Chương 3: Toán xác suất

1. Giải tích tổ hợp

1.1. Tính giai thừa, hoán vị

a. Tính giai thừa

Số đếm được hình thành từ xa xưa trong lịch sử. Khi toán học phát triển, một số nhà toán học khi làm toán lại quan tâm đến tích của những số đếm đầu tiên như 1 x 2, 1 x 2 x 3... Người ta gọi tích của n số đếm đầu tiên là n giai thừa, kí hiệu là n!.

Ví dụ: 2! = 1 x 2 = 2, 3! = 1 x 2 x 3 = 6

Dựa vào khái niệm giai thừa, ta thấy (n + 1)! = (n + 1) x n!. Chẳng hạn với n = 4 thì 5! = 5 x 4!. Thật vậy, 5! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5, còn 5 x 4! = 5 x (1 x 2 x 3 x 4). Do đó 5! = 5 x 4!. Người ta gọi (n + 1)! = (n + 1) x n! là một công thức truy hồi. Muốn tính giai thừa của một số, ta tính theo giai thừa của số bé hơn. Biết 4! = 24, muốn tính 6!, ta có thể làm như sau: 5! = 5 x 4! = 5 x 24 = 120, 6! = 6 x 5! = 6 x 120 = 720.

Công thức giai thừa xuất hiện nhiều trong toán như hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp, lý thuyết số, giới hạn, số nguyên tố hay những khai triển toán học theo các chuỗi số... Chẳng hạn số cách xếp hàng ngang 3 bạn để chụp ảnh gọi là một hoán vị của 3, chính là 3! = 6.

Ví dụ với 3 bạn A, B, C thì 6 cách xếp hàng đó là ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Với ngôi sao 5 cánh thì số đoạn thẳng nối 2 điểm được gọi là một tổ hợp 2 của 5. Công thức tính là 5! : (2! x (5 - 2)!) hay 5! : (2! x 3!) = 120 : (2 x 6) = 120 : 12 = 10. Em hãy vẽ thử xem nhé. Ở một số loại máy tính cầm tay, người ta viết phím nCk để chỉ tổ hợp k của n. Với bài toán ngôi sao này thì đó là 5C2. Ta có thể tính 5C2 theo cách liệt kê: Chọn 5 điểm A, B, C, D, E và đếm số đoạn thẳng là AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE. Ta vẫn được đáp số là 10 đoạn thẳng.

Bây giờ ta giải thích tại sao phải có kí hiệu 0! và 1!. Theo khái niệm ở trên thì n! chỉ tích của n số đếm đầu tiên. Theo công thức truy hồi thì 2! = 2 x 1! hay 2 = 2 x 1!, từ đó 1! = 1. Đến bài toán tổ hợp, chẳng hạn tính số đoạn thẳng nối 2 điểm. Đáp số rõ ràng là 1. Tức là 2C2 = 1 hay 2! : (2! x (2 - 2)!) = 1. Từ đó 2 : (2 x 0!) = 1, 2 x 0! = 2, 0! = 1. Vậy để đầy đủ các khái niệm giai thừa cho các số tự nhiên, người ta quy ước 0! = 1! = 1

b. Hoán vị

Giả sử có n phần tử. Một hoán vị của n phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự n phần tử đó vào n vị trí khác nhau.

Như vậy việc lập một hoán vị có thể chia ra làm n giai đoạn: Giai đoạn 1 là việc lấy ra một phần tử từ n phần tử đã cho sẽ có n cách lấy.

Giai đoạn 2 là việc lấy ra một phần tử từ (n-1) phần tử còn lại sẽ có (n-1) cách lấy.

Giai đoạn thứ n là việc lấy ra một phần tử từ 1 phần tử còn lại cuối cùng sẽ có 1 cách lấy

Do đó theo luật tích thì số các hoán vị của n phần tử sẽ là

$P_n = n(n-1)(n-2)....1 = n!$

Ví dụ: Có ba phần tử (a, b, c) số hoán vị của 3 phần tử là:

$P_3 = 3.2.1 = 6$

Đó là các hoán vị abc, bac, acb, bca, cba, cab

1.2. Tổ hợp, chỉnh hợp

a. Tổ hợp

Cho tập E gồm n phần tử. Tổ hợp chập k từ n phần tử ($k \leq n$) là một nhóm gồm k phần tử không phân biệt thứ tự được lấy ra đồng thời từ tập đã cho và được ký hiệu: C_n^k

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Các tính chất:

a. $C_n^{n-k} = C_n^k$, k = $\overline{0,n}$

b. $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$, k = $\overline{1,n}$

Nhận xét: Hai tổ hợp khác nhau khi có ít nhất một phần tử khác nhau. Tổ hợp khác chỉnh hợp ở việc không lưu ý đến thứ tự sắp xếp của các phần tử.

