Chương 3 – KHÔNG GIAN VECTƠ

Đối tượng ban đầu của môn Đại số tuyến tính là việc giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính. Tuy vậy, để có thể hiểu thấu đáo điều kiện đảm bảo cho một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm và cấu trúc nghiệm của nó, người ta đã đưa ra khái niệm *không gian vectơ* và khái niệm này đã trở thành một trong những trụ cột của môn Đại số tuyến tính. Không gian vectơ sau đó đã được sử dụng phổ biến trong rất nhiều lĩnh vực của toán học. Ở đây chúng ta chỉ nghiên cứu một loại không gian vectơ phổ biến nhất là $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

3.1. Khái niệm không gian vectơ $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

3.1.1. Tập hợp $\mathbb{R}^n$

a. Định nghĩa tập hợp $\mathbb{R}^n$

Một bộ gồm n số $a_1, a_2, \dots, a_n$ có thứ tự được kí hiệu là $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Tập hợp tất cả các bộ n số có thứ tự được kí hiệu là $\mathbb{R}^n$. Như vậy

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}.$$

Ví dụ 1: $(1, -1), (0, 2) \in \mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) | a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$.

$(1, -1, 3), (0, 2, -2) \in \mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) | a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$.

Với hai phần tử $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Ta định nghĩa $\alpha = \beta$ khi và chỉ khi $a_i = b_i, \forall i = 1, \dots, n$.

Ví dụ 2: Xét $\mathbb{R}^4$ cho $\alpha = (1, x + 1, 2, -1), \beta = (1, 2, 2, y - 1)$. Tìm x, y để $\alpha = \beta$.

Đáp số: $x = 1, y = 0$.

Bộ n số 0, $(0, 0, \dots, 0)$, được gọi là *phần tử không*, kí hiệu là θ.

Cho phần tử $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ thì phần tử $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ được gọi là *phần tử đối* của α, kí hiệu $-\alpha$.

b. Hai phép toán

Xét $\mathbb{R}^n$ và hai phần tử $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$. Trong $\mathbb{R}^n$ ta xác định hai phép toán sau:

Phép cộng: $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$.

Phép nhân vô hướng: $k\alpha = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$.

Ví dụ 3: Cho $\alpha = (1, -1, 3), \beta = (0, 2, -2) \in \mathbb{R}^3$. Khi đó

$$\alpha + \beta = (1, -1, 3) + (0, 2, -2) = (1 + 0, -1 + 2, 3 + (-2)) = (1, 1, 1).$$

$$2\alpha = (2, -2, 6); (-1)\beta = (0, -2, 2).$$

3.1.2. Định nghĩa không gian vectơ $\mathbb{R}^n$

Tập hợp $\mathbb{R}^n$ cùng hai phép toán trên thỏa mãn 8 điều kiện đặc trưng sau:

1. Phép cộng có tính kết hợp: với mọi $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n$ thì $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

2. Phép cộng có tính giao hoán: với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ thì $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

3. Phần tử không, θ có tính chất: với mọi $\alpha \in \mathbb{R}^n$ thì $\alpha + \theta = \theta + \alpha = \alpha$.

4. Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}^n$ phần tử đối $-\alpha$ có tính chất:

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = \theta.$$

5. Với mọi $k \in \mathbb{R}$ và mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ thì $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$.

6. Với mọi $k, l \in \mathbb{R}$ và mọi $\alpha \in \mathbb{R}^n$ thì $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$.

7. Với mọi $k, l \in \mathbb{R}$ và mọi $\alpha \in \mathbb{R}^n$ thì $(kl)\alpha = k(l\alpha)$.

8. Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}^n$ thì $1\alpha = \alpha$.

Khi đó $\mathbb{R}^n$ được gọi là *không gian vectơ trên trường* $\mathbb{R}$ (hoặc đơn giản là *không gian vectơ (KGVT)*).

Chú ý: i) Hai điều kiện 5 và 6 là tính chất phép nhân phân phối với phép cộng.

ii) Khi $\mathbb{R}^n$ là một KGVT thì mỗi phần tử thuộc $\mathbb{R}^n$ được gọi là một vectơ.

3.1.3. Các tính chất cơ bản

Xét không gian vectơ $\mathbb{R}^n$.

1. Vectơ θ là duy nhất. Với mỗi vectơ α thì vectơ đối $-\alpha$ cũng là duy nhất.

2. Phép cộng có luật giản ước: với mọi $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n$, nếu $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ thì $\beta = \gamma$.

3. Với mọi $k \in \mathbb{R}$ và mọi $\alpha \in \mathbb{R}^n$ thì $k\theta = \theta, 0\alpha = \theta, (-1)\alpha = -\alpha$.

4. Với $k \in \mathbb{R}$ và $\alpha \in \mathbb{R}^n$ mà $k\alpha = \theta$ thì $k = 0$ hoặc $\alpha = \theta$.

5. Với $\alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha \neq \theta, k, l \in \mathbb{R}$ thì $k\alpha = l\alpha \Leftrightarrow k = l$.

6. Với mọi $k \in \mathbb{R}$ và mọi $\alpha \in \mathbb{R}^n$ thì $(-k)\alpha = k(-\alpha) = -(k\alpha)$.

3.2. Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

3.2.1. Định nghĩa tổ hợp tuyến tính, biểu thị tuyến tính

Xét không gian vectơ $\mathbb{R}^n$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là các vectơ của $\mathbb{R}^n$ (còn gọi là *hệ vectơ*).

