TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC

TS. BÙI XUÂN DIỆU

Bài Giảng

GIẢI TÍCH III

(lưu hành nội bộ)

CHUỖI - PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN - PHƯƠNG PHÁP TOÁN TỬ LAPLACE

Tóm tắt lý thuyết, Các ví dụ, Bài tập và lời giải

Hà Nội - 2017

(bản cập nhật Ngày 28 tháng 8 năm 2017)

Tập Bài giảng vẫn đang trong quá trình hoàn thiện và có thể chứa những lỗi đánh máy, những lỗi kí hiệu và những chỗ sai chưa được kiểm tra hết. Tác giả mong nhận được sự đóng góp ý kiến để tập Bài giảng được hoàn thiện. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ “dieu.buixuan@hust.edu.vn”

Hà Nội, Ngày 28 tháng 8 năm 2017.

MỤC LỤC

Mục lục

CHƯƠNG 1

CHUỖI (11LT+11BT)

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ CHUỖI SỐ

Định nghĩa 1.1. *Cho* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *là một dãy số. Tổng vô hạn*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

được gọi là một chuỗi số và được kí hiệu là $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, trong đó* a_n *được gọi là số hạng tổng quát và* $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *được gọi là tổng riêng thứ* n*.*

i) Nếu dãy số $\{S_n\}$ *là hội tụ và* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ *tồn tại, thì ta nói chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là hội tụ và có tổng bằng* S *và viết*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

ii) Ngược lại, ta nói chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là phân kỳ.*

Ví dụ 1.1. *Hãy xét ví dụ trực quan đầu tiên về chuỗi số là như sau. Chúng ta bắt đầu với khoảng* $[0,1]$*. Chia đôi khoảng này ra thì ta được hai khoảng là* $[0,1/2]$ *và* $(1/2,1]$*, mỗi khoảng có độ dài bằng* $1/2$*. Sau đó ta lại tiếp tục chia đôi khoảng* $[0,1/2]$*, thì ta sẽ được hai khoảng, mỗi khoảng có độ dài bằng* $1/4$*. Tiếp tục kéo dài quá trình này ta sẽ được chuỗi số sau:*

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Ví dụ 1.2. *Xét chuỗi số sau:*

$$1 + 2 + \cdots + n + \cdots$$

Chuỗi số này có tổng riêng thứ n bằng $n(n+1)/2$ nên tiến ra vô cùng khi n tiến ra vô cùng. Nói cách khác, chuỗi số này là phân kỳ.

Ví dụ 1.3. *Xét sự hội tụ và tính tổng (nếu có) của chuỗi cấp số nhân $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots$ Ta có*

$$\begin{cases} S_n &= a + aq + \cdots + aq^{n-1} \\ qS_n &= aq + aq^2 + \cdots + aq^n \end{cases}$$

Do đó $S_n = a\frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1)$ và

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \frac{a}{1-q} & \text{nếu } |q| < 1 \\ \infty & \text{nếu } |q| > 1. \end{cases}$$

- *Trường hợp $q = 1$ dễ thấy chuỗi số đã cho phân kỳ vì có tổng riêng thứ n bằng an.*
- *Trường hợp $q = -1$ ta có $S_n = \begin{cases} 0, & \text{nếu } n \text{ chẵn}, \\ a, & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$ nên không tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.*

Kết luận: chuỗi cấp số nhân đã cho hội tụ và có tổng bằng $\frac{a}{1-q}$ nếu $|q| < 1$ và phân kỳ nếu $|q| \geq 1$.

