài mã số 103.01-2016.90 và Trường Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh cho đề tài cơ sở mã số CS2016.19.13.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] W. Becken et al, "The helium atom in a strong magnetic filed," *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **32**, pp.1557-1584, 1999.

[2] B. J. Falaye et al, "An electron of helium atom under a high-intensity laser field," *Laser Phys.* **27**, pp.026004, 2017.

[3] I. D. Feranchuk, A. Ivanov, Van-Hoang Le and A. Ulyanhenkov, *Non Perturbative Description of Quantum Systems*, Springer – Switzerland, 2015.

[4] Ngoc-Tram Hoang-Do, Dang-Lan Pham and Van-Hoang Le, "Exact numerical solutions of the Schrödinger equation for a two-dimensional exciton in a homogeneous magnetic field of arbitrary strength," *Physica B* **423**, pp.31-37, 2013.

[5] T. Levi-Civita, *Opere Matematiche* **2**, pp.1901-1907, 1956.

[6] I. D. Feranchuk, L. I. Komarov, "The operator method of the approximate solution of the Schrödinger equation," *Phys. Lett. A* **88** (5), pp.211-214, 1982.

[7] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics 7th edition*, page 217, John Wiley & Sons, 1996.

[8] V. Alan Kostelecky et al, "Baker-Campbell_Hausdorff relations for supergroups," *J. Math. Phys.* **27** (5), May, 1986.

PHỤ LỤC

Dạng chuẩn của toán tử e mũ $\hat{O}_1 = e^{i t_1 (u_1^2 - v_1^2) + i t_2 (2u_1 v_1)}$

Trong phần này, chúng tôi trình bày các tính toán để đưa toán tử dạng hàm e mũ về dạng chuẩn, là hình thức biểu diễn toán dưới dạng dạng tích của các toán tử sinh hủy, trong đó toán tử sinh nằm về bên trái, toán tử hủy nằm về bên phải và toán tử trung hòa ở giữa, thuận lợi cho việc tính toán đại số khi sử dụng công thức (15). Khác với các toán tử có dạng đa thức, chỉ cần sử dụng tính chất giao hoán tử (10) để chuyển về dạng chuẩn, các toán tử có dạng hàm e mũ thì quy trình phức tạp hơn.

Trước hết ta viết toán tử $\hat{O}_1$ trong biểu diễn toán tử sinh hủy (9)**:**

$$\hat{O}_1(t) = \exp\left[t\left(-\hat{A}_1^+ - 2i\hat{K}_1 + \hat{A}_1 \right) \right], \tag{P1}$$

với tham số mới $t = \sqrt{t_1^2 + t_2^2} / 2\omega$ và các toán tử mới được định nghĩa như sau:

$$\hat{A}_1 = \frac{it_1 + t_2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} \hat{a}_1^2 + \frac{it_1 - t_2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} \hat{b}_1^2,$$