- Một *tổ hợp tuyến tính* của các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là một biểu thức có dạng

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n, k_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n.$$

- Vectơ $\beta \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *biểu thị tuyến tính* (BTTT) được qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nếu tồn tại các số $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n.$$

Tức là phương trình vectơ $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ có nghiệm.

Ví dụ 4: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ

$$\alpha_1 = (1, 0, -1, 1), \alpha_2 = (0, 1, 0, 3), \alpha_3 = (-1, 1, 1, 2), \beta = (0, 2, 0, 6)$$

Khi đó $2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 0\alpha_3, 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0\alpha_3$ là các tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Vì $\beta = 0\alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_3$ nên β BTTT được qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (chú ý là ta còn một biểu thị tuyến tính khác của β qua hệ vectơ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ là $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$).

Chú ý:

1. Một đẳng thức $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$ được gọi là một *biểu thị tuyến tính* hay (*tổ hợp tuyến tính*) của β qua các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Một vectơ có thể có nhiều biểu thị tuyến tính khác nhau qua một hệ vectơ.

2. Ta nói hệ $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ biểu thị tuyến tính được qua hệ $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ nếu mỗi vectơ $\alpha_i, i = 1, \dots, n$, biểu thị tuyến tính được qua hệ $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$.

Ví dụ 5: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ

$$\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (1, 1, 0), \alpha_4 = (2, -1, 1)$$

a) Vectơ $\beta = (-1, 2, 3)$ có BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ hay không?.

b) Vectơ $\beta = (-1, 2, 3)$ có BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ hay không?

c) Tìm điều kiện để vectơ $u = (a_1, a_2, a_3)$ BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

d) Tìm điều kiện để vectơ $u = (a_1, a_2, a_3)$ BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$.

Bài giải

a) Xét phương trình $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = -1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}.$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

Do rank A = rank $\bar{A}$ nên hệ phương trình luôn có nghiệm. Do đó vectơ β BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Hơn nữa ta tìm được $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -1$.

Do đó $\beta = 0\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3$.

b) Xét phương trình $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_4 = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = -1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_1 = 3 \end{cases}.$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

Do $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank} \bar{A}$ nên hệ phương trình vô nghiệm. Do đó vectơ β không BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

c) Xét phương trình $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = u \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ x_1 + x_2 = a_3 \end{cases}$.

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 1 & 1 & 0 & a_3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 0 & 1 & -1 & a_3 - a_1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & -2 & a_3 - a_1 - a_2 \end{array}\right]$$

Do $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A}$ nên hệ phương trình luôn có nghiệm. Do đó vectơ u luôn BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

d) Xét phương trình $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_4 = u \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = a_3 \end{cases}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 2 & -1 & 1 & a_3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 0 & -1 & -1 & a_3 - 2a_1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 - 2a_1 + a_2 \end{array}\right]$$

u biểu thị tuyến tính $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ khi và chỉ khi hệ phương trình trên có nghiệm, tức là $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} \Leftrightarrow a_3 - 2a_1 + a_2 = 0 \Leftrightarrow 2a_1 = a_2 + a_3$.

Nhận xét: Để xét vectơ β có BTTT được qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ hay không trong $\mathbb{R}^n$ thì ta lập ma trận $\bar{A}$ với các cột là các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, cột bổ sung là vectơ β, rồi tìm $\operatorname{rank} A$. Nếu $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A}$ thì vectơ β BTTT được qua hệ, hơn nữa ta tìm được đẳng thức biểu diễn (các hệ số của $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ trong biểu diễn chính là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính).

Ví dụ 6: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$ cho hệ vectơ

$$\alpha_1 = (1,1,1,1), \alpha_2 = (2,3,-1,0), \alpha_3 = (-1,-1,1,1), \alpha_4 = (1,2,1,-1)$$

a) Vectơ $\beta = (1,2,2,3)$ có BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ hay không?.

b) Tìm điều kiện để vectơ $u = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

c) Tìm điều kiện để vectơ $u = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Bài giải

a) $$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Do đó β biểu thị tuyến tính $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ hơn nữa $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$.

b) $\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a_1 \\ 1 & 3 & -1 & a_2 \\ 1 & -1 & 1 & a_3 \\ 1 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 - a_1 \\ 0 & -3 & 2 & a_3 - a_1 \\ 0 & -2 & 2 & a_4 - a_1 \end{array}\right]$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & 2 & a_3 + 3a_2 - 4a_1 \\ 0 & 0 & 2 & a_4 + 2a_2 - 3a_1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & 2 & a_3 + 3a_2 - 4a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 - a_3 - a_2 + a_1 \end{array}\right]$$

u biểu thị tuyến tính $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ khi và chỉ khi hệ phương trình trên có nghiệm, tức là rank $A =$ rank $\bar{A} \Leftrightarrow a_4 - a_3 - a_2 + a_1 = 0 \Leftrightarrow a_2 + a_3 = a_1 + a_4$.

c) $\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & a_1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & a_2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & a_3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & a_4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a_2 - a_1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & a_3 - a_1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & a_4 - a_1 \end{array}\right]$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & a_3 + 3a_2 - 4a_1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & a_4 + 2a_2 - 3a_1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & a_3 + 3a_2 - 4a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & a_4 - a_3 - a_2 + a_1 \end{array}\right]$$

Do rank $A =$ rank $\bar{A}$ nên hệ phương trình luôn có nghiệm. Do đó vectơ u luôn BTTT qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Ví dụ 7: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ cho hai hệ vectơ

$$\alpha_1 = (1,2,1), \alpha_2 = (2,-2,1), \alpha_3 = (3,2,2) \qquad (U)$$

$$\beta_1 = (1,1,1), \beta_2 = (1,1,0), \beta_3 = (1,0,0) \qquad (V).$$

Hệ (U) có biểu thị tuyến tính được qua hệ (V) hay không?.

