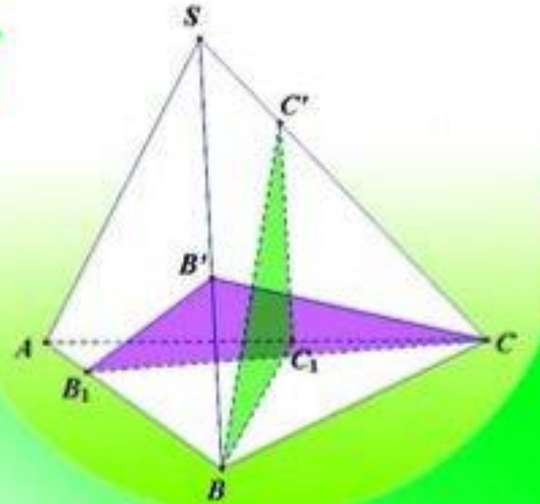
LÊ QUANG ĐIỆP
*Nhóm giáo viên chuyên toán Trung tâm luyện thi chất lượng cao Star*

# CẤU TRÚC ĐỀ THI ĐẠI HỌC VÀ BỘ ĐỀ TUYỂN SINH

# MÔN TOÁN

**- ÔN LUYỆN THI TỐT NGHIỆP PTTH - ĐẠI HỌC CAO ĐẲNG -**

**MỚI NHẤT**




NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

# *Lời nói đầu*

***Làm sao để mình cảm thấy tự tin, vững vàng khi bước vào các kỳ thi?*** chắc các bạn học sinh rất băn khoăn và trăn trở với câu hỏi này khi kỳ thi tuyển sinh đại học, cao đẳng đang tới gần. Các bạn học sinh rất cần một tài liệu tin cậy, phong phú để ôn luyện và kiểm tra kiến thức của mình để tham gia các kỳ thi một cách tốt nhất.

Nhằm đáp ứng nhu cầu đó, cuốn sách **Cấu trúc đề thi Đại Học & Bộ đề tuyển sinh** xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc, nhằm góp một phần nhỏ sự chuẩn bị kiến thức để các bạn được tự tin khi bước vào kỳ thi. Với cấu trúc của cuốn sách như sau:

***Phần I:*** Lý thuyết ôn tập nhanh, được tác giả biên soạn theo cấu trúc đề thi của Bộ Giáo Dục & Đào tạo. Nhằm giúp các bạn đọc hệ thống lại các kiến thức và kỹ năng giải toán một cách đơn giản và hiệu quả nhất.

***Phần II:*** Giới thiệu 15 đề thi đại học, cao đẳng môn toán khối A, B, D từ năm 2008 tới 2011 của bộ giáo dục và đào tạo.

***Phần III:*** Để tăng thêm sự đa dạng và phong phú của đề thi theo phương pháp ra đề mới của Bộ Giáo Dục & Đào tạo, tác giả giới thiệu tới bạn đọc 15 đề thi mà do tác giả biên soạn và chắt lọc rất kỹ càng nhiều dạng toán được giới thiệu tới bạn đọc.

***Phần IV:*** Đáp án và thang điểm chi tiết. Trong phần giải tác giả đã chọn ra nhiều cách giải khác nhau với mong muốn có sự phong phú và đa dạng về cách giải cho bạn, các bạn có thêm tham khảo thêm và rút ra kinh nghiệm cho mình.

Để sử dụng cuốn sách được tốt và hiệu quả nhất, đề nghị các bạn đọc hãy tự mình làm hết khả năng sau đó mới tham khảo cách giải và tự chấm điểm cho mình bằng cách tham khảo thang điểm mà tác giả đưa ra. Nếu mình có sự chuẩn bị tốt về kiến thức thì nhìn lại đề thi đại học các năm sẽ không có gì là quá khó khăn.

Mặc dù đã dành nhiều thời gian và tâm huyết cho cuốn sách, xong không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được sự góp ý của bạn đọc để lần tái bản sau được hoàn thiện và đầy đủ hơn.

**Trân trọng !**
**Tác Giả.**

## PHẦN I. CẤU TRÚC ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG.

### I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH *( 7,0 điểm ).*

**Câu I** *( 2,0 điểm ).*

1. **Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.**

- **Dạng đồ thị của hàm bậc ba:** $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \left(a \neq 0\right)$

| **Tính chất.** | $a > 0$ | $a < 0$ |
|---|---|---|
| Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt. | f(x)=x^3+3x^2-4 | f(x)=-x^3+3x^2-4 |
| Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm. | f(x)=x^3+3x^2+4x+2 | f(x)=-x^3+3x^2-4x+2 |
| Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép. | f(x)=x^3-3x^2+3x+1 | f(x)=-x^3-3x^2-3x+1 |

- **Dạng đồ thị hàm trùng phương:** $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$

| **Tính chất.** | $a > 0$ | $a < 0$ |
|---|---|---|
| Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt. | f(x)=x^4-2x^2+2 | f(x)=-x^4+2x^2+2 |
| Phương trình $y' = 0$ có một nghiệm. | f(x)=x^4+2x^2+2 | f(x)=-x^4-2x^2+2 |

- **Dạng đồ thị hàm nhất biến:** $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $TXD: D = R \setminus \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\}$

| **Tính chất.** | $ad - bc > 0$ | $ad - bc < 0$ |
|---|---|---|
| Phương trình đạo hàm $y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ | f(x)=(x-1)/(2x-1)<br>f(x)=1/2<br>x=0.5 | f(x)=(x+1)/(2x-1)<br>f(x)=1/2<br>x=0.5 |

## 2. Những bài toán liên quan.

**Dạng 1. Sự tương giao của hai đồ thị.**
Cho hàm số : $y = f\left(x\right)$ $\left(C_1\right)$ và $y = g\left(x\right)$ $\left(C_2\right)$

**a. Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ là:** $f\left(x\right) = g\left(x\right)$ $\left(*\right)$

- $\left(*\right)$ có 1 nghiệm $x_0 \Leftrightarrow \left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ cắt nhau tại điểm $M\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$ ( tiếp xúc nhau tại điểm $M\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$ )
- $\left(*\right)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ không có điểm chung.
- $\left(*\right)$ có k nghiệm $x_0 \Leftrightarrow \left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ cắt nhau tại k điểm.

