BÀI 1 BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Hướng dẫn học

Đây là bài học mở đầu cho môn học, gồm các khái niệm cơ bản, các ký hiệu quan trọng sẽ dùng cho tất cả các bài sau. Với mỗi khái niệm hoặc định nghĩa đều có các ví dụ cụ thể và chi tiết để giải thích, minh họa. Vì vậy người học cần theo dõi các ví dụ và làm các bài tập để hiểu rõ và nắm chắc khái niệm cũng như cách thức tính toán. Càng về sau các ví dụ sẽ nâng cao dần và các ví dụ sau sẽ sử dụng kết quả của ví dụ trước, vì vậy không được bỏ qua ví dụ nào trong quá trình học tập.

Bài này giới thiệu về một số khái niệm cơ bản của lí thuyết xác suất như phép thử, biến cố và xác suất của biến cố. Đồng thời hướng dẫn các phương pháp tính xác suất của biến cố và cách xác định mối quan hệ giữa các biến cố. Ngoài ra, hai nguyên lí xác suất cũng được nêu ra trong bài.

Để học tốt bài này, sinh viên cần tham khảo các phương pháp học sau:

- Học đúng lịch trình của môn học theo tuần, làm các bài luyện tập đầy đủ và tham gia thảo luận trên diễn đàn.
- Đọc tài liệu: Giáo trình Lý thuyết xác suất và thống kê toán của NXB Đại học KTQD.
- Sinh viên làm việc theo nhóm và trao đổi với giảng viên trực tiếp tại lớp học hoặc qua email.
- Tham khảo các thông tin từ trang Web môn học.

Nội dung

- Các khái niệm cơ bản: phép thử, kết cục, biến cố, xác suất.
- Tính xác suất theo định nghĩa cổ điển: định nghĩa, phương pháp liệt kê, phương pháp sử dụng đại số tổ hợp.
- Tính xác suất theo định nghĩa thống kê.
- Nguyên lý xác suất lớn và nhỏ.
- Mối quan hệ giữa các biến cố: tổng, tích, độc lập, xung khắc, nhóm đầy đủ, đối lập.

Mục tiêu

Sau khi học xong bài này, sinh viên cần đảm bảo được các yêu cầu sau:

- Hiểu rõ các khái niệm, đặt biến cố, phân biệt các loại biến cố.
- Hiểu khái niệm xác suất, điều kiện quy ước của xác suất.
- Tính xác suất khi liệt kê được biến cố, liệt kê dạng bảng, sử dụng đại số tổ hợp.
- Hiểu khái niệm tần suất, nguyên lý xác suất nhỏ và lớn.
- Biết cách biểu diễn một biến cố qua tổng hoặc tích của các biến cố khác và xác định được mối quan hệ giữa các biến cố trong tổng hoặc tích.

Tình huống dẫn nhập

Xác suất để người chơi trúng thưởng

Tình huống về xác suất trong kinh tế thông thường khá phức tạp và có rất nhiều trường hợp riêng. Vì vậy tại đây ta xét một tình huống về trò chơi có thưởng trên truyền hình, xét về khía cạnh nào đó thì đây cũng là tình huống kinh tế vì phần thưởng là lợi ích kinh tế mà người chơi đạt được còn người tổ chức trò chơi mất đi.

Một người tham gia trò chơi trên truyền hình, chẳng hạn chương trình "Hãy chọn giá đúng". Có hai bàn ký hiệu là A và B, mỗi bàn có 5 cái hộp giống hệt nhau. Người chơi được biết trong số 5 hộp của bàn A chỉ có 3 hộp bên trong có phần thưởng; trong số 5 hộp tại bàn B chỉ có 2 hộp bên trong có phần thưởng, nhưng không biết cụ thể là hộp nào.

Tình huống 1: Người chơi phải chọn **một** bàn và từ đó lấy **một** hộp, và sẽ nhận được phần thưởng bên trong hộp (nếu có).