Ví dụ 1.4. *Viết số thực sau $2.3\overline{17} = 2.3171717\ldots$ dưới dạng phân số.*

$$2.3\overline{17} = 2.3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$

Sau số hạng đầu tiên thì chuỗi đã cho là một cấp số nhân với $a = \frac{17}{10^3}$ và $q = \frac{1}{10^2}$. Do đó

$$2.3\overline{17} = \frac{\frac{17}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{1147}{495}.$$

Ví dụ 1.5. *Chứng minh rằng chuỗi số sau hội tụ và tính $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Trước hết ta phân tích $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Ta có*

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

Định lý 1.1 (Điều kiện cần để chuỗi hội tụ).
Nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là hội tụ, thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Chứng minh. Đặt $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, ta có $a_n = S_n - S_{n-1}$. Vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên dãy số $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ là hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$. Vì $n-1 \to \infty$ khi $n \to \infty$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$. Do đó

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \qquad \blacksquare$$

Chú ý 1.1.

1. *Mệnh đề đảo của Định lý 1.1 là không đúng. Chẳng hạn như chuỗi điều hòa sau đây* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *có* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \to 0$ *khi* $n \to \infty$*, nhưng chuỗi này là phân kỳ (Xem Ví dụ 2.1 dưới đây).*

2. *Định lý 1.1 cho chúng ta một điều kiện đủ để kiểm tra một chuỗi là phân kỳ. Cụ thể, nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ *không tồn tại hoặc* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ *thì chuỗi đã cho là phân kỳ. Chẳng hạn như chuỗi số sau đây* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ *có* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$ *nên chuỗi đã cho là phân kỳ. Tuy nhiên lưu ý rằng nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ *thì chúng ta chưa có kết luận gì về tính hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. *Thay đổi một số số hạng đầu tiên của một chuỗi thì không làm ảnh hưởng đến tính hội tụ hay phân kì của chuỗi số đó. Chẳng hạn như hai chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=2016}^{\infty} a_n$ *sẽ có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ.*

Ví dụ 1.1. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ là phân kì bởi vì khi $n \to \infty$

$$u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1$$

Ví dụ 1.2 (Giữa kì, K61). *Xét sự hội tụ của các chuỗi số*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos\frac{1}{n}$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos\frac{2}{n}$.

Định lý 1.2 (Các phép toán trên chuỗi số hội tụ). *Nếu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *là các chuỗi số hội tụ, thì chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ *cũng là một chuỗi số hội tụ và*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Bài tập 1.1. *Chứng minh rằng chuỗi số sau hội tụ và tính* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2016}{n(n+1)}+\frac{2017}{2^n}\right)$.

Bài tập 1.2. *Xác định xem chuỗi sau đây là hội tụ hay phân kỳ. Nếu nó hội tụ, tính tổng của chúng.*

(a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^3}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+3}\right)$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

(f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n}$.

[Gợi ý]

(a) Tách $\frac{2}{n^2-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$.

(b) Tách $\ln\frac{n}{n+1}=\ln n-\ln(n+1)$.

(c) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^n}{n^3}=\infty$ (bằng cách chuyển qua giới hạn của hàm số $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^x}{x^3}=\infty$). Chuỗi đã cho phân kì.

(d) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ln\frac{1}{2}$. Chuỗi đã cho phân kì.

(e) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$. Chuỗi đã cho phân kì.

(f) Tách $\frac{1}{n^3-n}=\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

Bài tập 1.3. *Xét sự hội tụ và tính tổng (nếu có) của các chuỗi sau*

(a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$

(b) $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots$

(c) $\frac{1}{9}+\frac{2}{225}+\cdots+\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}+\cdots$

[Gợi ý]

(a) Viết chuỗi số đã cho thành tổng của hai chuỗi cấp số nhân (hội tụ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$.

(b) Tách $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$.

(c) Tách $\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$.

§2. CHUỖI SỐ DƯƠNG

Định nghĩa 1.1. *Chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *với* $a_n > 0$ *được gọi là một là chuỗi số dương.*

Nhận xét rằng một chuỗi số dương là hội tụ khi và chỉ khi dãy các tổng riêng S_n của chúng là bị chặn. Trong bài này chúng ta sẽ nghiên cứu các tiêu chuẩn để một chuỗi số dương là hội tụ.