Bài giải

Ta lần lượt kiểm tra 3 phương trình vectơ sau có ngiệm hay không

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_1 \text{ (Hệ 1)}$$

$$y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3 = \beta_2 \text{ (Hệ 2)}$$

$$z_1\alpha_1 + z_2\alpha_2 + z_3\alpha_3 = \beta_3 \text{ (Hệ 3).}$$

Ta sẽ xét chung ma trận chia khối sau:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 5 & 4 \end{array}\right].$$

Hệ 1 có nghiệm $x_3 = \frac{-1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{3}{2}$.

Hệ 2 có nghiệm $y_3 = \frac{5}{2}, y_2 = \frac{-3}{2}, y_1 = \frac{-7}{2}$.

Hệ 3 có nghiệm $z_3 = 2, z_2 = -1, z_1 = -3$.

Vậy (U) biểu thị tuyến tính được qua hệ (V). Hơn nữa

$$\beta_1 = \frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3, \beta_2 = \frac{5}{2}\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{7}{2}\alpha_3, \beta_3 = -3\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3.$$

3.2.2. Định nghĩa độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

Cho $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là một hệ vectơ của $\mathbb{R}^n$.

- Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ được gọi là hệ vectơ *phụ thuộc tuyến tính* (PTTT) nếu tồn tại các số thực $k_1, k_2, \dots, k_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = \theta.$$

Tức là phương trình vectơ $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \theta$ có nghiệm khác $(0,0,\dots,0)$

- Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ được gọi là hệ vectơ *độc lập tuyến tính* (ĐTTT) nếu nó không phụ thuộc tuyến tính. Nói cách khác hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ĐLTT khi và chỉ khi:

  Nếu $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = \theta$ với $k_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ thì $a_i = 0$ với mọi i. Tức là phương trình vectơ $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \theta$ có nghiệm duy nhất là $(0,0,\dots,0)$.

Ví dụ 8: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$ hệ vectơ sau là ĐLTT hay PTTT?.

$$\alpha_1 = (1,0,1,1), \alpha_2 = (0,1,2,3), \alpha_3 = (1,2,3,4).$$

Bài giải

Xét hệ phương trình vectơ $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \theta \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

Ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Do $\operatorname{rank} A = 3$ nên hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường $(0,0,0)$.

Vậy hệ vectơ trên ĐLTT.

Ví dụ 9: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$. Hệ vectơ sau là ĐLTT

$$\alpha_1 = (1,0,0), \alpha_2 = (0,1,0), \alpha_3 = (0,0,1).$$

Tổng quát: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^n$. Hệ vectơ sau là độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,0,\dots,0), \alpha_2 = (0,1,\dots,0), \dots, \alpha_n = (0,0,\dots,1)$$

Nhận xét: Để xét hệ m vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ĐLTT hay PTTT trong $\mathbb{R}^n$ ta lập ma trận A với các cột là các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ rồi tìm $\operatorname{rank} A$. Nếu $\operatorname{rank} A = m$ (số vectơ) thì hệ ĐLTT, nếu $\operatorname{rank} A < m$ thì hệ PTTT.

Nếu A là ma trận vuông thì hệ vectơ ĐLTT khi và chỉ khi A không suy biến.

3.2.3. Các tính chất cơ bản

1. Hệ chứa vectơ θ luôn PTTT.

2. Hệ gồm 1 vectơ PTTT khi và chỉ khi đó là vectơ θ, hệ gồm 2 vectơ PTTT khi và chỉ khi 2 vectơ đó tỉ lệ.

3. Nếu một hệ ĐLTT thì hệ con của nó cũng ĐLTT.

4. Một hệ chứa hệ con PTTT thì PTTT.

5. Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ PTTT khi và chỉ khi có một vectơ có một vectơ trong hệ biểu thị tuyến tính qua các vectơ còn lại của hệ.

6. Nếu hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ĐLTT thì hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ ĐLTT khi và chỉ khi β không biểu thị tuyến tính được qua hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

3.2.4. Hạng của một hệ vectơ

a. Hệ vectơ tương đương

Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^n$, cho hai hệ vectơ (α) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ và (β) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Ta nói hệ (α) *tương đương* với hệ (β), kí hiệu $(\alpha) \sim (\beta)$, nếu (α) BTTT được qua hệ (β) và ngược lại.

Ví dụ 10: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, xét hai hệ vectơ

$$\alpha_1 = (1,0,0), \alpha_2 = (0,1,0), \alpha_3 = (0,0,1) \qquad (\alpha)$$

$$\beta_1 = (1,1,1), \beta_2 = (1,1,0), \beta_3 = (1,0,0) \qquad (\beta).$$

Khi đó $(\alpha) \sim (\beta)$.

b. Hệ con độc lập tuyến tính tối đại của một hệ vectơ

Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^n$, cho hệ vectơ (α) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Hệ con $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m}$ của hệ (α) được gọi là *hệ con độc lập tuyến tính tối đại* của hệ (α) nếu $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m}$ ĐLTT và mọi vectơ α_i của hệ (α) đều BTTT được qua hệ $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m}$.