**b.Sự tiếp xúc của $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$.**

$\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ tiếp xúc với nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} f\left(x\right) = g\left(x\right) \\ f'\left(x\right) = g'\left(x\right) \end{cases}$ có nghiệm là $x_0$. ( $x_0$ là hoành độ tiếp xúc ).

**Dạng 2. Phương trình tiếp tuyến.**
Cho hàm số : $y = f\left(x\right)$ $\left(C\right)$.

**a. Phương trình tiếp tuyến tại.**
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $\left(C\right)$ tại $M\left(x_0;y_0\right)$ có dạng : $y = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + y_0$.
$f'\left(x_0\right)$ là hệ số góc của tiếp tuyến.

**b. Phương trình tiếp tuyến đi qua.**
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $\left(C\right)$ đi qua $N\left(x_1;y_1\right)$ có dạng : $y = k\left(x - x_1\right) + y_1$ $\left(\Delta\right)$
. k là hệ số góc của tiếp tuyến. Để $\left(\Delta\right)$ là tiếp tuyến của $\left(C\right) \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(x\right) = k\left(x - x_1\right) + y_1 \\ f'\left(x\right) = k \end{cases}\left(1\right)$ có nghiệm.
Giải hệ $\left(1\right)$ tìm k rồi thay k vào $\left(\Delta\right)$ đó là tiếp tuyến cần tìm.

**c. Phương trình tiếp tuyến song song.**
Tiếp tuyến của hàm số $\left(C\right)$ song song với đường thẳng $\left(\Delta\right) y = k_\Delta x + b$ nên có $f'\left(x_0\right) = k_\Delta$. Giải tìm $x_0$ rồi thay vào hàm số $\left(C\right)$ tìm $y_0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm.

**d. Phương trình tiếp tuyến vuông góc.**
Tiếp tuyến cuả hàm số $\left(C\right)$ vuông góc với đường thẳng $\left(d\right) y = k_d x + b$ nên có $f'\left(x_0\right).k_d = -1$. Giải tìm $x_0$ rồi thay vào hàm số $\left(C\right)$ tìm $y_0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm.

**Dạng 3. Tìm m để hàm đồng biến, nghịch biến.**

- Hàm bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ TXĐ: $D = R$

$y' = Ax^2 + Bx + C$

- Hàm số đồng biến trên D ( hàm tăng trên tập ) $\Leftrightarrow y' \geq 0\ \forall x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ \Delta \geq 0\ \left(\Delta' \geq 0\right) \end{cases}$.

$y' = 0$ tại một số hữu hạn $x_i$

- Hàm số nghịch biến trên D ( hàm nghịch trên tập ) $\Leftrightarrow y' \leq 0\ \forall x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} A < 0 \\ \Delta \leq 0\ \left(\Delta' \leq 0\right) \end{cases}$.

$y^{'}=0$ tại một số hữu hạn $x_i$

- Hàm nhất biến: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ TXD : $D=R\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ , $y^{'}=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

- Hàm số đồng biến trên D ( hàm tăng trên tập ) $\Leftrightarrow y^{'}>0\ \forall x\in D\ \Leftrightarrow ad-bc>0$
- Hàm số nghịch biến trên D ( hàm nghịch trên tập ) $\Leftrightarrow y^{'}<0\ \forall x\in D\ \Leftrightarrow ad-bc<0$

- Hàm hữu tỷ: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ TXD : $D=R\setminus\left\{-\dfrac{e}{d}\right\}$

$y^{'}=\dfrac{Ax^2+Bx+C}{(dx+e)^2}$.

- Hàm số đồng biến trên D ( hàm tăng trên tập ) $\Leftrightarrow y^{'}>0\ \forall x\in D\ \Leftrightarrow \begin{cases}A>0\\ \Delta\ge 0\ \left(\Delta^{'}\ge 0\right)\end{cases}$.

- Hàm số nghịch biến trên D ( hàm nghịch trên tập ) $\Leftrightarrow y^{'}<0\ \forall x\in D\ \Leftrightarrow \begin{cases}A<0\\ \Delta\le 0\ \left(\Delta^{'}\le 0\right)\end{cases}$.

**Dạng 4.** Cực trị tại 1 điểm.

Cho hàm số $y=f(x)$.

- *Dấu hiệu 1.*

Để hàm có cực trị tại $x_0 \Leftrightarrow f^{'}(x_0)=0$ có nghiệm đổi dấu qua $f^{'}(x)$.

- *Dấu hiệu 2.*

Để hàm có cực đại tại $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases}f^{'}(x_0)=0\\ f^{''}(x_0)<0\end{cases}$

Để hàm có cực tiểu tại $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases}f^{'}(x_0)=0\\ f^{''}(x_0)>0\end{cases}$

**Dạng 5.** Tìm m để hàm số có điểm uốn.

- Hàm bậc ba: $y=ax^3+bx^2+cx+d$ TXĐ: $D=R$

Hàm số có điểm uốn nếu phương trình $y^{''}=0$ có 1 nghiệm.

Điểm $U(x_0;y_0)$ là điểm uốn của hàm số $\Leftrightarrow \begin{cases}f^{''}(x_0)=0\\ y_0=f(x_0)\end{cases}$.

- Hàm trùng phương: $y=ax^4+bx^2+c$ TXĐ: $D=R$

Hàm số có điểm uốn nếu phương trình $y^{''}=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Hàm số không có điểm uốn nếu phương trình $y^{''}=0$ vô nghiệm hay có 1 nghiệm kép $x=0$.

**Dạng 6.** Tọa độ điểm nguyên.

Cho hàm số : $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(C)$.