?

1. Người chơi có chắc chắn mình sẽ được phần thưởng không? Có chắc chắn mình sẽ không được gì hay không?
2. Nếu muốn có được phần thưởng thì người chơi nên chọn bàn A hay bàn B?
3. Nếu lệ phí tham gia trò chơi là 10 nghìn và phần thưởng có trị giá là 500 nghìn thì số tiền được/mất của người chơi và chủ trò chơi có những trường hợp nào và khả năng là bao nhiêu?

Tình huống 2: Người chơi được lấy từ **bàn A** ra **hai** hộp, để riêng ra rồi mới mở. Hãy đánh giá khả năng người chơi: Được hai phần thưởng, được một phần thưởng, không được phần thưởng nào.

?

Hãy tìm các tình huống tương tự như trò chơi này trong đời sống kinh tế xã hội?

Môn học nghiên cứu những hiện tượng có tính ngẫu nhiên trong kinh tế – xã hội. Hiện tượng có tính ngẫu nhiên xuất hiện thường xuyên quanh ta, do đó ta sẽ xuất phát từ những hiện tượng đơn giản thường gặp trong cuộc sống.

Để xây dựng các lý thuyết và tìm hiểu các ví dụ tính toán, trước hết ta bắt đầu với những khái niệm cơ bản nhất, là phép thử, biến cố.

1.1. Phép thử và biến cố

1.1.1. Khái niệm

Trong tự nhiên và xã hội, mỗi hiện tượng đều gắn liền với một nhóm các điều kiện cơ bản và các hiện tượng đó chỉ có thể xảy ra khi nhóm các điều kiện cơ bản gắn liền với nó được thực hiện. Vì vậy, khi muốn nghiên cứu một hiện tượng ta cần thực hiện nhóm các điều kiện cơ bản ấy.

Định nghĩa 1.1 – Phép thử: Phép thử là việc thực hiện một nhóm các điều kiện cơ bản xác định để quan sát một hiện tượng nào đó có xảy ra hay không. Hiện tượng có thể xảy ra hoặc không xảy ra trong kết quả của phép thử được gọi là biến cố.

Khi thực hiện một phép thử, các kết quả có thể xảy ra gọi là kết cục, và biến cố là một tập hợp các kết cục mà người nghiên cứu quan tâm. Việc "thực hiện nhóm các điều kiện" không nhất thiết là chính người nghiên cứu phải làm thử, mà có thể ghi nhận lại thông tin từ người khác đã thử.

Ví dụ 1.1. Một người đi học quan tâm đến kết quả làm bài kiểm tra trắc nghiệm *của chính mình* thế nào, có thể thực hiện phép thử thông qua việc làm một bài tập gồm hai câu trắc nghiệm. Việc làm bài tập là một phép thử. Khi làm bài có thể có các kết cục xảy ra: không làm đúng câu nào, làm đúng một câu, làm đúng cả hai câu. Khi đó các hiện tượng có thể xảy ra đó gọi là biến cố. Ta có các biến cố: biến cố không làm đúng câu nào, biến cố làm đúng được một câu, biến cố làm đúng cả hai câu.

Trong trường hợp trên, người đó quan tâm đến hiện tượng của chính mình nên phải tự làm bài. Nếu như người đó không phải người đi học, và chỉ quan tâm đến việc học viên làm bài thế nào, thì có thể quan sát kết quả của một sinh viên khác, cũng có thể cho một phép thử.