Nhận xét:

i) Một hệ vectơ có thể có nhiều hệ con độc lập tuyến tính tối đại.

ii) Hệ con độc lập tuyến tính tối đại tương đương với hệ vectơ đó.

c. Hạng của một hệ vectơ

Bổ đề (bổ đề cơ bản về sự độc lập tuyến tính): Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^n$, cho hai hệ vectơ (α) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ và (β) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$. Nếu hệ (α) ĐLTT và BTTT được qua hệ (β) thì $n \leq m$.

Từ bổ đề trên suy ra ngay hai hệ vectơ ĐLTT tương đương thì có số vectơ bằng nhau.

Hệ (α) có thể có nhiều hệ con độc lập tuyến tính tối đại khác nhau. Tuy nhiên tất cả các hệ con độc lập tuyến tính tối đại đều tương đương với nhau. Do đó tất cả các hệ con độc lập tuyến tính tối đại đều có số vectơ bằng nhau. Số đó được gọi là hạng của hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, kí hiệu rank $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. Như vậy ta có

$$\text{rank}\,\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \text{Số vectơ của hệ con ĐLTT tối đại của hệ } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n.$$

d. Cách tìm hạng, hệ con độc lập tuyến tính tối đại của một hệ vectơ trong $\mathbb{R}^n$

Trong $\mathbb{R}^n$ cho hệ vectơ

$$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

$$\alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$$

...

$$\alpha_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}).$$

Để tìm hạng và hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ta làm như sau:

- Lập ma trận A là ma trận dòng của các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Bằng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, đưa ma trận A về dạng bậc thang. Khi đó

$$\text{rank}\,\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \text{rank}\, A.$$

Hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ gồm các vectơ ứng với các dòng khác không của ma trận bậc thang.

Ví dụ 11: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^5$ cho hệ vectơ

$$\alpha_1 = (3, 2, 0, 1), \alpha_2 = (4, 1, 0, 2), \alpha_3 = (3, 1, -1, 0), \alpha_4 = (1, 0, 1, 2).$$

Tìm một hệ con độc độc lập tuyến tính tối đại và hạng của hệ vectơ trên.

Bài giải

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (4) \\ (2) \\ (3) \\ (1) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} (4) \\ (2) \\ (3) \\ (1) \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} (4) \\ (2) \\ (3) \\ (1) \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (4) \\ (2) \\ (1) \\ (3) \end{matrix}$$

Vậy rank $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = \text{rank}\, A = 3$.

Hệ con ĐLTT tối đại của $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ là $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$ (có thể ra kết quả $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$).

3.3. Không gian vectơ con, cơ sở và số chiều

3.3.1. Định nghĩa và các ví dụ

a. Định nghĩa

Tập con L (khác ϕ) của $\mathbb{R}^n$ được gọi là *không gian vectơ con* của $\mathbb{R}^n$ nếu thỏa hai điều kiện sau:

1. Với mọi $x, y \in L$, ta có $x + y \in L$.

2. Với mọi $k \in \mathbb{R}$ và mọi $x \in L$ thì $kx \in L$.

Chú ý:

i) Điều kiện 1 được gọi là đóng kín đối với phép cộng, điều kiện 2 được gọi là đóng kín đối với phép nhân vô hướng.

ii) Hai điều kiện trên tương đương với điều kiện sau:

Với mọi $k, l \in \mathbb{R}$ và mọi $x, y \in U$ thì $kx + ly \in U$.

b. Các ví dụ

1. $\{\theta\}$ và $\mathbb{R}^n$ là các không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$. Được gọi là không gian vectơ con *tầm thường* của $\mathbb{R}^n$.

2. Tập hợp tất cả các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (n phương trình n ẩn) là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$.

3. Tập $A = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$. Tập $B = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ không là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$.

3.3.1. Cơ sở, số chiều của không gian vectơ con

Cho L là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$ và hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ của L.

• Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ được gọi là một *hệ sinh* của L nếu mọi vectơ của L đều BTTT được qua hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

• Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ được gọi là một *cơ sở* của L nếu nó là hệ sinh của L và là hệ ĐLTT.

• Từ định nghĩa thì hai cơ sở bất kì của L đều tương đương và ĐLTT, do đó chúng có số vectơ bằng nhau. Số đó được gọi là *số chiều* của L, kí hiệu là $\dim L$. Như vậy

$$\dim L = \text{Số vectơ của một cơ sở bất kì của } L.$$

Nếu $L = \{\theta\}$ ta quy ước $\dim L = 0$. Nếu $\dim L = m$ ta có thể gọi L là *không gian vectơ con m chiều.*

Ví dụ 12: Hệ vectơ $\alpha_1 = (1,0,0), \alpha_2 = (0,1,0), \alpha_3 = (0,0,1)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Do đó $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Bạn đọc thử kiểm tra hệ sau cũng là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

$$\beta_1 = (1,0,1), \beta_2 = (1,1,0), \beta_3 = (0,1,1).$$

Tổng quát: Xét không gian vectơ $\mathbb{R}^n$. Hệ vectơ

$$\alpha_1 = (1,0, \dots ,0), \alpha_2 = (0,1, \dots ,0), \dots , \alpha_n = (0,0, \dots ,1)$$

là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$, gọi là cơ sở *chính tắc* của $\mathbb{R}^n$, kí hiệu E, và ta có $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Định lý (đặc trưng của cơ sở): Một hệ vectơ là cơ sở của không gian vectơ con L khi và chỉ khi mọi vectơ của L đều BTTT duy nhất qua hệ này.