Ví dụ

a. Mỗi đề thi gồm 3 câu hỏi lấy trong 25 câu hỏi cho trước. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề thi khác nhau?

b. Một đa giác lồi có *n* cạnh thì có bao nhiêu đường chéo?

Giải:

a. Số đoạn thẳng có 2 đầu mút là 2 đỉnh của đa giác lồi *n* đỉnh chính bằng số tổ hợp *n* chập 2, tức là C_n^2 . Do đó, số đường chéo của đa giác là C_n^2 - n

b. Số đề thi có thể lập nên là

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{3!22!} = \frac{25.24.23}{1.2.3} = 2300$$

b. Chỉnh hợp

* Chỉnh hợp: Chỉnh hợp chập k từ n phần tử là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử lấy ra từ n phần tử đã cho. Đó chính là một nhóm gồm k phần tử khác nhau được xếp theo thứ tự nhất định. Số các chỉnh hợp như vậy, ký hiệu là:

$$A_n^k = n(n-1) \ldots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ví dụ 1.2. Cho 6 chữ số 2, 3, 4, 5, 6,7. Hỏi

a. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số được thành lập từ 6 chữ số này?

b. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 5 được thành lập từ 6 chữ số này?

Giải:

*a.*Mỗi số gồm 3 chữ số thành lập từ 6 chữ số này là một chỉnh hợp lặp 6 chập 3. Vậy, số các số gồm 3 chữ số lập từ 6 chữ số này là:

$$F_6^3 = 6^3 = 216$$

b. Số chia hết cho 5 được thành lập từ 6 chữ số này phải có tận cùng là chữ số 5. Do đó, mỗi cách thành lập một số có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 5 là một cách thành lập một số có 2 chữ số khác nhau từ 5 chữ số còn lại là 2, 3, 4, 6, 7.

Vậy, số các số có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 5 thành lập từ 6 chữ số này là:

$$A_5^2 = \frac{5!}{3!} = 20$$

* Chỉnh hợp lặp: Chỉnh hợp lặp chập k từ n phần tử là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử có thể giống nhau lấy từ n đã cho. Đó chính là một nhóm gồm k phần tử có thể lặp lại và được xếp theo thứ tự nhất định. Số chỉnh hợp lặp như vậy, ký hiệu là $\bar{A}_n^k = n^k$

Ví dụ

a. Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 quyển sách vào 3 ngăn?

b. Một đề thi trắc nghiệm khách quan gồm 10 câu, mỗi câu có 4 phương án trả lời. Hỏi bài thi có tất cả bao nhiêu phương án trả lời?

Giải:

a. Mỗi cách sắp xếp 5 quyển sách vào 3 ngăn là một chỉnh hợp lặp 3 chập 5 (mỗi lần xếp 1 quyển sách vào 1 ngăn xem như chọn 1 ngăn trong 3 ngăn, do có 5 quyển sách nên việc chọn ngăn được tiến hành 5 lần). Vậy số cách sắp xếp là

$$\bar{A}_3^5 = 3^5 = 243$$

b. Mỗi phương án trả lời bài thi là một chỉnh hợp lặp 4 chập 10, nên số các phương án trả lời bài thi đó là

$$\overline{A}_4^{1} = 4^{10}$$

2. Phép thử, các loại biến cố và xác suất của biến cố

2.1. Phép thử, biến cố

Trong tự nhiên và xã hội, mỗi hiện tượng đều gắn liền với một *nhóm các điều kiện cơ bản* và các *hiện tượng đó chỉ có thể xảy ra* khi *nhóm các điều kiện cơ bản gắn liền với nó được thực hiện*. Do đó khi muốn nghiên cứu một hiện tượng ta cần thực hiện nhóm các điều kiện cơ bản ấy.