2.1 Tiêu chuẩn tích phân

Định lý 2.1. *Cho* $f(x)$ *là một hàm số liên tục, dương, giảm trên đoạn* $[1, \infty)$ *và* $a_n = f(n)$*. Khi đó chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và tích phân suy rộng* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ. Nói cách khác,*

i) Nếu $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *là hội tụ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là hội tụ.*

ii) Nếu $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *là phân kỳ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là phân kỳ.*

Chứng minh. Vì $f(x)$ là hàm số giảm nên

$$u_{n+1} = f(n+1) \le f(x) \le f(n) = u_n, \quad x \in [n, n+1], n = 1, 2, \cdots$$

Lấy tích phân từ n đến $n+1$ ta được

$$u_{n+1} \le \int\limits_n^{n+1} f(x)dx \le u_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Lấy tổng từ 1 đến $M-1$ ta được

$$u_2 + u_3 + \cdots + u_M \le \int\limits_1^2 f(x)dx + \int\limits_2^3 f(x)dx + \cdots + \int\limits_{M-1}^{M} f(x)dx \le u_1 + u_2 + \cdots + u_{M-1}$$

hay

$$u_2 + u_3 + \cdots + u_M \le \int\limits_1^M f(x)dx \le u_1 + u_2 + \cdots + u_{M-1}. \tag{1.1}$$

i) Nếu $\int_0^{\infty} f(x)dx$ hội tụ, tức tồn tại $\lim\limits_{M\to\infty} \int_1^M f(x)dx = S$ thì từ bất đẳng thức (1.1) ta có $S_M - a_1 = u_2 + u_3 + \cdots + u_M$ là một dãy số tăng và bị chặn trên bởi S nên tồn tại $\lim\limits_{M\to\infty} (S_M - a_1) = A$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và có tổng bằng $A + a_1$.

ii) Nếu $\int_0^\infty f(x)dx$ phân kì, trong trường hợp này vì hàm $f(x)$ dương nên điều này có nghĩa là $\lim\limits_{M\to\infty}\int_1^M f(x)dx = +\infty$. Bất đẳng thức (1.1) suy ra $\lim\limits_{M\to\infty} S_{M-1} = +\infty$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì. ■

Chú ý 1.1. *Khi sử dụng tiêu chuẩn tích phân, không nhất thiết chuỗi số phải bắt đầu từ* $n = 1$*. Chẳng hạn như chúng ta có thể kiểm tra sự hội tụ của chuỗi số* $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$ *bằng cách kiểm tra sự hội tụ của tích phân suy rộng* $\int_4^\infty \frac{1}{(x-1)^2}dx$.

Tiêu chuẩn tích phân là một tiêu chuẩn rất hữu ích, đặc biệt là khi $a_n = f(n)$ với $f(x)$ là một hàm số sơ cấp mà nguyên hàm có thể tính được và cũng là một hàm số sơ cấp. Chẳng hạn như, xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$. Hàm số $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ là liên tục, dương, và giảm trên đoạn $[1,\infty)$. Xét tích phân suy rộng

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x|_1^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

Theo tiêu chuẩn tích phân, chuỗi số đã cho hội tụ.

Ví dụ 2.1. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0)$.

Chứng minh. Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ là liên tục, dương, và giảm trên $[1,\infty)$. Dễ dàng kiểm tra thấy rằng tích phân suy rộng $\int_1^\infty f(x)dx$ là hội tụ nếu $\alpha > 1$ và phân kỳ nếu $0 < \alpha \le 1$. Áp dụng tiêu chuẩn tích phân ta có chuỗi đã cho hội tụ nếu $\alpha > 1$ và phân kỳ nếu $0 < \alpha \le 1$. ■

Chú ý 1.2.