Định lý: Nếu L là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$ thì $\dim L \leq \dim \mathbb{R}^n$ và $\dim L = \dim \mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi $L = \mathbb{R}^n$.

3.3.2. Tính chất cơ bản của không gian vectơ hữu hạn chiều

Cho L là một không gian vectơ con hữu hạn chiều, $\dim L = m$. Khi đó:

1. Mọi hệ vectơ có nhiều hơn m vectơ đều PTTT.

2. Mọi hệ có m vectơ ĐLTT đều là cơ sở của L.

3. Mọi hệ có m vectơ là hệ sinh của L đều là cơ sở của L.

4. Mọi hệ ĐLTT có k vectơ đều có thể bổ sung thêm $m - k$ vectơ để trở thành cơ sở.

Chú ý: Từ tính chất 2 và 3 nếu biết $\dim L = m$ thì để chứng minh một hệ m vectơ là cơ sở của L ta chỉ cần chứng minh hệ đó là hệ ĐLTT hoặc hệ sinh.

3.3.3. Một số không gian con đặc biệt

a. Không gian giao và không gian tổng

Dùng tiêu chuẩn không gian vectơ con, ta dễ dàng kiểm tra được các kết quả sau:

- Nếu A, B là các không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$ thì $A \cap B$ cũng là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$. Tổng quát, giao của một họ tùy ý các không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$ là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$.

- Cho A, B là các không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$, ta định nghĩa tập hợp:

$$A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$(x \in A + B \Leftrightarrow x = a + b \text{ với } a \in A, b \in B)$$

Khi đó $A + B$ là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$, được gọi là *không gian tổng* của các không gian con A và B.

Liên quan đến số chiều của không gian giao và không gian tổng ta có định lý sau.

Định lý: Nếu A, B là các không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$ thì

$$\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B).$$

b. Không gian con sinh bởi một hệ vectơ

Cho $\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_m$ là một hệ vectơ của $\mathbb{R}^n$. Ta định nghĩa

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_m \rangle = \{x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m | k_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots , m\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Dùng tiêu chuẩn không gian vectơ con, ta thấy ngay $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$ là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$. Không gian này gọi là không gian con của $\mathbb{R}^n$ sinh bởi hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ (hay còn gọi là bao tuyến tính của hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$).

Nhận xét:

i) Từ định nghĩa, ta có $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ chính là một hệ sinh của không gian vectơ con $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$. Bởi vậy, mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ đều là hệ sinh, do đó là cơ sở của không gian vectơ con $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$.

ii) Nếu $A = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$, $B = \langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \rangle$ thì $A + B = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_k \rangle$.

Chú ý: Ta chứng minh được $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$ là không gian con bé nhất (theo quan hệ bao hàm) chứa hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

Ví dụ 13: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ

$$\alpha_1 = (1,2,1,1), \alpha_2 = (3,6,5,7), \alpha_3 = (4,8,6,8), \alpha_4 = (8,16,12,16)$$

$$\beta_1 = (1,2,2,3), \beta_2 = (2,5,5,6), \beta_3 = (3,7,7,9), \beta_4 = (6,14,14,18)$$

Đặt $U = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \rangle$, $W = \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \rangle$.

Xác định cơ sở và số chiều của các không gian vectơ con $U, W, U + W$.

Bài giải

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 16 & 12 & 16 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 7 & 9 \\ 6 & 14 & 14 & 18 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy $U = \langle (1,2,1,1), (0,0,2,4) \rangle$, $W = \langle (1,2,2,3), (0,1,1,0) \rangle$.

$\dim U = 2$ và một cơ sở là $(1,2,1,1), (0,0,2,4)$.

$\dim W = 2$ và một cơ sở là $(1,2,2,3), (0,1,1,0)$.

Như vậy $U + W = \langle (1,2,1,1), (0,0,2,4), (1,2,2,3), (0,1,1,0) \rangle$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy $\dim(U + W) = 3$ và một cơ sở là $(1,2,1,1), (0,1,1,0), (0,0,1,2)$.

c. Không gian con các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Cho hệ phương trình tuyến tính thuần nhất gồm m phương trình và n ẩn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (I)$$

Mỗi nghiệm của hệ (I) có thể xem như là một vectơ trong không gian $\mathbb{R}^n$. Dùng tiêu chuẩn không gian vectơ con ta có thể dễ dàng chứng minh được S, tập tất cả các nghiệm của hệ (I), là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$. Không gian vectơ con này được gọi là *không gian con các nghiệm* của hệ (I).

Kí hiệu $r = \operatorname{rank} A$ thì $\dim S = n - r$. Cơ sở của không gian nghiệm S của hệ (I) chính là là hệ nghiệm cơ bản của hệ (I).

Ví dụ 14: Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm S của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta thấy $\operatorname{rank} A = 3$, hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số x_2, x_5. Hệ trên tương đương với hệ sau

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ -x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 5x_5 \\ x_3 = 4x_5 \\ x_4 = 2x_5 \\ x_2, x_5 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$*$ Cho $x_2 = 1, x_5 = 0$, ta có $x_1 = -2, x_3 = 0, x_4 = 0$, ta được nghiệm

$$\alpha_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$$

$*$ Cho $x_2 = 0, x_5 = 1$ ta có $x_1 = -5, x_3 = 4, x_4 = 2$ ta được nghiệm

$$\alpha_2 = (-5, 0, 4, 2, 1)$$

Vậy $\dim S = 2$ và một cơ sở là $\alpha_1 = (-2, 1, 0, 0, 0), \alpha_2 = (-5, 0, 4, 2, 1)$.