Bước 1: Thực hiện phép chia đa thức của $(C)$ ta được $y=A+\dfrac{B}{cx+d}$

Bước 2: Để $(C)$ có tọa độ điểm nguyên thì $\dfrac{B}{cx+d}$ phải nguyên $\Rightarrow$ B chia hết cho $cx+d$ ( $cx+d$ là ước của B ) từ đó tìm được $x_1,x_2\ldots$ thay vào $(C)$ tìm được $y_1,y_2\ldots$

Bước 3: Kết luận các tọa độ điểm nguyên $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)\ldots$

**Dạng 7.** Biện luận số nghiệm của phương trình.

Cho hàm số : $y = f(x)$ $(C)$.

Dựa vào $(C)$ để biện luận số nghiệm của phương trình $F(x;m) = 0$ $(*)$.

Bước 1: Biến đổi $(*)$ sao cho vế trái giống như đồ thị $(C)$,vế phải đặt là đường thẳng$(d): y = g(x;m)$.

Bước 2: Số nghiệm của $(*)$ chính là số nghiệm của hoành độ giao điểm của $(d)$ và $(C)$.

Bước 3: Lập bảng giá trị dựa vào đồ thị $(C) \Rightarrow$ kết luận. (có thể không cần kẻ bảng).

**Dạng 8.** Tìm điểm cố định của hàm số $y = f(x)$ $(C_m)$

Dự vào phương trình dạng: $mA = B$ ; $(C_m)$ qua điểm cố định $(x;y) \Leftrightarrow mA = B$ thỏa mãn $\forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$. Giải hệ phương trình trên ta tìm được các điểm cố định.

**Dạng 9.** Bài toán về khoảng cách.

Cho 2 điểm $A(x_A;y_A)$) và $B(x_B;y_B) \Rightarrow$ Khoảng cách giữa AB là : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Khoảng cách từ mội điểm $M(x_0;y_0)$ đến đường thẳng $(\Delta): Ax + By + C = 0$ được tính theo công thức : $d(M,(\Delta)) = \dfrac{|Ax_0 + Bx_0 + c|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Trường hợp đặc biệt:

$(\Delta): x = a \Rightarrow d(M,(\Delta)) = |x_0 - a|$

$(\Delta): y = b \Rightarrow d(M,(\Delta)) = |y_0 - b|$

Tổng khoảng cách $d(M,(\Delta_1)) + d(M,(\Delta_2))$ ,tích khoảng cách $d(M,(\Delta_1)).d(M,(\Delta_2))$.Bài toán tổng khoảng cách và tích khoảng cách thường được áp dụng cho khoảng cáh tới các tiệm cận,chứng minh hằng số,ngắn nhất,...

**Dạng 10.** Bài toán về điểm thuộc đồ thị hàm số $(C)$ cách đều hai trục tọa độ.

Điểm $M \in (C)$ cách đều hai trục tọa độ khi $|y_M| = |x_M| \Leftrightarrow y_M = \pm x_M$ ta lần lượt giải các phương trình : $f(x) = x$ và $f(x) = -x$ tìm được $x_M$ rồi thay vào tìm được $y_M$.

**Dạng 11.** Tìm tập hợp điểm M.

Xác định tọa độ $M\begin{cases} x = k(m) \\ y = h(m) \end{cases}$ khử tham số m giữa x và y ta được phương trình $y = g(x)$ $(C)$

Tìm giới hạn quĩ tích điểm ( nếu có).Rồi kết luận quĩ tích điểm M là 1 hàm số $y = g(x)$ $(C)$.

**Dạng 12.** Đồ thị hàm số chứa trị tuyệt đối.

- Đồ thị hàm $y = |f(x)|$

Ta vẽ đồ thị $y = f(x)$ $(C)$.

Gọi đồ thị:

- Phía trên 0x là:$(C_1)$.
- Phía dưới 0x là: $(C_2)$.

Vẽ $y = |f(x)|$ $(C')$ như sau:

- Giữ nguyên $(C_1)$ bỏ phần $(C_2)$.

- Vẻ đối xứng của $(C_2)$ qua trục ox.

- Đồ thị hàm $y=f(|x|)$

Ta vẽ đồ thị $y=f(x)$ $(C)$.

Gọi đồ thị:

  - Phía phải Oy là: $(C_1)$.
  - Phía trái Oy là: $(C_2)$.

Vẽ $y=f(|x|)$ $(C^{'})$ như sau:

  - Giữ nguyên $(C_1)$ bỏ phần $(C_2)$.
  - Vẻ đối xứng của $(C_1)$ qua trục oy.

- Đồ thị hàm $y=\dfrac{g(x)}{|x-x_0|}$

Ta vẽ đồ thị $y=f(x)=\dfrac{g(x)}{x-x_0}$ $(C)$.

Gọi đồ thị:

  - Phía phải TCĐ là: $(C_1)$.
  - Phía trái TCĐ là: $(C_2)$.

Vẽ $y=\dfrac{g(x)}{|x-x_0|}$ $(C^{'})$ như sau:

  - Giữ nguyên $(C_1)$ bỏ phần $(C_2)$.
  - Vẻ đối xứng của $(C_2)$ qua trục Ox.

**Dạng 13.** Điểm đối xứng.

Điểm $M(x_0;y_0)$ là tâm đối xứng của đồ thị $(C): y=f(x) \Leftrightarrow$ Tồn tại hai điểm $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)$ thuộc $(C)$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1+x_2=2x_0 \\ f(x_1)+f(x_2)=2y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=2x_0-x_1 \\ f(x_1)+f(2x_0-x_1)=2y_0 \end{cases}$ ( công thức này gọi là công thức đổi trục bằng phép tịnh tiến véctơ ).

Vậy điểm $M(x_0;y_0)$ là tâm đối xứng của đồ thị $(C): y=f(x)=2y_0-f(2x_0-x)$.

**Dạng 14.** Tìm m để $(C_m): y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ thõa điều kiện:

- Hàm số $(C_m)$ có cực đại, cực tiểu nằm 2 phía của trục ox.

Bước 1: Tìm m để hàm có cực đại cực tiểu $(1)$.

