BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

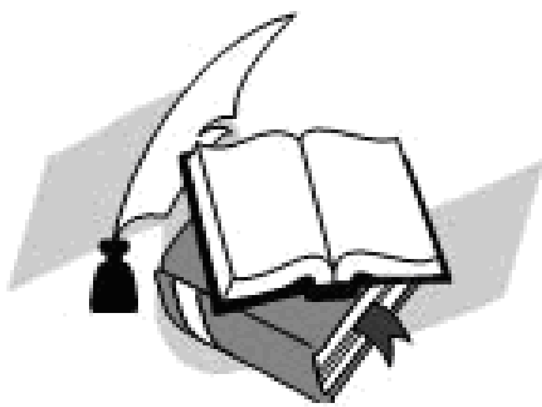
TRƯỜNG ĐẠI HỌC NGUYỄN TẤT THÀNH

KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN

BỘ MÔN TOÁN

BÀI GIẢNG HỌC PHẦN

TOÁN CAO CẤP A1



Biên soạn

GVC. Ths. Bành Thị Hồng

Ths. Bùi Hùng Vương

Thành phố Hồ Chí Minh – 10/2014

Chương 1 – MA TRẬN – ĐỊNH THỨC

Trong phần này ta xét các số là những số thực, m, n là các số nguyên dương.

1.1. Khái niệm ma trận và các phép toán trên ma trận

1.1.1. Định nghĩa ma trận

Một bảng số, gồm $m \times n$ số $a_{ij}(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ được xếp thành m dòng và n cột được gọi là *ma trận cấp* $m \times n$ (trên trường số thực $\mathbb{R}$), kí hiệu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ hoặc } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ta có thể viết gọn là $A = (a_{ij})_{m\times n}$ hoặc $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.

Số a_{ij} được gọi là *phần tử của ma trận A nằm trên dòng i cột j* (*phần tử vị trí* (i, j)).

Tập hợp tất cả các ma trận cấp $m \times n$ trên trường $\mathbb{R}$ được kí hiệu là $M(m \times n; \mathbb{R})$ (hoặc $M_{m\times n}(\mathbb{R})$).

Ví dụ 1: Các ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}), B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & \pi & -5 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}),$$
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_{1\times 3}(\mathbb{R}), D = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \end{bmatrix} \in M_{1\times 1}(\mathbb{R})$$

Hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$ được gọi là *bằng nhau* nếu $a_{ij} = b_{ij}$ với mọi $i = \overline{1, m}$ và $j = \overline{1, n}$.

Ví dụ 2: Với giá trị nào của x và y thì hai ma trận sau bằng nhau?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & x & 3 \\ 4 & 5 & y+1 \end{bmatrix}$$

Hướng dẫn: Ta thấy $A, B \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ do đó $A = B$ khi $x = 2, y = 5$.

1.1.2. Một số dạng ma trận đặc biệt

a. Ma trận không

Ma trận mà tất cả các phần tử của nó đều bằng 0 được gọi là *ma trận không*. Kí hiệu θ (hoặc đơn giản là số 0) cho mọi ma trận không cấp $m \times n$ tùy ý.

Ví dụ 3: Ma trận không cấp 2×3 và ma trận không cấp 3×3 là

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (0)_{2\times 3}, \theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (0)_{3\times 3}.$$

b. Ma trận vuông

Cho ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, nếu $m = n$ (số dòng bằng số cột) thì ma trận A được gọi là *ma trận vuông cấp n* (khi đó ta có thể ghi $A = (a_{ij})_n$). Như vậy A có dạng sau

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

trong đó các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ được gọi là *các phần tử nằm trên đường chéo chính*, các phần tử $a_{n1}, a_{(n-1)1}, \dots, a_{1n}$ gọi là *các phần tử nằm trên đường chéo phụ.*

Kí hiệu tập các ma trận vuông cấp n là $M(n;\mathbb{R})$ (hoặc $M_n(\mathbb{R})$).

Ví dụ 4: Cho các ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1-\pi & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \\ 6 & 2\pi & 0 \end{bmatrix}$$

Khi đó A là ma trận vuông cấp 2 và B, C là ma trận vuông cấp 3. Phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận C là $1-\pi, 5{,}0$ đường chéo phụ là $6, 5, 3$. Phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận B là $1, 5, 0$; đường chéo phụ là $3, 5, 3$.

c. Ma trận dòng, ma trận cột

Cho ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$. Nếu $m = 1$ (ma trận chỉ có một dòng) được gọi là *ma trận dòng*. Tương tự, nếu $n = 1$ (ma trận chỉ có một cột) được gọi là *ma trận cột*. Ma trận dòng và ma trận cột thường được gọi là *vectơ dòng* và *vectơ cột.*

Ví dụ 5: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ là ma trận dòng.