Nhận xét: Nếu A là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

và B là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ b_{k1}x_1 + b_{k2}x_2 + \cdots + b_{kn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Khi đó $A \cap B$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ b_{k1}x_1 + b_{k2}x_2 + \cdots + b_{kn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Chú ý: Trong không gian $\mathbb{R}^n$, nếu A là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất thì sau khi tìm được cơ sở của A, ta sẽ chuyển A về dạng không gian con sinh bởi một hệ vectơ. Ngược lại, nếu $A = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$, thì vectơ $x = (x_1, \dots, x_n)$ thuộc A khi và chỉ khi phương trình vectơ $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \beta$ có nghiệm. Tìm điều kiện của $x_1, \dots, x_n$ để phương trình có nghiệm (giống BTTT qua hệ vectơ), tập hợp các điều kiện này là một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất. Khi đó A là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất này.

Ví dụ 15: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ

$$\alpha_1 = (1, -1, 0, 1), \alpha_2 = (1, 1, 1, 0), \alpha_3 = (2, 0, 1, 1)$$

Đặt $A = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$. Hãy chuyển A về dạng không gian nghiệm.

Bài giải

Giả sử $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in A$. Xét phương trình $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + 2x_3 = x_1 \\ -k_1 + k_2 = x_2 \\ k_2 + k_3 = x_3 \\ k_1 + k_3 = x_4 \end{cases}.$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 2 & 2 & x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_3 - x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_3 + x_4 \end{array}\right]$$

Hệ phương trình trên có nghiệm, tức là rank A = rank $\bar{A} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_3 - x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

Do đó điều kiện cần và đủ để $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in A$ là $\begin{cases} 2x_3 - x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

Vậy A chính là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

3.4. Tọa độ của vectơ trong cơ sở

3.4.1. Định nghĩa và các ví dụ

a. Định nghĩa

Cho KGVT n chiều $\mathbb{R}^n$, (α) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Với $x \in \mathbb{R}^n$, khi đó x được viết duy nhất dưới dạng

$$x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n.$$

Bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ được gọi là *tọa độ* của x trong cơ sở (α) (a_i được gọi là tọa độ thứ i), kí hiệu ${}^{x}/_{(\alpha)} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, hoặc

$$[x]/_{(\alpha)} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

b. Ma trận đổi cơ sở

Trong KGVT $\mathbb{R}^n$, cho hai cơ sở (α) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ và (β) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Khi đó các vectơ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ được viết duy nhất dưới dạng

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n \\ \qquad \cdots \\ \beta_n = a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

Ma trận các hệ số chuyển vị, kí hiệu $T_{\alpha\beta}$, được gọi là ma trận *đổi cơ sở* từ (α) sang (β). Như vậy

$$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Từ định nghĩa $T_{\alpha\beta}$ là ma trận khả nghịch và $T_{\beta\alpha} = T_{\alpha\beta}^{-1}$.

c. Công thức đổi tọa độ

Cho không gian vectơ $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ và các cơ sở (α) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, (β) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Giả sử ${}^{x}/_{(\alpha)} = (a_1, a_2, \dots, a_n), {}^{x}/_{(\beta)} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Khi đó ta có ${}^{[x]}/_{(\alpha)} = T_{\alpha\beta}\, {}^{[x]}/_{(\beta)}$, viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = T_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Công thức trên cho phép tính tọa độ của x trong cơ sở (α) theo tọa độ của x trong cơ sở (β).

Ví dụ 16: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ cho hai cơ sở

$$\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (-1,2,1), \alpha_3 = (1,3,2) \qquad (\alpha)$$

$$\beta_1 = (1,0,1), \beta_2 = (1,1,0), \beta_3 = (0,1,1) \qquad (\beta).$$

a) Tìm ma trận đổi cơ sở từ (α) sang (β).

b) Viết công thức tính tọa độ của vectơ $x \in \mathbb{R}^3$ trong cơ sở (α) theo tọa độ của x trong cơ sở (β).

Hướng dẫn

a) Giả sử

$$\beta_1 = a_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 \text{ (Hệ 1)}$$

$$\beta_2 = b_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 \text{ (Hệ 2)}$$

$$\beta_3 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 \text{ (Hệ 3).}$$

Ma trận các hệ số mở rộng:

$$\left[\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Hệ 1 có nghiệm $a_3 = -2, a_2 = 1, a_1 = 4$.

Hệ 2 có nghiệm $b_3 = 3, b_2 = -2, b_1 = -4$.

Hệ 3 có nghiệm $c_3 = -1, c_2 = 1, c_1 = 2$.

Vậy ma đổi cơ sở từ (α) sang (β) là

$$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Giả sử $x/_{(\alpha)} = (x_1, x_2, x_3), x/_{(\beta)} = (y_1, y_2, y_3)$.

Công thức tính tọa độ của x trong cơ sở (α) theo tọa độ của x trong cơ sở (β) là

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \text{ hay } \begin{cases} x_1 = 4y_1 - 4y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_3 = -2y_1 + 3y_2 - y_3 \end{cases}.$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG 3

Dạng toán: Điều kiện tổ hợp tuyến tính.

1. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (1, m)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ

$$\alpha_1 = (1,2), \alpha_2 = (-1,1)$$

A. $m = 2$ B. $m \neq 1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

2. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (1, m)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ

$$\alpha_1 = (1,2), \alpha_2 = (-1,-2)$$

A. $m = 2$ B. $m = -1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

3. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (3, m)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ

$$\alpha_1 = (1,-1), \alpha_2 = (-2,2)$$

A. $m = 3$ B. $m = -3$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

4. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (2, m)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,-2), \alpha_2 = (-2,4)$

A. $m = -4$ B. $m \neq -4$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

5. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (2, m)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,-2), \alpha_2 = (0,1)$

A. $m = -4$ B. $m \neq -4$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

6. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (2,1,m)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,2,3), \alpha_2 = (0,1,2)$

A. $m = 0$ B. $m = 6$ C. $m = 12$ D. $m = -12$

7. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (1, m, -1)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,-1,2), \alpha_2 = (1,-2,3)$

A. $m = -1$ B. $m \neq -1$ C. $m = 2$ D. $m \neq 2$

8. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (1, 0, m+1)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,1,3), \alpha_2 = (1,-2,0)$

A. $m = 1$ B. $m \neq 1$ C. $m = 3$ D. $m \neq 3$

9. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (1,2,m+5)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ

$$\alpha_1 = (1,1,2), \alpha_2 = (2,3,5), \alpha_3 = (-1,2,1)$$

A. $m = 2$ B. $m = -2$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

10. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (2,-1,m+6)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,-1,2), \alpha_2 = (0,2,2), \alpha_3 = (1,-2,1)$

A. $m = -1$ B. $m = 1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

11. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (1,2,m)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,1,-1), \alpha_2 = (2,3,-1), \alpha_3 = (1,1,0)$

A. $m = 0$ B. $m = -1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

12. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (0, m+1, m+1)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,1,-1), \alpha_2 = (0,1,1), \alpha_3 = (1,3,2)$

A. $m = 0$ B. $m = -1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

13. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (1, 2, m-3)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ

$$\alpha_1 = (-1, m, m-1), \alpha_2 = (1, -1, 1-m)$$

A. $m = 1$ B. $m = -2$ C. $m = 1 \vee m = -2$ D. $m = 1 \vee m = 2$

14. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (1, 0, m+4)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,-1,2), \alpha_2 = (0,1,1), \alpha_3 = (-1,3,0)$

A. $m = -1$ B. $m \neq -1$ C. $m = 1$ D. $m \neq 1$

15. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (1, m, 4)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,1,3), \alpha_2 = (1,0,3)$

A. $m = 0$ B. $m = 1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

16. Với giá trị nào của m thì $\alpha = (2, m+4, 3m+13)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,2,3), \alpha_2 = (1,1,1), \alpha_3 = (1,3,5)$

A. $m = 0$ B. $m \neq 0$ C. $m \neq -7$ D. $m = -7$

17. Với điều kiện nào của x_1, x_2 thì vectơ $u = (x_1, x_2)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,-1), \alpha_2 = (-2,2)$

A. $x_1 = x_2$ B. $x_1 = -x_2$ C. $x_1 = -2x_2$ D. $x_2 = -2x_1$

18. Với điều kiện nào của x_1, x_2 thì vectơ $u = (x_1, x_2)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,-2), \alpha_2 = (1,2)$

A. x_1, x_2 tùy ý B. $x_1 = -x_2$ C. $x_1 = -2x_2$ D. $x_2 = -2x_1$

19. Với điều kiện nào của x_1, x_2 thì vectơ $u = (x_1, x_2)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (3,-2), \alpha_2 = (1,2)$

A. x_1, x_2 tùy ý B. $x_1 = -x_2$ C. $x_1 = -2x_2$ D. $x_2 = -2x_1$

20. Với điều kiện nào của x_1, x_2 thì vectơ $u = (x_1, x_2)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,2), \alpha_2 = (-1,-2)$

A. $x_1 = 2x_2$ B. $x_2 = 2x_1$ C. $x_1 \neq 2x_2$ D. $x_2 \neq 2x_1$

21. Với điều kiện nào của x_1, x_2 thì vectơ $u = (x_1, x_2)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,2), \alpha_2 = (-1,2)$

A. x_1, x_2 tùy ý B. Không có giá trị x_1, x_2 C. $x_2 = -x_1$ D. $x_2 \neq -x_1$

22. Với điều kiện nào của x_1, x_2, x_3 thì vectơ $u = (x_1, x_2, x_3)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1,0,1), \alpha_2 = (0,1,1), \alpha_3 = (1,1,0)$

A. $x_3 = x_1 + x_2$ B. $x_1 = x_2 = x_3$ C. $x_2 = 3x_1$ D. x_1, x_2, x_3 tùy ý

23. Với điều kiện nào của x_1, x_2, x_3 thì vectơ $u = (x_1, x_2, x_3)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (2, -1, 1)$

A. $x_3 = x_1 + x_2$ B. $x_1 = x_2 = x_3$ C. $2x_1 = x_2 + x_3$ D. x_1, x_2, x_3 tùy ý

24. Với điều kiện nào của x_1, x_2, x_3 thì vectơ $u = (x_1, x_2, x_3)$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1, 2, -1), \alpha_2 = (2, 5, -1), \alpha_3 = (-3, -4, 5)$