a) *Hàm zeta được định nghĩa như sau* $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ *và được sử dụng nhiều trong lý thuyết số. Nhà toán học Thụy Sĩ Euler là người đầu tiên tính được chính xác* $\zeta(2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$*. Ông cũng là người tìm ra công thức* $\zeta(4) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$*. Hai công thức này sẽ được chứng minh ở Hệ quả 4.1(Bài về chuỗi hàm số) và Hệ quả 6.1 (Bài về chuỗi Fourier).*

b) *Tổng* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và giá trị của tích phân suy rộng* $\int_1^\infty f(x)dx$ *là khác nhau. Chẳng hạn như* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ *trong khi đó* $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

Bài tập 2.1. *Dùng tiêu chuẩn tích phân chứng minh rằng chuỗi* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ *là hội tụ khi và chỉ khi* $p > 1$.

Bài tập 2.2. *Dùng tiêu chuẩn tích phân để xác định xem các chuỗi số sau đây là hội tụ hay phân kỳ.*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\frac{1}{n}}{(n+2)^2}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^3}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{(n+3)^2}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{n^2}$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}$ g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$ h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{3n^2}$

Bài tập 2.3. *Giải thích tại sao không thể dùng tiêu chuẩn tích phân để xác định xem chuỗi sau đây là hội tụ hay phân kỳ.*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{\sqrt{n}}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{1+n^2}$

2.2 Các tiêu chuẩn so sánh

Định lý 2.2 (Tiêu chuẩn so sánh 1). *Cho hai chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ *có* $a_n \le b_n$ *với mọi* n *hoặc kể từ một số* n *nào đó. Khi đó*

i) Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ *là hội tụ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *cũng là hội tụ.*

ii) Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *là phân kỳ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ *cũng là phân kỳ.*

Chứng minh. Từ giả thiết suy ra

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le b_1 + b_2 + \cdots + b_n = B_n. \tag{1.2}$$

i) Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ hội tụ, nghĩa là tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty}B_n = B$ và $B_n \le B$ với mọi n. Bất đẳng thức (1.2) chứng tỏ dãy tổng riêng A_n là một dãy số bị chặn, hơn nữa nó tăng do tính chất của chuỗi số dương, nên tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n = A$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ.

ii) Bạn đọc có thể tự chứng minh một cách đơn giản cũng dựa vào bất đẳng thức (1.2). ∎

Ví dụ 2.1. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+1}$.

Chứng minh. Ta có $\frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{n^2}$. Mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ là hội tụ theo Ví dụ 2.1, nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+1}$ cũng là hội tụ. ∎

Ví dụ 2.2. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Chứng minh. Ta có $\ln n < n$ với mọi $n \geq 2$. Do đó $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$. Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là phân kỳ theo Ví dụ 2.1, nên chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ là phân kỳ. ■

Ví dụ 2.3 (Giữa kì, K61). *Xét sự hội tụ của các chuỗi số*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2n+1)}$

b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(2n-1)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+1}}$.

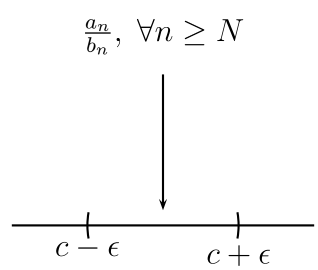
d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n^3+1}}$.

Định lý 2.3 (Định lý so sánh 2). *Cho hai chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *thỏa mãn*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0.$$

Khi đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ.*

Chứng minh. Hình dung rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ nghĩa là với mọi $\epsilon > 0$ thì từ một lúc nào đó toàn bộ số hạng của dãy $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n \geq N}$ sẽ chui vào trong khoảng $(c-\epsilon, c+\epsilon)$.