Ví dụ 1.2. Một người quan tâm đến việc đầu tư vào một mã chứng khoán, và lợi nhuận trên một cổ phần sau đúng 1 năm. Người đó không nhất thiết phải đầu tư thực sự, mà có thể theo dõi giá cổ phiếu đó trên các sàn giao dịch. Khi đó phép thử chính là ghi nhận lại thông tin xảy ra sau đúng 1 năm. Có rất nhiều kết cục có thể xảy ra vì giá cổ phiếu có thể có rất nhiều giá trị có thể có. Người quan tâm có thể xét các biến cố: có lãi (giá sau 1 năm tăng lên so với giá mua vào), hòa (giá như cũ), lỗ (giá giảm). Biến cố có lãi có thể xét thành nhiều biến cố nhỏ hơn như: lãi trên 1 nghìn đồng/cổ phần, lãi trên 10 nghìn đồng/cổ phần…

Với bài đầu tiên, để đơn giản và dễ dàng trong tính toán, ta xét hai ví dụ cơ bản sau:

Ví dụ 1.3. Quan tâm đến việc gieo đồng xu sẽ xảy ra những hiện tượng gì, một người gieo một đồng xu cân đối, đồng chất, trên một mặt phẳng cứng. Việc gieo đồng xu đó một lần là thực hiện một phép thử. Với phép thử gieo đồng xu đó, sự kiện "xuất hiện mặt sấp", "xuất hiện mặt ngửa"… là các biến cố.

Ví dụ 1.4. Gieo một con xúc sắc cân đối, đồng chất, trên một mặt phẳng cứng là thực hiện một phép thử. Những sự kiện "xuất hiện mặt có i chấm", với $i = 1,..., 6$ là những biến cố.

1.1.2. Các loại biến cố

Biến cố là hiện tượng do ta xác định, có tính chủ quan, trong khi đó kết quả của phép thử là khách quan, do đó có các trường hợp khác nhau.

Trong thực tế khi thực hiện một phép thử, có thể xảy ra các loại biến cố sau:

- **Biến cố chắc chắn:** là biến cố nhất định sẽ xảy ra khi phép thử được thực hiện, ký hiệu là Ω (đọc là ômêga) hoặc ký hiệu là U.
- **Biến cố không thể có:** là biến cố nhất định không xảy ra khi phép thử được thực hiện, ký hiệu là $\varnothing$ (đọc là rỗng) hoặc ký hiệu là V.
- **Biến cố ngẫu nhiên:** là biến cố có thể xảy ra hoặc không xảy ra khi phép thử được thực hiện. Thường ký hiệu các biến cố ngẫu nhiên bởi các chữ in hoa: A, B, C... Trường hợp có nhiều biến cố thì có thể đánh số như A_1, A_2…

  Ví dụ 1.3 (tiếp). Trong phép thử gieo một lần đồng xu, thì:

  - Biến cố Ω: “xuất hiện mặt sấp hoặc mặt ngửa” là biến cố chắc chắn.
  - Biến cố $\varnothing$: “xuất hiện mặt sấp và mặt ngửa” là biến cố không thể.
  - Biến cố S: “xuất hiện mặt sấp” là biến cố ngẫu nhiên.

  Ví dụ 1.4 (tiếp). Trong phép thử gieo một con xúc sắc, thì:

  - Biến cố Ω: “xuất hiện mặt có số chấm nhỏ hơn 7” là biến cố chắc chắn.
  - Biến cố $\varnothing$: “xuất hiện mặt có số chấm lớn hơn 7” là biến cố không thể.
  - Biến cố A: “xuất hiện mặt có 2 chấm” là biến cố ngẫu nhiên.
  - Biến cố B: “xuất hiện mặt có số chấm chẵn” là biến cố ngẫu nhiên.

1.2. Xác suất của biến cố

Trong kinh tế, việc nhận thức tính ngẫu nhiên của hiện tượng không quá khó, tuy nhiên việc quan trọng không kém là phải đo lường được sự ngẫu nhiên đó để ra quyết định. Với các phương án đầu tư, nhà đầu tư không chỉ nhận ra rằng việc “có lãi” là biến cố ngẫu nhiên (có thể có lãi hoặc không có lãi) mà còn quan tâm đến “khả năng có lãi” và muốn chọn phương án nào có “khả năng có lãi” cao hơn. Không chỉ là “khả năng có lãi” mà còn là “khả năng có lãi cao”. Khi đó xuất hiện vấn đề đo lường khả năng xảy ra của biến cố ngẫu nhiên.