Bước 2: $(C_m)$ không cắt Ox $\Leftrightarrow y=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow ax^2+bx+c=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta<0$ $(2)$

Bước 3: Giao $(1)$ và $(2)$ ta tìm được m.

- Hàm số $(C_m)$ có cực đại,cực tiểu nằm cùng phía của trục Ox.

Bước 1:Tìm m để hàm có cực đại cực tiểu $(1)$.

Bước 2: $(C_m)$ cắt Ox tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow y=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ax^2+bx+c=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta>0$ $(2)$

Bước 3: Giao $(1)$ và $(2)$ ta tìm được m.

## Câu II *( 2,0 điểm ).*

### 1. Phương trình lượng giác.

- ***Hệ thức cơ bản.***

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\tan x.\cot x = 1$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$

$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \quad \left(x \neq k\pi\right)$

$1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

- ***Cung liên kết.***

**a. Hai cung đối nhau:**

$\cos\left(-x\right) = \cos x$

$\tan\left(-x\right) = -\tan x$

$\sin\left(-x\right) = -\sin x$

$\cot\left(-x\right) = -\cot x$

**b. Hai cung bù nhau:**

$\cos\left(\pi - x\right) = -\cos x$

$\tan\left(\pi - x\right) = -\tan x$

$\sin\left(\pi - x\right) = \sin x$

$\cot\left(\pi - x\right) = -\cot x$

**c. Hai cung phụ nhau:**

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

**d. Hai cung hơn kém nhau $\pi$:**

$\cos\left(\pi + x\right) = -\cos x$

$\tan\left(\pi + x\right) = \tan x$

$\sin\left(\pi + x\right) = -\sin x$

$\cot\left(\pi + x\right) = \cot x$

**e. Hai cung hơn kém nhau $\dfrac{\pi}{2}$:**

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

$\cot\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x$

- <u>**Hệ quả:**</u>

$\cos\left(k\pi + x\right) = \left(-1\right)^k.\cos x$

$\cos\left(k2\pi + x\right) = \cos x$

$\sin\left(k\pi + x\right) = \left(-1\right)^k.\sin x$

$\sin\left(k2\pi + x\right) = \sin x$

$\tan\left(k\pi + x\right) = \tan x$

$\cot\left(k\pi + x\right) = \cot x$

- ***Công thức biến đổi:***

**a. Công thức cộng:**

$\sin\left(x + y\right) = \sin x.\cos y + \sin y.\cos x$

$\cos\left(x + y\right) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$

$\sin\left(x - y\right) = \sin x.\cos y - \sin y.\cos x$

$\cos\left(x - y\right) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y$

$\tan\left(x \pm y\right) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x.\tan y}$

$\cot\left(x + y\right) = \dfrac{\cot x.\cot y - 1}{\cot x + \cot y}$

$\cot\left(x - y\right) = \dfrac{\cot x.\cot y + 1}{\cot x - \cot y}$

**b. Công thức nhân đôi:**

$$\sin 2x = 2\sin x.\cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$
$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$
$$\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$$

**c. Công thức nhân 3:**

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$
$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$
$$\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$
$$\cot 3x = \frac{\cot^3 x - 3\cot x}{3\cot^2 x - 1}$$

**d. Công thức hạ bậc:**

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$
$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$$
$$\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$
$$\cot^2 x = \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$$

**e. Công thức biến đổi tổng thành tích:**

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin\left(x \pm y\right)}{\cos x.\cos y}$$
$$\cot x + \cot y = \frac{\sin\left(x \pm y\right)}{\sin x.\sin y}$$

- <u>**Hệ quả:**</u>

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

**f. Công thức biến đổi tích thành tổng:**

$$\cos x.\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos\left(x+y\right) + \cos\left(x-y\right)\right]$$
$$\sin x.\sin y = -\frac{1}{2}\left[\cos\left(x+y\right) - \cos\left(x-y\right)\right]$$
$$\sin x.\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin\left(x+y\right) + \sin\left(x-y\right)\right]$$
$$\cos x.\sin y = \frac{1}{2}\left[\sin\left(x+y\right) - \sin\left(x-y\right)\right]$$
$$\tan x.\tan y = \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y}$$
$$\cot x.\cot y = \frac{\cot x + \cot y}{\tan x + \tan y}$$

**g. Công thức chia đôi: Đặt** $\left(t = \tan\frac{x}{2}\right)$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$
$$\cot x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

- <u>**Hệ quả:**</u> Nếu ta đặt $\left(t = \tan x\right)$

$$\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\tan 2x = \frac{2t}{1-t^2}$$
$$\cot 2x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

- **Phương trình cơ bản.**

**a. Phương trình sin:** $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right.(k \in z).$

**Đặc biệt:**

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$

**b. Phương trình cos:** $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right.(k \in z).$

**Đặc biệt:**

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

**c. Phương trình tan:** $\tan x = \tan\alpha.\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi\,(k \in z).$

**Đặc biệt :**

$\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$

**d. Phương trình cotan:** $\cot x = \cot\alpha.(x \neq k\pi) \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi\,(k \in z).$

**Đặc biệt :**

$\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$\cot x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} k\pi.$

- **Phương trình bậc n theo một hàm số lượng giác.**

*Cách giải:* Đặt $t = \sin x$ (hoặc $\cos x, \tan x, \cot x$) ta có phương trình:

$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0 t^0 = 0$ (nếu $t = \sin x$ hoặc $t = \cos x$ thì điều kiện của $t: -1 \leq t \leq 1$)

- **Phương trình bậc nhất theo sinx và cosx.**

$a\sin x + b\cos x = c.$ $a.b \neq 0$ điều kiện có nghiệm : $a^2 + b^2 \geq c^2$

*Cách giải:* Chia 2 vế phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ và sau đó đưa về phương trình lượng giác cơ bản.

- **Phương trình đẳng cấp bậc hai đối với sinx và cosx.**

$a\sin^2 x + b\sin x.\cos x + c\cos^2 x = d.$

*Cách giải:*

Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ có phải là nghiệm không ?