A. $x_2 = 3x_1 + x_2$ B. $x_3 \neq x_2 - 2x_1$

C. Không có giá trị x_1, x_2, x_3 D. x_1, x_2, x_3 tùy ý

25. Với điều kiện nào của x_1, x_2, x_3 thì vectơ $u = (x_1, x_2, x_3)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1, 2, 1), \alpha_2 = (0, -1, -1), \alpha_3 = (1, 3, 2)$

A. $x_2 = x_1 + x_3$ B. $x_2 \neq x_1 + x_3$

C. Không có giá trị x_1, x_2, x_3 D. x_1, x_2, x_3 tùy ý

26. Với điều kiện nào của x_1, x_2, x_3 thì vectơ $u = (x_1, x_2, x_3)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (5, 6, 7)$

A. $x_3 = x_2 - x_1$ B. $x_3 \neq x_2 - x_1$

C. Không có giá trị x_1, x_2, x_3 D. x_1, x_2, x_3 tùy ý

27. Với điều kiện nào của x_1, x_2, x_3 thì vectơ $u = (x_1, x_2, x_3)$ KHÔNG là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (5, 6, 6)$

A. $x_2 = x_3$ B. $x_2 \neq x_3$

C. $x_3 = 5x_1 + x_2$ D. $x_3 \neq 5x_1 + x_2$

Dạng toán: Điều kiện độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính.

28. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (1, 2), \alpha_2 = (-1, m)$$

A. $m = -2$ B. $m \neq -2$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

29. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (-1, 3), \alpha_2 = (1, m)$$

A. $m = -3$ B. $m \neq -3$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

30. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1, 2), \alpha_2 = (m, m + 1)$$

A. $m = 1$ B. $m \neq 1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

31. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1, 0), \alpha_2 = (-1, m)$$

A. $m = 0$ B. $m \neq 0$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

32. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,2), \alpha_2 = (-1,1), \alpha_3 = (1,m)$$

A. $m = 2$ B. $m \neq 2$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

33. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,2), \alpha_2 = (-1,-2), \alpha_3 = (-1,m)$$

A. $m = 2$ B. $m = -2$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

34. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,-1), \alpha_2 = (-2,3), \alpha_3 = (3,m)$$

A. $m = 3$ B. $m = -3$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

35. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,-2), \alpha_2 = (-2,4), \alpha_3 = (2,m)$$

A. $m = -4$ B. $m \neq -4$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

36. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,2,3), \alpha_2 = (0,1,2), \alpha_3 = (2,1,m)$$

A. $m = 0$ B. $m = 6$ C. $m = 12$ D. $m = -12$

37. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,-1,2), \alpha_2 = (1,-2,3), \alpha_3 = (1,m,-1)$$

A. $m = -1$ B. $m \neq -1$ C. $m = 2$ D. $m \neq 2$

38. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,-1,2), \alpha_2 = (0,2,2), \alpha_3 = (2,-1,m+6)$$

A. $m = -1$ B. $m = 1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

39. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,0,1), \alpha_2 = (1,m,0), \alpha_3 = (0,1,m)$$

A. $m = -1$ B. $m = 1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

40. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (1,0,1), \alpha_2 = (1,m,0), \alpha_3 = (2,m,1)$$

A. $m = -1$ B. $m = 1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

41. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (-1,m,m-1), \alpha_2 = (1,-1,1-m), \alpha_3 = (1,2,m-3)$$

A. $m = 1$ B. $m = -2$ C. $m = 1 \vee m = -2$ D. $m = 1 \vee m = 2$

42. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính

$$\alpha_1 = (1, m, m+1), \alpha_2 = (m, -1, 1-m), \alpha_3 = (m+1, 0, m+1)$$

A. $m = -1 \wedge m = 1$ B. $m = -1 \vee m = 1$

C. $m = -1 \wedge m = 0 \wedge m = 1$ D. $m = -1 \vee m = 0 \vee m = 1$

43. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1, 1, 3), \alpha_2 = (1, -2, 0), \alpha_3 = (1, 0, m+1)$$

A. $m = 1$ B. $m \neq 1$ C. $m = 3$ D. $m \neq 3$

44. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1, 1, 2), \alpha_2 = (2, 3, 5), \alpha_3 = (1, 2, m+5)$$

A. $m = -2$ B. $m \neq -2$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

45. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1, 1, -1), \alpha_2 = (2, 3, -1), \alpha_3 = (1, 2, m)$$

A. $m = 0$ B. $m \neq 2$ C. $m \neq 0$ D. $m = 2$

46. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1, m, -1), \alpha_2 = (0, 1, m), \alpha_3 = (1, m+1, m-1)$$

A. $m = 0$ B. $m = -1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

47. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (m, -1, -1), \alpha_2 = (1, m+1, 1), \alpha_3 = (2m+1, -1, 2)$$

A. $m = 0$ B. $m = -1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m

48. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1, m+1, 2), \alpha_2 = (0, 1, m), \alpha_3 = (m, -1, m)$$

A. $m = 0$ B. $m \neq -1 \wedge m \neq 0$

C. $m = -1 \vee m = 0$ D. $m \neq 0$

49. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (m, 1, 1), \alpha_2 = (1, m, 1), \alpha_3 = (1, 1, m)$$

A. $m = -2 \vee m = 1$ B. $m \neq -2 \wedge m \neq 1$

C. m tùy ý D. Không có giá trị m

50. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$$\alpha_1 = (1, 1, -1), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (1, 3, 2), \alpha_4 = (0, m+1, 2m+1)$$

A. $m = 0$ B. $m = -1$ C. m tùy ý D. Không có giá trị m