Nhận thấy việc đo lường “khả năng” cần phải xét một cách khách quan, nghĩa là không phải nhận định hoàn toàn chủ quan của một người nào đó. Với những ví dụ đơn giản, phép thử là dễ thực hiện hoặc dễ suy luận, việc nhận thức về con số khách quan có thể cảm nhận được, vì vậy ta xét từ những ví dụ đơn giản. Bằng trực giác ta có thể nhận thấy, khả năng xảy ra của các biến cố khác nhau là không như nhau.

Chẳng hạn, ta nhận thấy khả năng để “xuất hiện mặt sấp” (S) khi gieo một đồng xu sẽ lớn hơn khả năng để “xuất hiện mặt 2 chấm” (A_2) khi gieo một con xúc sắc. Hơn nữa, khi lặp đi lặp lại nhiều lần cùng một phép thử trong những điều kiện như nhau người ta thấy tính chất ngẫu nhiên của biến cố mất dần đi và khả năng xảy ra của biến cố sẽ được thể hiện theo những qui luật nhất định. Từ đây cho thấy, có thể *đo được khả năng khách quan xuất hiện* một biến cố nào đó trong phép thử.

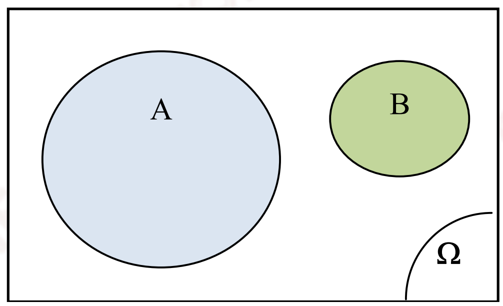
Định nghĩa 1.2 – Xác suất: Xác xuất của một biến cố là một con số đặc trưng khả năng khách quan xuất hiện biến cố đó khi thực hiện phép thử.

- **Ký hiệu:** xác suất của biến cố A là P(A).
  Vì con số đo khả năng có thể có nhiều dạng thể hiện, chẳng hạn trong đời thường ta vẫn nói “khả năng 80%”, “khả năng 10 trên 10”; “khả năng là 5 ăn 5 thua”, cần chuẩn hóa đại lượng này để thống nhất trong tính toán.
- **Quy ước:** Xác suất phải là con số *nằm trong đoạn từ 0 đến 1*, xác suất càng lớn thì khả năng xảy ra của biến cố càng nhiều.

$$0 \le P(\mathrm{A}) \le 1 \qquad (1.1)$$

Theo cách hiểu trên, khi xác suất của A lớn hơn xác suất của B: $P(\mathrm{A}) > P(\mathrm{B})$ thì ta nói khả năng xảy ra của A lớn hơn khả năng xảy ra của B, hay A *dễ* xảy ra hơn B và B *khó* xảy ra hơn A. Nếu $P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{B})$ thì nói khả năng xảy ra của A và B là *như nhau*.

Ta có thể mô tả các khái niệm qua một sơ đồ hình học như trong hình 1.1.



Hình 1.1. Mô tả biến cố

Trong hình 1.1, toàn bộ khả năng có thể có chính là biến cố chắc chắn Ω, được mô tả bởi hình chữ nhật, biến cố A được thể hiện như một tập hợp trong Ω. Nếu diện tích của hình chữ nhật Ω bằng 1, thể hiện xác suất biến cố chắc chắn bằng 1, thì diện tích hình (gần) tròn A thể hiện xác suất xảy ra biến cố A. Trong hình vẽ có thể thấy xác suất xảy ra biến cố A là lớn hơn xác suất xảy ra biến cố B.