Hình 2.3

Theo giả thiết, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số N sao cho

$$c - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \epsilon \Leftrightarrow (c-\epsilon)b_n < a_n < (c+\epsilon)b_n.$$

Lấy tổng từ $n = N$ đến ∞ ta được

$$(c-\epsilon)\sum_{n=N}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq (c+\epsilon)\sum_{n=N}^{\infty} b_n. \tag{1.3}$$

Không mất tính tổng quát số ϵ có thể chọn sao cho $c - \epsilon > 0$. Khi đó

- vế phải của bất đẳng thức (1.3) chứng tỏ rằng nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ,
- vế trái của bất đẳng thức (1.3) chứng tỏ rằng nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ. ■

Chú ý 1.1.

a) Các trường hợp đặc biệt

- *Nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ *và chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *hội tụ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng hội tụ. Điều này dễ hiểu vì* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ *suy ra với* n *đủ lớn thì* $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ *hay* $a_n \leq b_n$ *với mọi* $n \geq N$ *nào đó.*
- *Nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ *và chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *phân kì thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng phân kì. Điều này cũng dễ hiểu vì* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ *suy ra với* n *đủ lớn thì* $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$ *hay* $a_n \geq b_n$ *với mọi* $n \geq N$ *nào đó*

b) Cũng giống như TPSR, khi xét sự hội tụ của chuỗi số người ta chỉ quan tâm đến "dáng điệu" của số hạng tổng quát a_n *tại vô cùng. Tiêu chuẩn so sánh thường được sử dụng để so sánh chuỗi số đã cho với một trong hai chuỗi số sau đây:*

- *Chuỗi cấp số nhân* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \begin{cases} \text{hội tụ nếu } |q| < 1, \\ \text{phân kì nếu } |q| \geq 1. \end{cases}$
- *Chuỗi hàm zeta* $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{hội tụ nếu } \alpha > 1, \\ \text{phân kì nếu } \alpha \leq 1. \end{cases}$

Ví dụ 2.1. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}}$.

Chứng minh. Số hạng trội (chiếm ưu thế) của tử số là n^2 và số hạng trội của mẫu số là $\sqrt{n^5} = n^{5/2}$. Điều đó gợi ý chúng ta so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^5}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$. Ta có

$$a_n = \frac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}}, \quad b_n = \frac{1}{n^{1/2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+n).n^{1/2}}{\sqrt{n^5+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^5}}} = 1.$$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ là phân kỳ theo Ví dụ 2.1 nên chuỗi đã cho cũng phân kỳ. ■

Ví dụ 2.2. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$.

Chứng minh. Số hạng trội (chiếm ưu thế) của tử số là 3^n và số hạng trội của mẫu số là 5^n. Điều này gợi ý chúng ta so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$. Ta có

$$a_n = \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}, \quad b_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2^n+3^n)5^n}{(4^n+5^n)3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1} = 1.$$

Mà chuỗi cấp số nhân $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ là hội tụ theo Ví dụ 1.3, do đó chuỗi số đã cho cũng là hội tụ. ■

Chú ý 1.2. *Tiêu chuẩn so sánh thường được sử dụng để xét sự hội tụ của các chuỗi số có dạng sau:*

1. *Chuỗi có số hạng tổng quát là một phân thức, trong đó tử số và mẫu số đều là các đa thức của n hoặc là các lũy thừa của n, chẳng hạn*

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0+a_1n^{\alpha_1}+a_2n^{\alpha_2}+\cdots+a_mn^{\alpha_m}}{b_0+b_1n^{\beta_1}+b_2n^{\beta_2}+\cdots+b_kn^{\beta_k}}, \text{ với } 0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_m, 0<\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_k.$$

   Khi đó số hạng trội của tử số là $a_mn^{\alpha_m}$ và số hạng trội của mẫu là $b_kn^{\beta_k}$. Điều này gợi ý chúng ta so sánh chuỗi đã cho với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha_m}}{n^{\beta_k}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta_k-\alpha_m}}$. Theo Ví dụ 2.1, chuỗi đã cho là hội tụ nếu $\beta_k-\alpha_m>1$ và phân kỳ nếu $\beta_k-\alpha_m\le 1$.

