

# Chương 4:

## Một biến ngẫu nhiên

Nguyễn Linh Trung  
Trần Thị Thúy Quỳnh

Đại học Công nghệ, ĐHQGHN

- 1 Hàm phân bố tích lũy (CDF-Cumulative Distribution Function )
- 2 Hàm mật độ xác suất (Probability Density Function - PDF)
- 3 Các kỳ vọng
- 4 Một số biến ngẫu nhiên quan trọng
- 5 Hàm của biến ngẫu nhiên
- 6 Bất đẳng thức Markov và Chebyshev
- 7 Các phương pháp biến đổi

- 1 Hàm phân bố tích lũy (CDF-Cumulative Distribution Function )
- 2 Hàm mật độ xác suất (Probability Density Function - PDF)
- 3 Các kỳ vọng
- 4 Một số biến ngẫu nhiên quan trọng
- 5 Hàm của biến ngẫu nhiên
- 6 Bất đẳng thức Markov và Chebyshev
- 7 Các phương pháp biến đổi

# Hàm phân bố tích lũy (CDF)

## Definition (Cumulative Distribution Function)

Hàm phân bố tích lũy CDF của một biến ngẫu nhiên  $X$  được cho bởi:

$$F_X(x) = P[X \leq x], \quad \text{for } -\infty \leq x \leq \infty$$

## Example (CDF của biến ngẫu nhiên rời rạc)

Tung một đồng xu ba lần và ghi lại mặt sấp/ngửa của đồng xu ở mỗi lần tung. Gọi  $X$  là số các mặt ngửa trong ba lần tung. Tính CDF của  $X$ .

- Không gian mẫu:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

$$S_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

- Các xác suất tương ứng:

$$p_X(0) = 1/8; p_X(1) = 3/8; p_X(2) = 3/8; p_X(3) = 1/8$$

- Với  $x < 0$ :

$$F_X(x) = 0$$

- Với  $0 \leq x < 1$ :

$$F_X(x) = P[X = 0] = 1/8$$

- Với  $1 \leq x < 2$ :

$$F_X(x) = P[X = 0] + P[X = 1] = 1/8 + 3/8 = 4/8 = 1/2$$

- Với  $2 \leq x < 3$ :

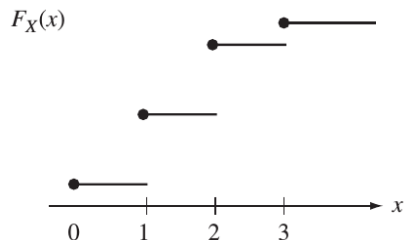
$$F_X(x) = 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8$$

- Với  $x \geq 3$ :

$$F_X(x) = P[X \leq 3] = 1/8 + 3/8 + 3/8 + 1/8 = 1$$

## ■ Tổng thể

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/8, & 0 \leq x < 1 \\ 1/2, & 1 \leq x < 2 \\ 7/8, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$



## Example (CDF of biến ngẫu nhiên liên tục)

Quay một mũi tên có gốc được gắn tại tâm của một hình tròn. Gọi  $\theta$  là góc mà mũi tên dừng lại,  $0 < \theta \leq 2\pi$ . Xác suất để  $\theta$  nằm trong một khoảng thuộc  $(0, 2\pi]$  tỷ lệ với chiều dài của khoảng đó. Biến ngẫu nhiên  $X$  được định nghĩa bởi  $X(\theta) = \theta/2\pi$ . Tìm CDF của  $X$ .

- Với  $x < 0$ :

$$F_X(x) = P[X \leq x] = P[\emptyset] = 0$$

- Với  $0 \leq x \leq 1$ :

$$F_X(x) = P[X \leq x] = P[\theta \leq 2\pi x] = 2\pi x/2\pi = x$$

(chuẩn hóa chiều dài bằng 1).

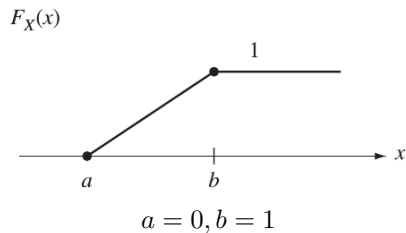
- Với  $x > 1$ :

$$F_X(x) = P[X \leq x] = P[0 \leq \theta \leq 2\pi] = 1$$



## ■ Tổng thể

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



# Tính chất của CDF

$$1 \quad 0 \leq F_X(x) \leq 1$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$$

$$4 \quad F_X(x) \text{ là hàm không giảm: nếu } a < b \text{ thì } F_X(a) \leq F_X(b)$$

$$5 \quad F_X(x) \text{ là hàm liên tục phải: } F_X(b) = F_X(b^+)$$

$$6 \quad P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$$

$$7 \quad P[X = a] = F_X(a) - F_X(a^-)$$

$$8 \quad P[X > x] = 1 - F_X(x)$$

Tất cả các tính chất này cho phép chúng ta tính tất cả các xác suất thông qua  $F_X(x)$ .

## CDF của biến ngẫu nhiên rời rạc

- CDF của một biến ngẫu nhiên rời rạc là một hàm bậc thang, liên tục phải của  $x$ , các bước nhảy được thực hiện tại các điểm  $x_0, x_1, x_2, \dots$

$$F_X(x) = \sum_{x_k \leq x} p_X(x_k) = \sum_k p_X(x_k) u(x - x_k)$$

với  $p_X(x_k)$  là hàm xác suất khối PMFs và  $u(x)$  là hàm nhảy bậc đơn vị.