Có thể nói cụ thể hơn, nếu chấm hoàn toàn ngẫu nhiên một điểm bất kỳ trong phạm vi hình chữ nhật Ω thì khả năng chấm vào trong hình tròn A sẽ lớn hơn khả năng chấm vào trong hình tròn B.

Như vậy nếu những câu nói về khả năng đúng là con số khách quan, thì:

- “Khả năng 80%” chuyển đổi thành xác suất bằng 0,8
- “Khả năng 10 trên 10” chuyển đổi thành xác suất bằng 1
- “Khả năng là 5 ăn 5 thua” chuyển đổi thành xác suất bằng một nửa, hay 0,5

Cũng từ đó có thể thấy:

- Xác suất của biến cố chắc chắn bằng 1: $P(\Omega) = 1$
- Xác suất của biến cố không thể có bằng 0: $P(\varnothing) = 0$
- Xác suất của biến cố ngẫu nhiên nằm trong khoảng 0 đến 1: $0 < P(\mathrm{A}) < 1$

Vấn đề đặt ra là làm sao để tính được các xác suất khách quan đó, con số phải có tính logic, hợp lý và được mọi người công nhận. Các phần sau sẽ trình bày về các định nghĩa, hay các cách thức để tính xác suất.

1.3. Định nghĩa cổ điển về xác suất

Cách tính xác suất theo suy luận cổ điển được đề cập đến từ hơn 300 năm trước, tính bằng cách đếm xem có tổng cộng bao nhiêu trường hợp có thể xảy ra, trong số đó có bao nhiêu trường hợp có hiện tượng mà ta nghiên cứu để tính khả năng. Cách suy luận này được đưa thành một công thức, và được gọi là *định nghĩa cổ điển* hay *công thức cổ điển*.

1.3.1. Định nghĩa cổ điển

Định nghĩa 1.3 – Công thức cổ điển: Xác suất xuất hiện biến cố A trong một phép thử là tỉ số giữa số kết cục thuận lợi cho A và tổng số các kết cục duy nhất đồng khả năng có thể xảy ra khi thực hiện phép thử đó.

Nếu ký hiệu: n là tổng số các kết cục duy nhất đồng khả năng;

m là số kết cục *thuận lợi* cho A (kết cục làm cho A xảy ra);

P(A) là xác suất của biến cố A.

Thì công thức tính xác suất là:

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1.2}$$

Trong định nghĩa trên có một điều lưu ý: các kết cục là các trường hợp có thể xảy ra khi thực hiện phép thử. Các kết cục đồng khả năng nghĩa là các trường hợp đó có khả năng xảy ra là như nhau, không trường hợp nào dễ hoặc khó xảy ra hơn trường hợp khác. Chẳng hạn nếu đồng xu đối xứng đồng chất và mỏng thì khi gieo khả năng xuất hiện mặt sấp và mặt ngửa là như nhau, kết cục "mặt sấp" và kết cục "mặt ngửa" là đồng khả năng. Tuy nhiên nếu đồng xu không đồng chất, một mặt nặng hơn mặt kia thì hai kết cục trên là không đồng khả năng, và định nghĩa này không áp dụng được.

1.3.2. Phương pháp liệt kê

Để áp dụng định nghĩa cổ điển, cần phải biết số kết cục đồng khả năng và số kết cục thuận lợi. Trong nhiều trường hợp ta có thể liệt kê được các kết cục này để tính xác suất.

Ví dụ 1.5. Gieo đồng xu đối xứng đồng chất 2 lần, tính xác suất để:

(a) Xuất hiện 2 mặt sấp.

(b) Xuất hiện 1 mặt sấp, 1 mặt ngửa.

(c) Có xuất hiện mặt sấp.

(d) Không xuất hiện mặt ngửa.

Giải:

Liệt kê tất cả các trường hợp có thể xảy ra khi gieo đồng xu hai lần: Sấp – Sấp; Sấp – Ngửa; Ngửa – Sấp; Ngửa – Ngửa. Khi đó số kết cục duy nhất đồng khả năng là 4, hay $n = 4$.