2. *Chuỗi có số hạng tổng quát là một phân thức, trong đó tử số và mẫu số đều là tổng của các lũy thừa với số mũ là n, chẳng hạn*

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_1a_1^n+\alpha_2a_2^n+\cdots+\alpha_ma_m^n}{\beta_1b_1^n+\beta_2b_2^n+\cdots+\beta_kb_k^n}, \text{ với } 0<a_1<a_2<\cdots<a_m, 0<b_1<b_2<\cdots<b_k.$$

   Khi đó số hạng trội của tử số là $\alpha_ma_m^n$ và số hạng trội của mẫu số là $\beta_kb_k^n$. Điều này gợi ý chúng ta so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_m}{b_k}\right)^n$. Theo Ví dụ 1.3, chuỗi đã cho hội tụ nếu $\frac{a_m}{b_k}<1$ và phân kỳ nếu $\frac{a_m}{b_k}\ge 1$.

3. *Một dạng chuỗi khác cũng sử dụng tiêu chuẩn so sánh, đó là các chuỗi số có sử dụng đến các VCB tương đương hoặc khai triển Maclaurin (trong học phần Giải tích I). Chẳng hạn như, xét sự hội tụ của chuỗi số*

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right).$$

Xuất phát từ công thức khai triển Maclaurin của hàm số $\sin x$*:*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

ở đó $o(x^3)$ *là kí hiệu VCB bậc cao hơn* x^3*, ta có*

$$x - \sin x = \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{6} \textit{ khi } x \to 0.$$

Khi $n \to \infty$ *thì* $\frac{1}{n} \to 0$*, do đó*

$$\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{6n^3} \textit{ khi } n \to \infty.$$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ *hội tụ, nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi số đã cho cũng hội tụ. Một cách tương tự, xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{e} - 1 - \frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{n-1}{n^2-n+1}.$$

Một số khai triển Maclaurin

- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Một số VCB tương đương hay dùng khi $x \to 0$

- $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \dfrac{a^x - 1}{\ln a} \sim \ln(1+x)$,
- $\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1 \sim \ln\sqrt[m]{1+\alpha x} = \dfrac{1}{m}\ln(1+\alpha x) \sim \dfrac{\alpha x}{m}$,
- $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$.

Ví dụ 2.3 (Giữa kì, K61). *Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số* *a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \tan(\pi\sqrt{n^2+1})$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \tan(\pi\sqrt{n^2+3})$.

Ví dụ 2.4.

a) Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{\pi}{2^n}$

Đây là một chuỗi số dương, khi $n\to\infty$, ta có $\arctan\frac{\pi}{2^n}\sim\frac{\pi}{2^n}$. Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n} = \pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ là hội tụ, nên chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{\pi}{2^n}$ cũng hội tụ.

b) Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^\alpha}$

Khi $n\to\infty$: $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^\alpha} = \frac{2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})n^\alpha}\sim\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$, do đó

Nếu $\alpha>\frac{1}{2}$: chuỗi số là hội tụ; nếu $\alpha\le\frac{1}{2}$, chuỗi số là phân kì.

c) Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$.

Để sử dụng tiêu chuẩn so sánh đối với các chuỗi số kiểu này, chúng ta ghi nhớ hai giới hạn quan trọng sau.

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty, (a>1, \forall\alpha)$, hay $n^\alpha\le e^n$ khi n là đủ lớn.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^\beta n} = +\infty, (\forall\beta)$, hay $\ln^\beta n\le n$ khi n là đủ lớn.

Nói một cách khác thì khi $n\to\infty$, hàm số mũ, hàm đa thức và hàm số logarit của n đều là các VCL. Tuy nhiên, hàm số mũ tiến ra vô cùng "nhanh hơn" hàm đa thức, và hàm đa thức "nhanh hơn" hàm số logarit.

Chúng ta sẽ dùng giới hạn đầu tiên: $(\sqrt{n})^\alpha\le e^{\sqrt{n}}$ khi n đủ lớn, hay là tương đương, $e^{-\sqrt{n}}\le n^{-\frac{\alpha}{2}}$, với n đủ lớn và với mọi α. Chọn $\alpha=4$, thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ là hội tụ; nên chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ cũng là hội tụ.

