BÀI 4

HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG

Lợi nhuận tối đa

Cho hàm lợi nhuận của một công ty đối với một sản phẩm là

$$\Pi = R – C = PQ - wL - rK$$

Trong đó Π là lợi nhuận, R là doanh thu, C là chi phí, L là lượng lao động, w là tiền lương cho một lao động, K là tiền vốn, r là lãi suất của tiền vốn, P là đơn giá bán sản phẩm.

Ví dụ: Giả sử Q là hàm sản xuất Cobb – Douglas dạng $Q = L^{1/3}. K^{1/3}$

Xét trường hợp w = 1, r = 0,02, P = 3.

Khi đó hàm lợi nhuận trở thành: Π = 3L1/3. K1/3 – L – 0,02K

Tìm L, K để lợi nhuận đạt tối đa?

(Gợi ý: sử dụng đạo hàm riêng cấp 1 và đạo hàm riêng cấp 2 cho hàm Π)

MỤC TIÊU BÀI HỌC

- Nắm được các khái niệm về hàm nhiều biến, đạo hàm riêng, vi phân, cực trị hàm nhiều biến.
- Làm được bài tập về hàm nhiều biến, đặc biệt là phần cực trị hàm nhiều biến.

CẤU TRÚC NỘI DUNG

4.1. GIỚI HẠN VÀ TÍNH LIÊN TỤC HÀM SỐ

4.1.1. KHÁI NIỆM HÀM NHIỀU BIẾN

a. Khái niệm

- **Định nghĩa:** Cho D (khác rỗng) là một tập con của không gian $\mathbb{R}^n$. Ta gọi ánh xạ f: D $\to$ $\mathbb{R}^n$ xác định bởi

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \in D \mapsto u = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}$$

  là một hàm n biến số xác định trên D. Điểm $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ nên ta có thể viết hàm u = f(M), M $\in$ D. Tập D gọi là miền xác định.

  Miền giá trị của hàm số u = f(M) là tập tất cả các giá trị của hàm số khi điểm M biến thiên trong miền các định D.

- **Ví dụ:** Hàm số 2 biến số $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Miền xác định D là mặt tròn $x^2 + y^2 \le 1$, tâm O bán kính 1. Miền giá trị là đoạn [0;1].

4.1.1. KHÁI NIỆM HÀM NHIỀU BIẾN (tiếp theo)

Đồ thị của hàm hai biến

Định nghĩa: Đồ thị của hàm số z = z(x,y) là tập hợp tất cả các điểm M(x,y,z) trong không gian $\mathbb{R}^3$, trong đó (x,y) là toạ độ của điểm M thuộc miền xác định D và z là giá trị của hàm số tại điểm đó. Đồ thị của hàm hai biến số là một mặt trong không gian ba chiều $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ: Đồ thị của hàm số $z = z(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ là nửa mặt cầu có tâm tại gốc toạ độ O và bán kính R = 1, nằm trong nửa không gian z ≥ 0.

4.1.2. GIỚI HẠN HÀM NHIỀU BIẾN

- **Định nghĩa:** Ta nói dãy điểm $M_n(x_n,y_n)$ dần tới điểm $M_0(x_0,y_0)$, viết $M_n(x_n,y_n) \to M_0(x_0,y_0)$ hay $M_n \to M_0$ nếu

$$\lim_{n\to\infty} d(M_n,M_0) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0.$$

- **Định nghĩa:** Cho hàm z = f(x,y) xác định trong lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0,y_0)$, có thể trừ tại M_0. Ta nói hàm f(x,y) có giới hạn là L khi M(x,y) dần đến $M_0(x_0,y_0)$ khi và chỉ khi mọi dãy điểm $M_n(x_n,y_n) \to M_0$ ta đều có

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = L$. Ta viết $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ hay $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = L$

Ví dụ: Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} \dfrac{\ln(1+x^2+y^4)}{x^2+y^4}$

Khi $(x,y) \to (0;0)$ thì $t = x^2 + y^4 \to 0$ nên $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} \dfrac{\ln(1+x^2+y^4)}{x^2+y^4} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$

4.1.2. GIỚI HẠN HÀM NHIỀU BIẾN (tiếp theo)

Tính chất của giới hạn

Định lý: Giả sử f(M), g(M) là hai hàm số có giới hạn khi $M \to M_0$. Khi đó

$$\lim_{M\to M_0}\left[f(M)\pm g(M)\right]=\lim_{M\to M_0} f(M)\pm\lim_{M\to M_0} g(M)$$

$$\lim_{M\to M_0}\left[kf(M)\right]=k\lim_{M\to M_0} f(M) \quad \text{(k là hằng số)}$$

$$\lim_{M\to M_0}\left[f(M)g(M)\right]=\lim_{M\to M_0} f(M).\lim_{M\to M_0} g(M)$$

$$\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)}{g(M)}=\frac{\lim\limits_{M\to M_0} f(M)}{\lim\limits_{M\to M_0} g(M)} \quad \text{nếu} \quad \lim_{M\to M_0} g(M)\neq 0$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Giới hạn của dãy điểm $\left\{M_n\left(\frac{1}{n^2},\frac{2n-3}{n}\right)\right\}$ khi $n \to \infty$ là:

A. (0,0)

B. (0,-2)

C. (0,2)

D. không có giới hạn

- Đáp án đúng là: (0,2)
- Vì: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0;\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n}=2$

  $\Rightarrow M_n \to (0;2)$