Xét $\cos x \neq 0$ Chia 2 vế cho $\cos^2 x$ và đặt $t = \tan x$.

- **Phương trình dạng.**

$a.(\sin x \pm \cos x) + b.\sin x.\cos x = c.$

*Cách giải :* Đặt $t = \sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right);\left(DK : -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}\right)$

$\Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$ hoặc $\sin x.\cos x = \frac{1 - t^2}{2}$ và giải phương trình bậc 2 theo t.

## 2. Phương trình, hệ phương trình và bất phương trình.

- **Phương trình – Bất phương trình chứa trị tuyệt đối.**

$*|a| = \begin{cases} a \text{ khi } a \ge 0 \\ -a \text{ khi } a < 0 \end{cases}$

$*|a| = |-a| \quad \forall a \in R.$

$*|a| = |b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right.$

$*|a| = b \ (b \ge 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right.$

$*\begin{cases} |a| \ge a \\ |a| \ge -a \end{cases} \forall a \in R.$

$*|a| < b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ -b < a < b \end{cases}$

$*|a| > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > b \\ a < -b \end{array}\right.$

$*(|a|)^2 = a^2 \quad \forall a \in R.$

$*|a| + |b| \ge |a + b|$.Đẳng thức có $\Leftrightarrow a.b \ge 0.$

$*|a - b| \ge |a| - |b|$.Đẳng thức có $\Leftrightarrow a.b \ge 0.$

- **Phương trình – Bất phương trình vô tỉ.**

* Phương trình: $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$

* Bất phương trình dạng: $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \ge 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$

* Bất phương trình dạng: $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$ TH 1 : $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ TH 2 : $\begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge g^2(x) \end{cases}$

- **Hệ phương trình.**

**a. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.**

$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ Trong đó $a, b, c, a', b', c'$ là các số thực không đồng thời bằng không.

Theo định thức Crame : $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ ; $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ , $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$.

* Nếu $D \ne 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất : $x = \frac{D_x}{D}; y = \frac{D_y}{D}$

* Nếu $D = D_x = D_y = 0$ thì hệ vô số nghiệm : $\begin{cases} x \in R \\ y = \frac{c - ax}{b} \end{cases}$

* Nếu $\begin{cases} D = 0 \\ \left[\begin{array}{l} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{array}\right. \end{cases}$ thì hệ đã cho vô nghiệm.

**b. Hệ phương trình đối xứng loại I.**

Cho hệ phương trình $\begin{cases} f(x;y) = a \\ g(x;y) = b \end{cases}$ $(I)$

*Cách Giải:* Đặt $S = x + y$ , $P = xy$ , DK: $S^2 - 4P \geq 0$

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} F(S;P) = 0 \\ G(S;P) = 0 \end{cases}$ giải hệ tìm được S,P . Khi đó x,y là nghiệm của phương trình: $X^2 - SX + P = 0.$ tìm được nghiệm x,y xem xét điều kiện và kết luận nghiệm.

**c. Hệ phương trình đối xứng loại II.**

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} f(x;y) = a \\ f(y;x) = b \end{cases}$ $(II)$

*Cách Giải:* Trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta được :

$f(x;y) - f(y;x) = 0 \Leftrightarrow (x - y)g(x;y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ g(x;y) = 0 \end{array}\right.$ xét xem phương trình có nghiệm không rồi thay vào 1 trong 2 phương trình của II, kết luận nghiệm nếu có.

**d. Hệ phương trình đẳng cấp.**

Cho hệ $\begin{cases} f(x;y) = a \\ f(y;x) = b \end{cases}$ $(*)$Trong đó $f(x,y)$ và $g(x,y)$ đẳng cấp bậc k gọi là hệ đẳng cấp.

Lưu ý: Hệ $(*)$ gọi là đẳng cấp bậc k nếu các phương trình $f(x,y)$ và $g(x,y)$ phải là đẳng cấp bậc k. $f(x,y)$ và $g(x,y)$ đẳng cấp bậc k khi: $f(x,y) = m^k f(mx,my)$ và $g(x,y) = m^k g(mx,my)$.

*Cách giải:*

* Xét $x = 0$ thay vào hệ có phải là nghiệm hay không.

* Với $x \neq 0$ đặt $y = tx$ thay vào hệ ta có $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x;tx) = a \\ g(x;tx) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^k f(1;t) = a \ (1) \\ x^k g(1;t) = b \ (2) \end{cases}$

Ta thự hiện $\dfrac{(1)}{(2)}$ thì được $\dfrac{f(1;t)}{g(1;t)} = \dfrac{a}{b}$ và giải phương trình này ta được nghiệm t rồi thay vào tìm được nghiệm $(x,y)$.

## Câu III *( 1,0 điểm ).*

### Nguyên hàm tích phân.

- **Công thức nguyên hàm cần nhớ :**

| | |
|---|---|
| $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ | $\int (ax+b)^\alpha dx = \dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{a(\alpha+1)} + C$ |

| | |
|---|---|
| $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$ | $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$ |
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ | $\int a^{kx+b}dx = \frac{a^{kx+b}}{k.\ln a} + C$ |
| $\int e^x dx = e^x + C$ | $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$ |
| $\int \sin x dx = -\cos x + C$ | $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$ |
| $\int \cos x dx = \sin x + C$ | $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$ |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$ | $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$ |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$ | $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$ |
| $\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$ | $\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + C$ |
| $\int \cot x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$ | $\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + C$ |
| $\int a dx = ax + C$ | $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$ |
| $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$ | $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$ |

- **Các phương pháp tính tích phân.**

**a. Phương pháp tích phân từng phần.**

$$I = \int_a^b f(x).g(x)dx. \quad \text{đặt} \begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \int g(x)dx = G(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = u.v\Big|_a^b - \int_a^b vdu = f(x).G(x)\Big|_a^b - \int_a^b G(x).f'(x)dx$$

*Dạng 1:* $I = \int_a^b f(x).\ln(g(x))dx$ đặt $\begin{cases} u = \ln(g(x)) \\ dv = f(x) \end{cases}$