(a) Đặt A là biến cố "xuất hiện 2 mặt sấp", ta có $m_A = 1$ vì chỉ có một trường hợp thỏa mãn biến cố A. Do đó:

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{1}{4}=0,25$$

(b) Đặt B là biến cố “xuất hiện 1 mặt sấp, 1 mặt ngửa”, ta có: $m_B = 2$ vì có hai trường hợp thỏa mãn biến cố B, đó là Sấp – Ngửa và Ngửa – Sấp. Do đó:

(c) Đặt C là biến cố “có xuất hiện mặt sấp” có nghĩa là “có xuất hiện ít nhất một mặt sấp”, ta có: $m_B = 3$ vì có ba trường hợp thỏa mãn biến cố C, gồm trường hợp có 1 mặt sấp và trường hợp có 2 mặt sấp.

$$P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{3}{4} = 0,75$$

(d) Đặt D là biến cố “không xuất hiện mặt ngửa”, có nghĩa hai mặt xuất hiện đều là sấp, ta thấy biến cố D hoàn toàn giống biến cố A, do đó $m_D = 1$ và:

$$P(D) = \frac{m_D}{n} = \frac{1}{4} = 0,25 = P(A)$$

Ví dụ 1.6. Gieo một con xúc sắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất để:

(a) Xuất hiện mặt 6 chấm.

(b) Xuất hiện mặt có số chấm là bội của 3.

Giải:

Khi gieo 1 con xúc sắc thì có 6 kết cục xảy ra là xuất hiện 1 chấm, 2 chấm, 3 chấm, 4 chấm, 5 chấm và 6 chấm. Trong đó, mỗi kết cục là duy nhất và các kết cục này đều có khả năng xảy ra như nhau. Vì vậy, có tất cả là 6 kết cục duy nhất đồng khả năng hay $n = 6$.

(a) Đặt A là biến cố “xuất hiện mặt 6 chấm”.

Biến cố A xảy ra chỉ khi xuất hiện 6 chấm hay số kết cục thuận lợi cho A là $m_A = 1$.

Vậy: $P(A) = \frac{1}{6}$

(b) Đặt B là biến cố “xuất hiện mặt có số chấm là bội số của 3” (hay chia hết cho 3)

Biến cố B xảy ra khi xuất hiện 3 chấm hoặc 6 chấm hay số kết cục thuận lợi cho cho B là $m_B = 2$.

Vậy: $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Ví dụ 1.7. Cho bảng thông tin về ngành học của nhân viên tại một công ty kinh doanh như sau (con số trong bảng là số lượng người):

Ngành học	Có học ngoại ngữ	Không học ngoại ngữ
Có học kinh tế	25	7
Không học về kinh tế	15	3

Tính xác suất để chọn ngẫu nhiên một người thì người đó:

(a) Có học về kinh tế (Biến cố A).

(b) Có học về kinh tế và ngoại ngữ (Biến cố B).

(c) Có học ít nhất một ngành (Biến cố C).

(d) Không học ngành nào (Biến cố D).

Giải:

Để biết số kết cục duy nhất đồng khả năng, cộng toàn bộ số người trong công ty, ta có: $n = 25 + 15 + 7 + 3 = 50$

Đề bài đã đặt tên biến cố, do đó tại đây ta không cần đặt lại.

(a) Số người có học về kinh tế là: $m_A = 25 + 7 = 32$

Xác suất người được chọn có học về kinh tế:

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{32}{50} = 0,64$$

(b) Số người có học về kinh tế và ngoại ngữ: $m_B = 25$

Xác suất người được chọn có học về kinh tế và ngoại ngữ:

$$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{25}{50} = 0,5$$

(c) Số người có học ít nhất một ngành: $m_C = 25 + 15 + 7 = 47$

Xác suất người được chọn có học ít nhất một ngành:

$$P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{47}{50} = 0,94$$

(d) Số người không học ngành nào: $m_D = 3$

Xác suất người được chọn không học ngành nào:

$$P(D) = \frac{m_D}{n} = \frac{3}{50} = 0,06$$

Nhận thấy hai biến cố C và D có tính chất "ngược nhau", và tổng xác suất của chúng bằng 1.