$B = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ là ma trận cột.

d. Ma trận chéo

Ma trận vuông có tất các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0 được gọi là *ma trận chéo (ma trận đường chéo).*

Ví dụ 6: Các ma trận sau là ma trận chéo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1+\pi & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Nhận xét: Ma trận đường chéo thường được ký hiệu bởi $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ với các phần tử trên đường chéo chính là lần lượt là $a_1, a_2, \dots, a_n$.

e. Ma trận đơn vị

Ma trận chéo cấp n, có tất cả các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1, được gọi là *ma trận đơn vị*, kí hiệu I_n.

Ví dụ 7: Các ma trận đơn vị sau

$$I_1 = [1], I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

f. Ma trận chuyển vị

Chuyển các dòng (các cột) của ma trận A thành các cột (các dòng) với thứ tự tương ứng ta được ma trận gọi là *ma trận chuyển vị* của ma trận A. Kí hiệu A^T

Như vậy $A = (a_{ij})_{m\times n}$ thì $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$.

Ví dụ 8: Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Nhận xét: 1. $(A^T)^T = A$.

2. $A^T = B^T \Leftrightarrow A = B$.

g. Ma trận đối xứng

Ma trận A vuông cấp n được gọi là *đối xứng* nếu $A^T = A$ (hay $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$)

Trong **Ví dụ 8** thì ma trận C là ma trận đối xứng.

h. Ma trận đối

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$, khi đó ma trận $(-a_{ij})_{m\times n}$ được gọi là *ma trận đối* của ma trận A, kí hiệu $-A$.

Ví dụ 9: Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ có ma trận đối là ma trận $-A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

i. Ma trận tam giác

Ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm về một phía của đường chéo chính bằng 0 được gọi là ma trận tam giác. Như vậy $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận tam giác khi và chỉ khi $a_{ij} = 0, \forall i > j$ (hoặc $a_{ij} = 0, \forall i < j$)

Ví dụ 10: Các ma trận sau là ma trận tam giác

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&5&7\\0&0&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&5&0\\6&1&0\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&3&2&0\\0&0&-7&-2\\0&0&e&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}.$$

j. Ma trận bậc thang dòng

Một dòng (hay cột) của ma trận được gọi là *dòng không* (*cột không*) nếu tất cả phần tử trên dòng (cột) đó đều bằng 0. Ngược lại gọi là *dòng khác không* (*cột khác không*).

Ma trận bậc thang dòng là ma trận có hai tính chất:

* Các dòng khác không nằm phía trên dòng bằng không (nếu có).
* Phần tử khác không đầu tiên ở dòng dưới bao giờ cũng nằm bên phải cột chứa phần tử khác không đầu tiên ở dòng trên.

Ví dụ 11: Trong các ma trận sau thì ma trận nào là ma trận bậc thang dòng?

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&5&7\\0&0&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&3&-1&7\\0&0&5&8\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&2&0\\3&2&1\end{bmatrix},$$
$$D=\begin{bmatrix}0&0&2&0\\0&0&-7&-2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},E=\begin{bmatrix}1&3&2&0&3\\0&0&-7&-2&0\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Đáp án: A, E.

Chú ý: Phát biểu tương tự như khái niệm trên nhưng thay dòng thành cột và cột thành dòng ta được khái niệm *ma trận bậc thang cột*.

1.1.3. Các phép toán trên ma trận

a. Phép cộng hai ma trận (cùng cấp)

Cho $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}$ thì *tổng của hai ma trận A và B*, kí hiệu $A+B$, là ma trận $C=(c_{ij})_{m\times n}$ với $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, (1\le i\le m, 1\le j\le n)$.

Vậy

$$A+B=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mn}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&\cdots&a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&\cdots&a_{2n}+b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}+b_{m1}&a_{m2}+b_{m2}&\cdots&a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}=C.$$

Ví dụ 12: Cho các ma trận sau

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow E + F = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & -2 & 9 \\ -2 & 0 & 10 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tính chất: Cho các ma trận $A, B, C, \theta \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Khi đó

1. $A + B = B + A$.
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3. $A + \theta = \theta + A = A$.

