BÀI 2

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

TÌNH HUỐNG KHỞI ĐỘNG

Lựa chọn tối ưu trong kinh tế

Gọi P là đơn giá,

$Q = Q(P)$ là hàm sản lượng,

$R = P.Q$ là hàm doanh thu,

$C = C(Q)$ là hàm chi phí,

$\Pi = R - C$ là hàm lợi nhuận.

Trong kinh tế ta thường giải các bài toán sau:

- Tìm P để sản lượng Q đạt tối đa (cực đại).
- Tìm P hoặc tìm Q để doanh thu R đạt tối đa.
- Tìm P hoặc tìm Q để lợi nhuận Π đạt tối đa.
- Tìm Q để chi phí C đạt tối thiểu (cực tiểu).

Ví dụ: Cho hàm cầu $Q = 300 – P$, hàm chi phí $C = Q^3 – 19Q^2 + 333Q + 10$. Tìm Q để lợi nhuận lớn nhất?

MỤC TIÊU BÀI HỌC

- Hiểu được khái niệm đạo hàm, vi phân của hàm số.
- Giải được các bài tập về đạo hàm, vi phân.
- Biết vận dụng linh hoạt các định lý, khai triển và các quy tắc trong giải bài tập.
- Khảo sát tính chất, dáng điệu của các hàm cơ bản.
- Hiểu ý nghĩa hình học cũng như ý nghĩa thực tiễn của đạo hàm và vi phân.

CẤU TRÚC NỘI DUNG

2.1. ĐẠO HÀM

2.1.1. KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

- Cho hàm số f(x) xác định trong (a,b) và $x_0 \in$ (a,b) . Nếu tồn tại giới hạn của $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ khi $x \to x_0$ thì giới hạn ấy được gọi là đạo hàm của hàm y = f(x) tại điểm x_0 kí hiệu là $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$.

  Đặt: $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ ta được: $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

- Về mặt hình học, đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm x_0 là hệ số góc của đường tiếp tuyến của đồ thị hàm số y= f(x) tại điểm $M_0(x_0,f(x_0))$. Nó đo tốc độ biến thiên của hàm f(x) tại x_0. Phương trình tiếp tuyến tại điểm x_0 là $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm số f(x) = sinx

2.1.2. CÁC PHÉP TOÁN VỀ ĐẠO HÀM

Nếu các hàm số u(x), v(x) có các đạo hàm tại x thì:

u(x) + v(x) cũng có đạo hàm tại x và (u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x).

u(x).v(x) cũng có đạo hàm tại x và: (u(x).v(x))' = u'(x).v(x) + u(x).v'(x).

$\frac{u(x)}{v(x)}$ cũng có đạo hàm tại x, trừ khi v(x) = 0 và: $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{v^2(x)}$

Nếu hàm số u = g(x) có đạo hàm theo x, hàm số y = f(u) có đạo hàm theo u thì hàm số hợp y = f(g(x)) có đạo hàm theo x và y'(x) = f'(u)u'(x).

2.1.3. BẢNG ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN

Ta có bảng các đạo hàm cơ bản sau:

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1},\ \alpha \in \mathbb{R} \qquad \left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a \qquad \left(e^{x}\right)' = e^{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Đạo hàm của hàm f(x) = arccosx bằng:

A. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ C. $\dfrac{1}{1-x^2}$

B. $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ D. $-\dfrac{1}{1-x^2}$

- Đáp án đúng là: B. $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- Vì: $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

2.2. VI PHÂN