1.3.3. Phương pháp dùng tổ hợp

Trong nhiều trường hợp, để tính số kết cục duy nhất đồng khả năng và số kết cục thuận lợi, không dễ để liệt kê các trường hợp hoặc tổng hợp dưới dạng bảng như trong các ví dụ trên. Khi đó ta phải sử dụng công thức tổ hợp để tính số phần tử. Thường công thức tổ hợp được dùng khi từ một số phần tử chọn lấy hơn một phần tử.

Công thức tổ hợp

Từ một bộ n phần tử, chọn ra cùng lúc k phần tử ($0 \le k \le n$), thì số trường hợp sẽ là tổ hợp chập k của n, ký hiệu là C_n^k và được tính bằng công thức:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (1.3)$$

Trong đó dấu ! là ký hiệu cho giai thừa: $n! = n(n-1)(n-2)...2.1$

Công thức trên có vẻ rắc rối, với *k* nhỏ có thể dùng cách sau: Tổ hợp chập *k* của *n* là phân số mà trên là *k* số lùi dần từ *n*, và dưới là k số lùi từ *k* về 1.

Chẳng hạn:

$$C_{10}^2 = \frac{10\times 9}{2\times 1} \qquad C_{20}^3 = \frac{20\times 19\times 18}{3\times 2\times 1} \qquad C_{100}^4 = \frac{100\times 99\times 98\times 97}{4\times 3\times 2\times 1}$$

Một số trường hợp đặc biệt:

: từ n phần tử chỉ có 1 cách chọn 0 phần tử, là không chọn gì cả.

$C_n^1 = n$: từ n phần tử có n cách chọn 1 phần tử.

$C_n^n = 1$: từ n phần tử có 1 cách chọn n phần tử, là chọn tất cả.

Ví dụ 1.8. Một hộp có 10 sản phẩm, trong đó có 6 chính phẩm và 4 phế phẩm.

(a) Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra một sản phẩm, tính xác suất để lấy được chính phẩm.

(b) Lấy ngẫu nhiên đồng thời từ hộp ra hai sản phẩm, tính xác suất để lấy được hai chính phẩm.

(c) Lấy ngẫu nhiên đồng thời từ hộp ra hai sản phẩm, tính xác suất để lấy được một chính phẩm và một phế phẩm.

Giải:

(a) Đặt A là biến cố "lấy ra 1 sản phẩm thì được chính phẩm".

Khi lấy ngẫu nhiên từ hộp ra một sản phẩm ta có thể lấy được bất kì sản phẩm nào trong số 10 sản phẩm. Vì vậy, có tất cả là 10 kết cục duy nhất đồng khả năng hay $n = 10$.

Biến cố A xảy ra khi ta lấy được một trong số 6 chính phẩm nên số kết cục thuận lợi cho A là $m_A = 6$.

Vậy: $P(A) = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} = 0,6$

(b) Đặt B là biến cố "lấy ra 2 sản phẩm thì được 2 chính phẩm".