Nói cách khác, *mỗi hiện tượng trong tự nhiên chỉ có thể xảy ra khi một số điều kiện cơ bản liên quan đến nó được thực hiện. Việc thực hiện một số điều kiện liên quan này được gọi là **phép thử**. Mỗi phép thử có thể có nhiều kết quả khác nhau, các kết quả này gọi là **biến cố**.*

Ví dụ:

a) Bật công tắc đèn, bóng đèn có thể sáng hoặc không sáng. Việc bật công tắc đèn là *thực hiện một phép thử*, còn bóng đèn sáng hoặc không sáng là những *biến cố*.

b) Gieo một đồng xu (thực hiện một phép thử) hai biến cố có thể xảy ra: xuất hiện mặt sấp (biến cố A) hoặc xuất hiện mặt ngửa (biến cố B).

c) Bắn một viên đạn vào bia (thực hiện phép thử): viên đạn trúng đích hoặc viên đạn không trúng đích là các biến cố.

d) Gieo một con xúc xắc khối lập phương (thực hiện 1 phép thử) có thể có 6 khả năng xảy ra: xuất hiện mặt 1 chấm, xuất hiện mặt 2 chấm, …, xuất hiện mặt 6 chấm. Đó là 6 biến cố.

Vậy biến cố chỉ có thể xảy ra khi phép thử được thực hiện.

Phép thử ngẫu nhiên là phép thử khi thực hiện thì người ta không đoán biết trước được kết quả nào trong số các kết quả có thể có của nó sẽ xảy ra.

Phép thử trong lý thuyết phải hiểu theo một nghĩa rộng, đó là những thí nghiệm, sự quan sát, sự đo lường, … thậm chí là một quá trình sản xuất ra sản phẩm cũng được coi là một phép thử.

2.2. Các loại biến cố

Trong thực tế biến cố được chia làm ba loại.

a) *Biến cố ngẫu nhiên*: Là kết quả của phép thử ngẫu nhiên. Các biến cố ngẫu nhiên thường được ký hiệu bởi các chữ cái A, B, C …

b) *Biến cố chắc chắn*: Là biến cố nhất định sẽ xảy ra khi phép thử được thực hiện. Biến cố chắc chắn ký hiệu là chữ U.

c) *Biến cố không thể có*: Là biến cố không thể xảy ra khi phép thử được thực hiện. Biến cố không thể có được ký hiệu là chữ V.

Ví dụ:

a. Để cốc nước ở nhiệt độ bình thường ($20^0 c$) (*phép thử*), "nước đóng băng" là *biến cố không thể có.*

b.Gieo một xúc sắc (*thực hiện phép thử*) thì

Có các biến cố ngẫu nhiên như sau:

Xuấthiện mặt 1 chấm

…

Xuất hiện mặt 6 chấm

U: " xuất hiện số chấm nhỏ hơn 7" thì *U* là *biến cố chắc chắn*

V: " xuất hiện mặt 7 chấm" thì *V là biến cố không thể có*

Trong thực tế khi lấy ví dụ về biến cố chắc chắn và biến cố không thể có bao giờ cũng là những hiện tượng hiển nhiên hoặc vô lý trong khuôn khổ của phép thử.

Tất cả các biến cố mà chúng ta gặp trong thực tế đều thuộc về một trong ba loại biến cố trên, tuy nhiên biến cố ngẫu nhiên là biến cố thường gặp hơn cả.

2.3. Xác suất của biến cố

Ta đã thấy việc biến cố ngẫu nhiên xảy ra hay không xảy ra trong kết quả của phép thử là điều không thể đoán trước được, tuy nhiên bằng trực quan ta có thể nhận thấy *các biến cố ngẫu nhiên khác nhau có những khả năng xảy ra khác nhau*. Chẳng hạn biến cố "xuất hiện mặt sấp" khi tung một đồng xu sẽ có khả năng xảy ra lớn hơn nhiều so với biến cố "xuất hiện mặt một chấm" khi tung một con xúc xắc.

Khi lặp đi lặp lại nhiều lần cùng một phép thử trong những điều kiện như nhau, người ta thấy tính chất ngẫu nhiên của biến cố mất dần đi và *khả năng xảy ra của biến cố sẽ được thể hiện theo những quy luật nhất định*. Từ đó ta thấy có thể đo lường (định lượng) khả năng khách quan xuất hiện một biến cố nào đó.

Nói cách khác, khả năng xuất hiện của các biến cố ngẫu nhiên nói chung khác nhau, để đo khả năng này, người ta phải tìm một công cụ, công cụ đó chính là xác suất.