Bài tập 2.4. *Dùng tiêu chuẩn so sánh để xét sự hội tụ của các chuỗi số sau*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+2)^4}$ *2)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2016^n}{2015^n+2017^n}$ *3)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin^2 n}{1+n^3}$ *4)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+3}}$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ *6)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sin n}{\sqrt[3]{n^7+1}}$ *7)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n+1}{n^3+n+1}$ *8)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+\frac{1}{3n^2}\right]$

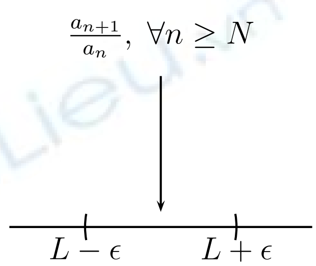
2.3 Tiêu chuẩn d'Alambert

Định lý 2.4. *Giả sử tồn tại* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. *Khi đó*

i) Nếu $L < 1$ *thì chuỗi đã cho hội tụ.*

ii) Nếu $L > 1$ *thì chuỗi đã cho phân kỳ.*

Chứng minh. 1. Hình dung rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ nghĩa là với mọi $\epsilon > 0$ thì từ một lúc nào đó toàn bộ số hạng của dãy $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n\geq N}$ sẽ chui vào trong khoảng $(L-\epsilon, L+\epsilon)$.



Hình 2.4

Nếu $L < 1$ ta chọn số $\epsilon > 0$ bất kì nào đó sao cho $L + \epsilon < 1$. Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ nên tồn tại số N sao cho

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon, \; \forall n \geq N.$$

Do đó

$$a_n < (L+\epsilon)a_{n-1} < (L+\epsilon)^2 a_{n-2} < \cdots < a_N (L+\epsilon)^{n-N} = \frac{a_N}{(L+\epsilon)^N}.(L+\epsilon)^n, \; \forall n > N.$$

Chuỗi cấp số nhân $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (L+\epsilon)^n$ hội tụ ($L+\epsilon < 1$) nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

2. Nếu $L > 1$ thì $u_{n+1} > u_n$ với n đủ lớn, chẳng hạn với mọi $n \geq N$. Khi đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \geq a_N > 0$. Chuỗi đã cho phân kì theo tiêu chuẩn điều kiện cần. ■

Chú ý:

- Nếu $L = 1$ thì không kết luận được gì về sự hội tụ hay phân kì của chuỗi đã cho. Chẳng hạn như cả hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ đều thỏa mãn $L = 1$ nhưng chuỗi số đầu tiên phân kì còn chuỗi số sau hội tụ.

- Trong các bài toán có dùng tiêu chuẩn d'Alambert, giới hạn sau đây thường hay được sử dụng
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}.$$
Chứng minh. Giới hạn trên có thể được chứng minh bằng cách chuyển qua giới hạn của hàm số như sau.

  Ta có
$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\alpha}{x}}{\frac{1}{x}} = \alpha.$$
  Do đó
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^{\alpha}.$$
■

Ví dụ 2.1. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

Chứng minh. Ta có
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$
Theo tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đa cho hội tụ. ■

Ví dụ 2.2. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

Chứng minh. Ta có
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}:\frac{2^n n!}{n^n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\\ &= \lim_{n\to+\infty}2\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}}\\ &= \frac{2}{e} < 1.\end{aligned}$$
Theo tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đa cho hội tụ. ■

Ví dụ 2.3. *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{3^n}$. *Ta có*
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+5}{3(n^2+5)} = \frac{1}{3} < 1$$
nên chuỗi đa cho hội tụ theo tiêu chuẩn d'Alambert.

Ví dụ 2.4 (Giữa kì, K61). *Xét sự hội tụ của các chuỗi số*