*Dạng 2:* $I = \int_a^b f(x)\sin(g(x))dx$ đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \sin(g(x))dx \end{cases}$

$I = \int_a^b f(x)\cos(g(x))dx$ đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \cos(g(x))dx \end{cases}$

*Dạng 3:* $I = \int_a^b f(x).e^{g(x)}dx$ đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = e^{g(x)}dx \end{cases}$

*Dạng 4:* $I = \int_a^b \sin(f(x)).e^{g(x)}dx$ đặt $\begin{cases} u = \sin(f(x)) \\ dv = e^{g(x)}dx \end{cases}$

$I = \int_a^b \cos(f(x)).e^{g(x)}dx$ đặt $\begin{cases} u = \cos(f(x)) \\ dv = e^{g(x)}dx \end{cases}$

Riêng dạng này ta nên tính tích phân 2 lần như vậy để được trở lại như đề rồi $\Rightarrow I$.

**b. Phương pháp đổi biến số.**

| Các dạng | Cách đặt |
|---|---|
| $I = \int_{b_1}^{b_2} \sqrt{a^2 - x^2}dx$ hoặc $I = \int_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ | Đặt $x = a\sin t$ hoặc $x = a\cos t$ |
| $I = \int_{b_1}^{b_2} \sqrt{x^2 - a^2}dx$ hoặc $I = \int_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ | Đặt $x = \frac{a}{\sin t}$ hoặc $x = \frac{a}{\cos t}$; |
| $I = \int_{b_1}^{b_2} \sqrt{a^2 + x^2}dx$ | Đặt $x = a\tan t$ hoặc $x = a\cot t$ |
| $I = \int_{b_1}^{b_2} \sqrt{\frac{a + x}{a - x}}dx$ hoặc $I = \int_{b_1}^{b_2} \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}dx$ | Đặt $x = a\cos 2t$ |
| $I = \int_{b_1}^{b_2} \sqrt{(x - a)(b - x)}dx$ | Đặt $x = a + (b - a)\sin^2 t$ |
| $I = \int_{b_1}^{b_2} \frac{1}{a^2 + x^2}dx$ | Đặt $x = a\tan t$ |

- **Ứng dụng tích phân.**

**a. Diện tích giới hạn hình phẳng.**

Dạng 1. Hình phẳng giới hạn bởi : Hàm số $y = f(x)$ $(C)$,trục hoành $(y = 0)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

$\Rightarrow S = \int_a^b |f(x)|dx$ có thể bỏ dấu trị tuyệt đối dựa vào đồ thị.

Dạng 2. Hình phẳng giới hạn bởi : Hàm số $y = f(x)$ $(C_1)$; $y = g(x)$ $(C_2)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

$\Rightarrow S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ có thể bỏ dấu trị tuyệt đối bằng cách dựa vào đồ thị.

Dạng 3. Hình phẳng giới hạn bởi : Hàm số $y = f(x)$ $(C_1)$; $y = g(x)$ $(C_2)$

Giải phương trình hoành độ giao điểm của $(C_1)$ và $(C_2) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow x_1, x_2, x_3...$

$\Rightarrow S = \int_{x_1}^{x_3} |f(x) - g(x)| dx$ có thể bỏ dấu trị tuyệt đối bằng cách :

$\Rightarrow S = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx + \int_{x_2}^{x_3} (f(x) - g(x)) dx$... hoặc dựa vào đồ thị.

**b. Thể tích vật tròn xoay.**

Vật thể tròn xoay giới hạn bởi $y = f(x)$ $(C)$ ,$y = 0$ ; $x = a, x = b$ xoay quanh $Ox \Rightarrow V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Vật thể tròn xoay giới hạn bởi $x = f(y)$ $(C)$ ,$x = 0$ ; $y = a, y = b$ xoay quanh $Oy \Rightarrow V = \pi \int_a^b f^2(y) dy$.

## Câu IV *( 1,0 điểm ).*

### Hình học không gian.

- **Kiến Thức Cơ Bản Về Hệ Thức Lượng.**

***a. Hệ thức lượng trong tam giác vuông***: cho $\Delta ABC$ vuông ở A ta có :

Định lý Pitago : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

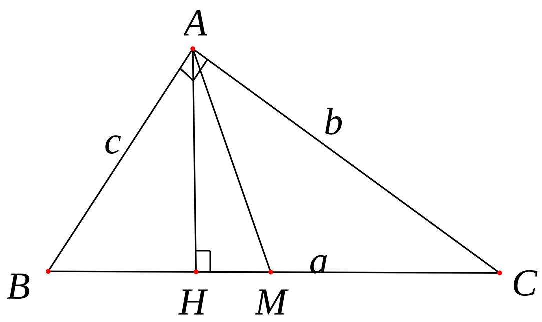
$BA^2 = BH.BC$ ; $CA^2 = CH.CB$

$AB. AC = BC. AH$ .Với AH là đường cao.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$BC = 2AM$ .Với AM là đường trung tuyến của cạnh BC

$$\sin B = \frac{b}{a},\ \cos B = \frac{c}{a},\ \tan B = \frac{b}{c},\ \cot B = \frac{c}{b}$$




$$b = a.\sin B = a.\cos C,\ c = a.\sin C = a.\cos B,\ a = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos C},\ b = c.\tan B = c.\cot C$$

***b. Hệ thức lượng trong tam giác thường:***

* Định lý hàm số Côsin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

* Định lý hàm số Sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

***c. Các công thức tính diện tích.***

*** Công thức tính diện tích tam giác:**

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}a.b\sin C = \frac{a.b.c}{4R} = p.r = \sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác là

*Đặc biệt*:

* $\Delta ABC$ vuông ở A : $S = \frac{1}{2}AB.AC$

* $\Delta ABC$ đều cạnh a: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

*** Diện tích hình vuông:** S = cạnh x cạnh

*** Diện tích hình chữ nhật:** S = dài x rộng

*** Diện tích hình thoi:** $S = \frac{1}{2}$(chéo dài x chéo ngắn)

*** Diện tích hình thang:** $S = \frac{1}{2}$(đáy lớn + đáy nhỏ) x chiều cao

*** Diện tích hình bình hành:** S = đáy x chiều cao

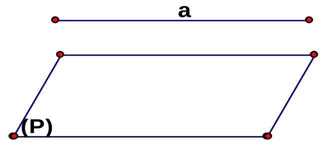
*** Diện tích hình tròn:** $S = \pi.R^2$

- **Kiến Thức Cơ Bản Về Hình Học Không Gian.**

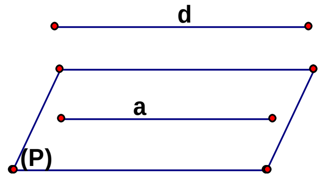
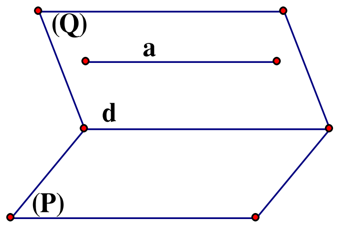
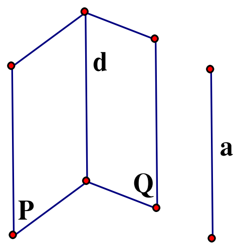
## A. QUAN HỆ SONG SONG

### §1. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

**I.Định nghĩa:**

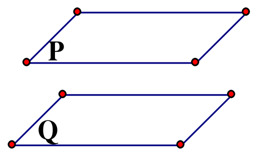
| | | |
|---|---|---|
| Đường thẳng và mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm nào chung. | $a//(P) \Leftrightarrow a \cap (P) = \varnothing$ |  |

**II.Các định lý:**

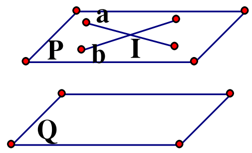
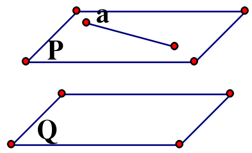
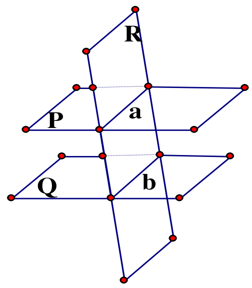
| | | |
|---|---|---|
| **ĐL1:** Nếu đường thẳng d không nằm trên $mp(P)$ và song song với đường thẳng a nằm trên $mp(P)$ thì đường thẳng d song song với $mp(P)$ | $\begin{cases} d \not\subset (P) \\ d//a \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d//(P)$ |  |
| **ĐL2:** Nếu đường thẳng a song song với $mp(P)$ thì mọi $mp(Q)$ chứa a mà cắt $mp(P)$ thì cắt theo giao tuyến song song với a. | $\begin{cases} a//(P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \end{cases} \Rightarrow d//a$ |  |
| **ĐL3:** Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng song song với đường thẳng đó. | $\begin{cases} (P) \cap (Q) = d \\ (P)//a \\ (Q)//a \end{cases} \Rightarrow d//a$ |  |

### §2.HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

**I.Định nghĩa:**

| | | |
|---|---|---|
| Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm nào chung. | $(P)//(Q) \Leftrightarrow (P) \cap (Q) = \varnothing$ |  |

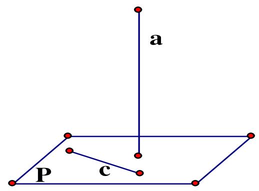
**II.Các định lý:**

| | | |
|---|---|---|
| **ĐL1:** Nếu $mp(P)$ chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với $mp(Q)$ thì $(P)$ và $(Q)$ song song với nhau. | $\begin{cases} a,b \subset (P) \\ a \cap b = I \\ a//(Q), b//(Q) \end{cases} \Rightarrow (P)//(Q)$ |  |
| **ĐL2:** Nếu một đường thẳng nằm một trong hai mặt phẳng song song thì song song với mặt phẳng kia. | $\begin{cases} (P)//(Q) \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a//(Q)$ |  |
| **ĐL3:** Nếu hai $mp(P)$ và $mp(Q)$ song song thì mọi mặt phẳng $mp(R)$ đã cắt $mp(P)$ thì phải cắt $mp(Q)$ và các giao tuyến của chúng song song. | $\begin{cases} (P)//(Q) \\ (R) \cap (P) = a \\ (R) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow a//b$ |  |

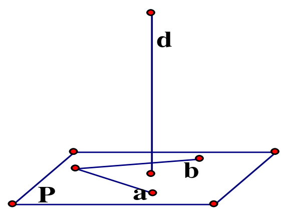
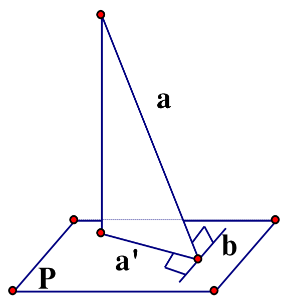
**B.QUAN HỆ VUÔNG GÓC**

## §1.ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

**I.Định nghĩa:**

| | | |
|---|---|---|
| Một đường thẳng được gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng đó. | $a \perp (P) \Leftrightarrow a \perp c, \forall c \subset (P)$ |  |

**II. Các định lý:**

| | | |
|---|---|---|
| **ĐL1:** Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong $mp(P)$ thì đường thẳng d vuông góc với $mp(P)$. | $\begin{cases} d \perp a, d \perp b \\ a,b \subset (P) \\ a,b \text{ cắt nhau} \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$ |  |
| **ĐL2:** (Ba đường vuông góc) Cho đường thẳng a không vuông góc với $mp(P)$ và đường thẳng b nằm trong $mp(P)$. Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a | $a \not\perp (P), b \subset (P)$<br>$b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'$ |  |