***Xác suất** của một biến cố là một con số đặc trưng khả năng khách quan xuất hiện biến cố đó khi thực hiện phép thử.*

Khả năng khách quan ở đây là do những điều kiện xảy ra của phép thử quy định chứ không tùy thuộc ý muốn chủ quan của con người. *Vậy bản chất của xác suất của một biến cố là một số xác định*.

Để tính xác suất của một biến cố, người ta xây dựng các định nghĩa về xác suất. Có nhiều định nghĩa khác nhau về xác suất đó là: định nghĩa cổ điển, định nghĩa thống kê, định nghĩa hình học và định nghĩa theo tiên đề.

3. Định lý cộng xác suất

Từ định nghĩa xác suất, ta đã suy ra được tính chất cơ bản sau của xác suất:

+ Nếu *A*, *B* là hai biến cố xung khắc thì

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

+ Tổng quát, nếu $A1, A2, \ldots, An$ là *n* biến cố xung khắc từng đôi thì

- Nếu *A*, *B* là hai biến cố bất kỳ thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
- Nếu *A*, *B*, *C* là ba biến cố bất kỳ thì

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

Ví dụ. Trong một lớp học, tỉ lệ học sinh đạt điểm giỏi môn Toán là 10%, tỉ lệ học sinh đạt điểm giỏi môn Anh là 9% và giỏi cả hai môn là 5%. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Tính xác suất để học sinh đó không đạt điểm giỏi cả môn Toán lẫn môn Anh?

Giải: Gọi *A* là biến cố "Sinh viên đó đạt điểm giỏi môn Toán", *B* là biến cố "Sinh viên đó đạt điểm giỏi môn Anh". Theo giả thiết thì

$$P(A) = 0{,}01,\ P(B) = 0{,}09 \text{ và } P(AB) = 0{,}05$$

gọi *C* là biến cố "Sinh viên đó không đạt điểm giỏi cả môn Toán lẫn môn Anh" thì $\overline{C}$ là biến cố "Sinh viên đó đạt điểm giỏi môn Toán hoặc môn Anh" hay $C = A \cup B$. Theo định lý cộng xác suất (1.3), ta có

$$P(C) = P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}01 + 0{,}09 - 0{,}05 = 0{,}14$$

Suy ra $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}14 = 0{,}86$

4. Định lý nhân xác suất

a. Xác suất có điều kiện

Xác suất có điều kiện của biến cố *A* với điều kiện *B* đã xảy ra, ký hiệu $P(A\,|\,B)$, được xác định bởi công thức: $P(A\,|\,B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

Ví dụ: Một hộp chứa 10 viên bi giống nhau, trong đó có 6 bi xanh và 4 bi trắng. Người thứ 1 lấy ngẫu nhiên 1 bi (không trả lại vào hộp). Tiếp đó, người thứ 2 lấy 1 bi. Tính xác suất để người thứ 2 lấy được bi xanh nếu biết người thứ 1 đã lấy được bi xanh?

Giải:

Gọi A là biến cố "Người thứ 1 lấy được bi xanh" và B là biến cố "Người thứ 2 lấy được bi xanh". Khi đó, xác suất P(B) sẽ phụ thuộc vào việc A xảy ra hay không xảy ra.

+ Nếu A đã xảy ra thì xác suất của B là 5/9 ký hiệu $P(B \mid A) = 5/9$

+ Nếu A không xảy ra thì xác suất của B là 6/9, ký hiệu $P(B \mid \overline{A}) = 6/9$

Như vậy, việc xảy ra hay không xảy ra của A đã ảnh hưởng đến khả năng xảy ra của B. Xác suất của B trong điều kiện A đã xảy ra được gọi là xác suất có điều kiện của B trong điều kiện A đã xảy ra, ký hiệu $P(B \mid A)$

b. Định lý nhân xác suất

Với A, B là 2 biến cố bất kỳ, ta có

$$P(A.B) = P(B) . P(A/B) = P(A) . P(B/A)$$

Tổng quát với $A_1, A_2, \dots, A_n$ là n biến cố bất kỳ, ta có:

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2)\dots P(A_n \mid A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

Hệ quả:

- Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau nếu và chỉ nếu $P(AB) = P(A).P(B)$.
- Tổng quát nếu $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ độc lập trong toàn thể thì

$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)\dots P(A_n)$

Ví dụ. Hai xạ thủ bắn mỗi người một viên vào cùng một mục tiêu. Xác suất trúng đích của xạ thủ 1 là 0,7; của xạ thủ 2 là 0,6. Tính xác suất để mục tiêu bị trúng đạn?