Khi lấy ngẫu nhiên từ hộp ra hai sản phẩm, ta có thể lấy được bất kì 2 sản phẩm trong số 10 sản phẩm tức là số kết cục duy nhất đồng khả năng trong phép thử bằng số tổ hợp chập 2 của 10 phần tử hay: $n = C_{10}^2$

Biến cố B xảy ra khi 2 sản phẩm được chọn bất kì trong 6 chính phẩm tức là số kết cục thuận lợi cho B bằng số tổ hợp chập 2 của 6 phần tử hay $m_B = C_6^2$

Vậy: $P(B) = \dfrac{C_6^2}{C_{10}^2} = \dfrac{\dfrac{6\times 5}{2\times 1}}{\dfrac{9\times 10}{2\times 1}} = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3} = 0,333$

(c) Đặt C là biến cố "lấy ra 2 sản phẩm thì được 1 chính phẩm 1 phế phẩm"

Dễ thấy số kết cục đồng khả năng vẫn là $n = C_{10}^2 = 45$

Số kết cục thuận lợi được tính là số trường hợp: trong 6 chính phẩm lấy ra được 1 chính phẩm và trong 4 phế phẩm lấy ra được 1 phế phẩm.

Vì vậy: $m_C = C_6^1 C_4^1 = 6\times 4 = 24$

Vậy: $P(C) = \dfrac{C_6^1 C_4^1}{C_{10}^2} = \dfrac{24}{45} = \dfrac{8}{15} = 0,533$

Ví dụ 1.9. Một công ty cần tuyển 4 người. Có 20 người nộp đơn trong đó có 8 nam và 12 nữ. Giả sử khả năng trúng tuyển của 20 người là như nhau, tính xác suất để:

(a) Có 2 nam trúng tuyển.

(b) Có ít nhất 3 nữ trúng tuyển.

Giải:

Phép thử là chọn ngẫu nhiên 4 người trong 20 người nên số kết cục duy nhất đồng khả năng là:

$$n = C_{20}^{4} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 4845$$

(a) Đặt A là biến cố "có 2 nam trúng tuyển" cũng chính là "có 2 nam trúng tuyển và hai nữ trúng tuyển", do đó biến cố A xảy ra khi chọn 2 nam trong số 8 nam **và** chọn 2 nữ trong số 12 nữ nên số kết cục thuận lợi cho A là:

$$m_A = C_8^2 C_{12}^2 = \frac{8\times7}{2\times1}\times\frac{12\times11}{2\times1} = 28\times66 = 1848$$

Vậy: $P(A) = \dfrac{C_8^2 C_{12}^2}{C_{20}^4} = \dfrac{1848}{4845} \approx 0,381$

(b) Đặt B là biến cố "có ít nhất 3 nữ trúng tuyển".

Biến cố B cũng chính là "có 3 nữ trúng tuyển hoặc có 4 nữ trúng tuyển", xảy ra khi chọn 3 nữ trong số 12 nữ **và** chọn 1 nam trong số 8 nam, **hoặc** chọn 4 nữ trong số 12. Do đó:

$$m_B = C_{12}^3 C_8^1 + C_{12}^4 = \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}\times8 + \frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1} = 220\times8+495 = 2255$$

Vậy: $P(B) = \dfrac{2255}{4845} \approx 0,465$

Ví dụ 1.10 (Tình huống dẫn nhập). Có hai bàn là A và B, bàn A có 5 hộp và trong đó có 3 hộp có phần thưởng; bàn B có 5 hộp và trong đó có 2 hộp bên trong có phần thưởng.

(a) Người chơi chọn một bàn và lấy một hộp, thì nên chọn bàn nào? Khi đó được/mất của người chơi là thế nào nếu lệ phí chơi là 10 nghìn và phần thưởng 500 nghìn?

(b) Từ bàn A lấy ra hai hộp, đánh giá khả năng: được hai phần thưởng, được một phần thưởng, không được phần thưởng nào.

Giải:

(a) Khi phải chọn một bàn, khả năng được phần thưởng khi chọn bàn A và khi chọn bàn B là:

- P(Có phần thưởng khi chọn bàn A) $= \dfrac{3}{5} = 0,6$
- P(Có phần thưởng khi chọn bàn B) =

Dễ thấy khả năng có thưởng khi chọn bàn A lớn hơn khi chọn bàn B, nên người chơi nên chọn bàn A. Lưu ý rằng khi chọn bàn A người chơi chỉ "dễ có thưởng