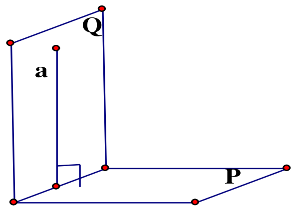
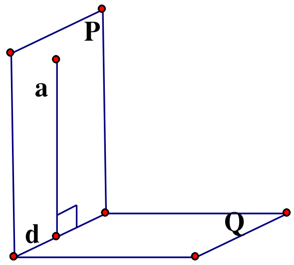
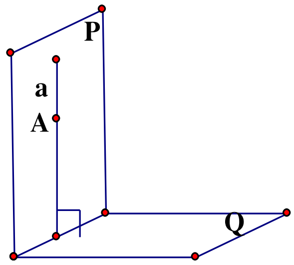
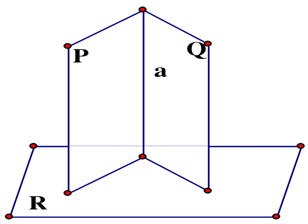
| | | |
|---|---|---|
| trên $mp(P)$. | | |

## §2.HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

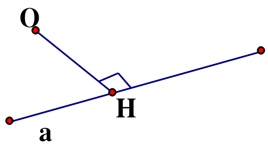
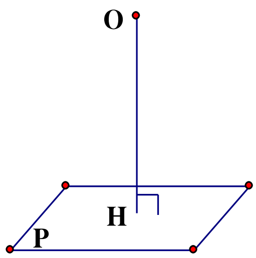
### I.Định nghĩa:

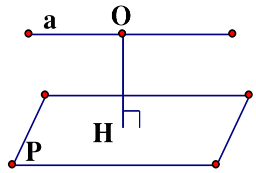
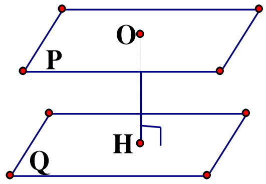
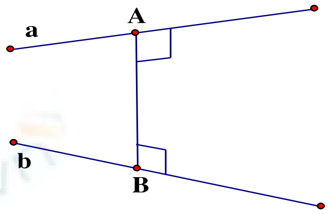
| |
|---|
| Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90^0$. |

### II. Các định lý:

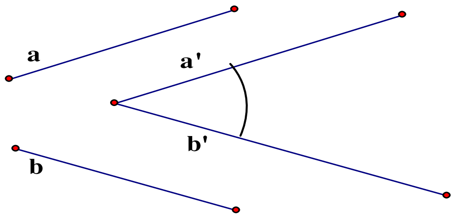
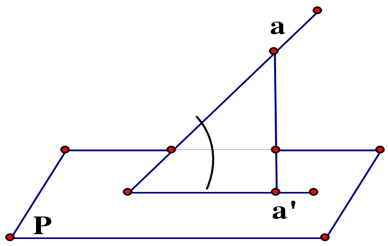
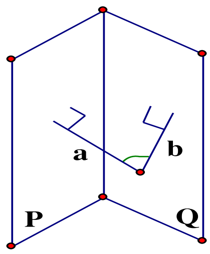
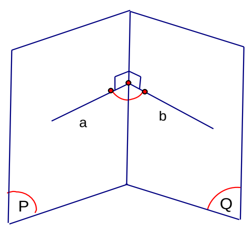
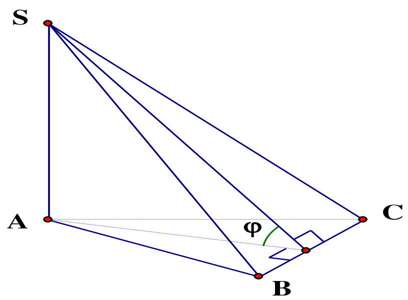
| | | |
|---|---|---|
| **<u>ĐL1:</u>** Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau. | $\begin{cases} a \perp (P) \\ a \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow (Q) \perp (P)$ |  |
| **<u>ĐL2:</u>** Nếu hai $mp(P)$ và $mp(Q)$ vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q). | $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \\ a \subset (P), a \perp d \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$ |  |
| **<u>ĐL3:</u>** Nếu hai $mf(P)$ và $mf(Q)$ vuông góc với nhau và A là một điểm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với $mf(Q)$ sẽ nằm trong $mf(P)$. | $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ A \in a \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$ |  |
| **<u>ĐL4:</u>** Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba. | $\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$ |  |

## §3.KHOẢNG CÁCH

| | |
|---|---|
| **1.** Khoảng cách từ 1 điểm tới 1 đường thẳng, đến 1 mặt phẳng:<br>Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng a (hoặc đến $mp(P)$) là khoảng cách giữa hai điểm M và H, trong đó H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng a (hoặc trên $mp(P)$)<br>$d(O; a) = OH;\ d(O;(P)) = OH$ |   |

| | |
|---|---|
| **2.** Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song:<br>Khoảng cách giữa đường thẳng a và $mp(P)$ song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến $mp(P)$.<br>$$d(a;(P)) = OH$$ |  |
| **3.** Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song:<br>Là khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.<br>$$d((P);(Q)) = OH$$ |  |
| **4.** Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:<br>Là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.<br>$d(a;b) = AB$ |  |

## §4.GÓC

| | |
|---|---|
| ***1. Góc giữa hai đường thẳng a và b***<br>Là góc giữa hai đường thẳng $a'$ và $b'$ cùng đi qua một điểm và lần lượt cùng phương với a và b. |  |
| ***2. Góc giữa đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P)***<br>Là góc giữa a và hình chiếu $a'$ của nó trên $mp(P)$.<br>*Đặc biệt*: Nếu a vuông góc với $mp(P)$ thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và $mp(P)$ là $90^0$. |  |
| ***3. Góc giữa hai mặt phẳng***<br>Là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.<br>Hoặc là góc giữa 2 đường thẳng nằm trong 2 mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại 1 điểm |   |
| ***4. Diện tích hình chiếu***: Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong $mp(P)$ và $S'$ là diện tích hình chiếu $(H')$ của (H) trên $mp(P')$ thì $S' = S\cos\varphi$<br>( trong đó $\varphi$ là góc giữa hai $mp(P)$ và $mp(P')$ ). |  |