Giải: Gọi A là biến cố "xạ thủ 1 bắn trúng mục tiêu" B là biến cố "xạ thủ 2 bắn trúng mục tiêu" H là biến cố "mục tiêu bị trúng đạn".

Lúc đó, P(A) = 0,7, P(B) = 0,6 và $H = A \cup B$. Theo công thức cộng xác suất,

$$P(H) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Mặt khác, do hai biến cố A và B độc lập với nhau nên $P(AB) = P(A).P(B) = 0{,}7.0{,}6 = 0{,}4\ 2$

Suy ra, xác suất để mục tiêu bị trúng đạn là : P(H) = 0,7 + 0,6 – 0,42 = 0,88

5. Công thức Bernoull

5.1. Định nghĩa

Một phép thử trong đó biến cố A xảy ra với xác suất p và không xảy ra với xác suất $q = 1 - p$ được gọi là phép thử Bernoulli. Tiến hành lặp lại phép thử Bernoulli n lần độc lập nhau, ta có dãy n phép thử Bernoulli hay còn gọi là lược đồ Bernoulli.

Ví dụ: tỷ lệ nảy mầm của một loại hạt giống là 75%, người ta gieo thí điểm 10 hạt. Đó là dãy 10 phép thử Bernoulli.

5.2.Công thức Bernoulli

Bài toán đặt ra: Tìm xác suất để trong *n* phép thử Bernoulli, biến cố *A* xuất hiện *k* lần.

Định lý: Xác suất để trong *n* phép thử Bernoulli, biến cố *A* xuất hiện đúng *k* lần, ký hiệu $P_n(k)$, được tính theo công thức:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \text{ với } k = 0, 1, \ldots\ldots, n$$

Ví dụ1. Xác suất thành công của một thí nghiệm sinh học là 0,7. Một nhóm gồm 5 sinh viên cùng tiến hành thí nghiệm trên một cách độc lập nhau. Tính xác suất để trong 5 thí nghiệm:

a. Có đúng 3 thí nghiệm thành công.

a. Có từ 2 đến 4 thí nghiệm thành công.

b. Có ít nhất 1 thí nghiệm thành công.

Giải:

a. Gọi *A* là biến cố "thí nghiệm thành công". Khi đó, P(*A*) = *p* = 0,7.

Xác suất để có đúng 3 thí nghiệm thành công được tính theo công thức Bernoulli là

$$P(3;0,7) = C^3 (0,7)^3 .(0,3)^2 = 0{,}3087.$$

b. Xác suất để có từ 2 đến 4 thí nghiệm thành công là

$$P(2,4) = C^2 (0,7)^2 .(0,3)^3 + C_5 (0,7) .(0,3) + C_5 (0,7) .(0,3) = 0{,}80115.$$

c.Gọi *B* là biến cố "có ít nhất 1 thí nghiệm thành công". Khi đó,

$\overline{B}$ là biến cố "không có thí nghiệm nào thành công".

Ví dụ 2:

Sản phẩm trong một nhà máy được đóng thành từng kiện, mỗi kiện gồm 10 sản phẩm, số sản phẩm loại A trong các hộp là X có phân phối như sau:

X	6	8
P	0,9	0,1

Khách hàng chọn cách kiểm tra như sau: Từ mỗi kiện lấy ra 2 sản phẩm; nếu thấy cả 2 sản phẩm đều loại A thì mới nhận kiến đó; ngược lại thì loại kiện đó. Kiểm tra 144 kiện (trong rất nhiều kiện).

a. Tính xác suất để có 53 kiện nhận được

b. Tính xác suất để có từ 52 đến 56 kiện nhận được

c. Phải kiểm tra ít nhất bao nhiêu kiện để xác suất có ít nhất 1 kiện được nhân không nhỏ hơn 95% ?

Bài giải

Trước hết ta tìm xác suất p để một kiện nhận được

Gọi C là biến cố kiện hàng được nhận. Ta cần tìm p = P(C).