- Các xác suất được tính như tổng của PMF tại các điểm rời rạc.

## CDF của biến ngẫu nhiên liên tục

- CDF của một biến ngẫu nhiên liên tục là liên tục tại mọi điểm và được cho bởi:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(\lambda) d\lambda$$

với  $f(x)$  là hàm không âm.

- Các xác suất được tính bởi tích phân của "mật độ xác suất" trong một khoảng số thực.

## CDF của biến ngẫu nhiên kết hợp

- CDF của một biến ngẫu nhiên kết hợp không chỉ nhảy bậc tại các điểm rời rạc có thể đếm được  $x_0, x_1, x_2, \dots$ , mà còn tăng liên tục trên ít nhất một khoảng giá trị  $x$  nào đó:

$$F_X(x) = pF_d(x) + (1 - p)F_c(x)$$

với  $0 < p < 1$  là xác suất biến ngẫu nhiên là rời rạc/liên tục,  $F_d(x)$  là CDF của biến ngẫu nhiên rời rạc và  $F_c(x)$  là CDF của biến ngẫu nhiên liên tục.

## Example (Biến ngẫu nhiên kết hợp)

Thời gian đợi  $X$  của một hành khách tại trạm chờ taxi bằng 0 nếu hành khách thấy taxi đỗ tại trạm chờ, và phân bố đều trong khoảng  $[0, 1]$  (giờ) nếu không có taxi nào ở trạm chờ. Gọi  $p$  là xác suất để taxi đang đỗ ở trạm chờ khi hành khách tới. Tính CDF của  $X$ .

- Sử dụng định lý xác suất tổng cộng:

$$F_X(x) = P[X \leq x | \text{thấy taxi}]p + P[X \leq x | \text{không thấy taxi}](1 - p)$$

- Phần rời rạc

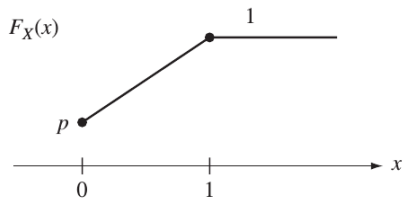
$$F_d(x) = P[X \leq x | \text{thấy taxi}] = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

## ■ Phần liên tục

$$F_c(x) = P[X \leq x | \text{không thấy taxi}] = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

## ■ CDF tổng thể

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ p + (1-p)x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



# Nội dung

- 1 Hàm phân bố tích lũy (CDF-Cumulative Distribution Function )
- 2 Hàm mật độ xác suất (Probability Density Function - PDF)
- 3 Các kỳ vọng
- 4 Một số biến ngẫu nhiên quan trọng
- 5 Hàm của biến ngẫu nhiên
- 6 Bất đẳng thức Markov và Chebyshev
- 7 Các phương pháp biến đổi



# Hàm mật độ xác suất (Probability Density Function - PDF)

## Definition

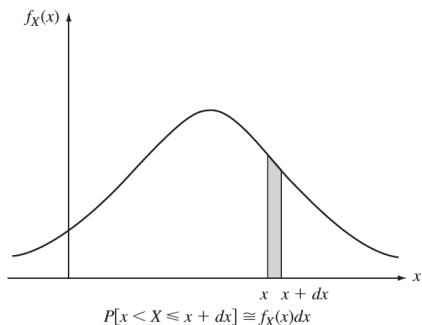
Hàm mật độ xác suất (PDF) của  $X$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

- Xét xác suất để  $X$  nằm trong một khoảng nhỏ  $(x, x + h]$ , ta có:

$$P[x < X \leq x + h] = F_X(x + h) - F_X(x) = \frac{[F_X(x + h) - F_X(x)]}{h} h$$

Khi  $h$  rất nhỏ thì  $h \rightarrow dx$  và  $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$ , hay PDF biểu diễn **mật độ** xác suất tại điểm  $x$  và  $P[x < X \leq x + h] \cong f_X(x)dx$ .



## Example (PDF biến ngẫu nhiên liên tục)

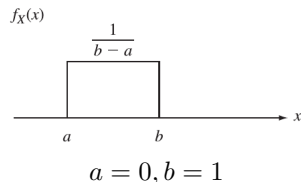
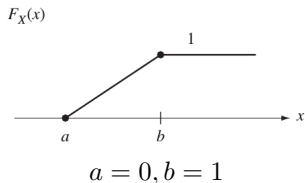
Quay một mũi tên có gốc được gắn tại tâm của một hình tròn. Gọi  $\theta$  là góc mà mũi tên dừng lại,  $0 < \theta \leq 2\pi$ . Xác suất để  $\theta$  nằm trong một khoảng thuộc  $(0, 2\pi]$  tỷ lệ với chiều dài của khoảng đó. Biến ngẫu nhiên  $X$  được định nghĩa bởi  $X(\theta) = \theta/2\pi$ . Tìm PDF của  $X$ .

- CDF của  $X$  là:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

- PDF là vi phân của CDF nên:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$



# Tính chất của PDF

- 1 Do CDF là hàm không giảm của  $x$ , nên PDF là một hàm **không âm**:

$$f_X(x) \geq 0$$

- 2 Xác suất của một khoảng  $[a, b]$  là **diện tích** được chặn bởi  $f_X(x)$  trong khoảng đó:

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(x) dx$$