Từ giả thiết ta suy ra có hai loại kiện hàng:

Loại I: Gồm 6A, 4B chiếm 0,9 = 90%

Loại II: Goomg 8°, 2B chiếm 0,1 = 10%

Gọi A_1, A_2 lần lượt là các biến cố kiện hàng thuộc loại I, II khi đó A_1, A_2 là một hệ đầy đủ, xung khắc từng đôi và ta có

$P(A_1) = 0,9; P(A_2) = 0,1$

Theo công thức xác suất đầy đủ ta có:

$P(C) = P(A_1)\, P(C/A_1) + P(A_2)\, P(C/A_2)$

Theo giả thiết, từ mỗi kiện lấy ra 2 sản phẩm; nếu cả 2 sản phẩm thuộc loại A thì mới nhận kiện đó. Do đó

$$P(C/A_1) = P_2(2) = \frac{C_6^2 C_4^0}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}$$

$$P(C/A_2) = P_2(2) = \frac{C_8^2 C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}$$

Suy ra P(C) = 0,9 . 1/3 + 0,1 . 28/35 = 0,3622

Vậy xác suất để một kiện được nhận là p = 0,3622

Bây giờ, kiểm tra 144 kiện. Gọi X là số kiện được nhận trong 144 kiện được kiểm tra, thì X có phân phối nhị thức X ~ B(n,p) với n = 144, p = 0,3622. Vì n = 144 khá lớn và p = 0,3622 không quá gần 0 cũng không quá gần 1 nên ta có thể xem X có phân phối chuẩn như sau:

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Với μ = n.p = 144 . 0,3622 = 52,1568

$$\sigma^2 = \sqrt{npq} = \sqrt{144.0,3622.(1-0,3622)} = 5,7676$$

c.Phải kiểm tra ít nhất bao nhiêu kiện để xác suất có ít nhất 1 kiện được nhận không nhỏ hơn 95%?

Gọi n là số kiện cần kiểm tra và D là biến cố có ít nhất 1 kiện được nhận. Yêu cầu bài toán là xác định n nhỏ nhất sao cho $P(D) \geq 0,95$.

Biến cố đối lập của D là $\overline{D}$: không có kiện nào được nhận.

Theo chứng minh trên, xác suất để một kiện được nhận là p = 0,3622. Do đó

Theo công thức Bernoulli ta có:

$$P(D) = 1 – P(\overline{D}) = 1 - q^n = 1 – (1 – 0,3622)^n = 1 – (0,6378)^n.$$

Suy ra: $P(D) \geq 0,95 \leftrightarrow 1 – (0,3622)^n \geq 0,95$

$\leftrightarrow (0,3622)^n \leq 0,05$

$\leftrightarrow n \ln (0,3622)^n \leq \ln 0,05$

$\leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 0,05}{\ln (0,6378)} \approx 6,6612$

$\leftrightarrow n \geq 7$

Vậy kiểm tra ít nhất 7 kiện

Ta có $P(B) = P(0;0,7)C^0(0,7)^0 . (0,3)^5 = 0,00243$

Suy ra: $P(\overline{B}) = 1 – P(B) = 1 – 0,00243 = 0,99757$

6. Công thức xác suất đầy đủ và Bayes

a) Hệ đầy đủ các biến cố

Hệ các biến cố ($B_1, B_2, \ldots, B_n$) được gọi là đầy đủ nếu thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

- $B_1, B_2, \ldots, B_n$ là các biến cố xung khắc từng đôi một nghĩa là:

$B_iB_j = \phi \ (\forall i \neq j)$

$\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$

Hệ (B, $\overline{B}$) là một hệ đầy đủ, trong đó B là một biến cố bất kỳ.

b) Công thức xác suất đầy đủ

Giả sử ($B_1, B_2, \ldots, B_n$) là hệ đầy đủ các biến cố với $P(B_i) > 0$ với mọi i = 1, 2, …, n. Khi đó với bất kỳ biến cố A, ta có

$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \ldots + P(B_n)P(A/B_n)$

Ví dụ: Có 3 hộp giống nhau. Hộp thứ nhất đựng 10 sản phẩm, trong đó có 6 chính phẩm, hộp thứ hai đựng 15 sản phẩm, trong đó có 10 chính phẩm, hộp thứ ba đựng 20 sản phẩm, trong đó có 15 chính phẩm. Lấy ngẫu nhiên một hộp và từ đó lấy ngẫu nhiên một sản phẩm. Tìm xác suất để lấy được chính phẩm.

Lời giải:

Ký hiệu B_k là biến cố: “Sản phẩm lấy ra thuộc hộp thứ k“, k = 1, 2, 3 và A là biến cố: “Lấy được chính phẩm”.

Khi đó $B_1, B_2, \ldots, B_n$ là hệ đầy đủ các biến cố và