Chú ý: Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ thì *hiệu của hai ma trận* A *và* B, kí hiệu $A - B$, là phép cộng giữa ma trận A và ma trận đối của ma trận B. Vậy $A - B = A + (-B)$

Trong **Ví dụ 12** thì

$$E - F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}.$$

b. Phép nhân một số với một ma trận

Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và số $\lambda \in \mathbb{R}$ thì *tích của số* λ *và ma trận* A, kí hiệu λA, là ma trận $B = (b_{ij})_{m\times n}$ với $b_{ij} = \lambda a_{ij} (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$.

Vậy

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} = B.$$

Trong **Ví dụ 12** thì

$$2E = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 2 \\ 4 & 6 & -2 & 14 \\ -4 & 0 & 10 & 16 \end{bmatrix},$$

$$(-1)F = (-1)\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Nhận xét: Nếu $\lambda = -1$ thì $(-1)A$ chính là ma trận đối của A (vậy $(-1)A = -A$).

Tính chất: Cho các ma trận $A, B, \theta \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ và $\lambda, k \in \mathbb{R}$. Khi đó

1. $\lambda k A = \lambda(kA) = k(\lambda A)$.
2. $(\lambda + k)A = \lambda A + kA$.
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
4. $\lambda\theta = 0A = \theta$.

Ví dụ 13: Cho các ma trận sau

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&1&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&1&3\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0&4\\2&2\\1&-1\end{bmatrix}.$$

Thực hiện các phép tính sau: $A-3B, A-2C^T+2B$.

Bài giải

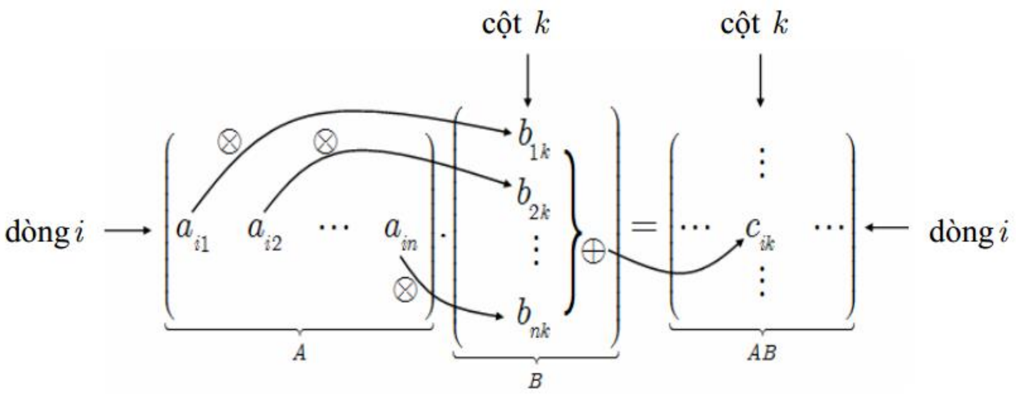
$$A-3B=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&-3&0\\0&3&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&5&-1\\3&-2&-9\end{bmatrix}.$$

$$A-2C^T+2B=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&1&0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0&2&1\\4&2&-1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-4&-3\\-5&-1&8\end{bmatrix}.$$

c. Phép nhân hai ma trận

Điều kiện để có phép nhân của hai ma trận A và B là số cột của ma trận A bằng với số dòng của ma trận B.

Cho $A=(a_{ij})_{m\times p}, B=(b_{ij})_{p\times n}$ thì *tích của hai ma trận A và B*, kí hiệu $A.B$ (hoặc AB), là ma trận $C=(c_{ij})_{m\times n}$ với $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}, \forall i,j$.



Ví dụ 14: Cho các ma trận sau

$$A=\begin{bmatrix}0&-3\\1&2\\5&4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0&1\\3&0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}0&1\\2&-3\end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix}5&0\\1&0\end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}.$$

Khi đó $AB=\begin{bmatrix}0&-3\\1&2\\5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9&0\\6&1\\12&5\end{bmatrix}$ nhưng BA không tồn tại.

$$CD=\begin{bmatrix}4&-5\\8&-9\end{bmatrix}, DC=\begin{bmatrix}3&4\\-7&-8\end{bmatrix}, EF=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}, (AB)^T=\begin{bmatrix}-9&6&12\\0&1&5\end{bmatrix}=B^TA^T.$$

Chú ý: Nói chung $AB\neq BA$ và $AB=\theta$ thì không thể kết luận $A=\theta$ hoặc $B=\theta$.

Ví dụ 15: Cho các ma trận sau $A=\begin{bmatrix}1&x&3\\2&-1&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2\\4\\y\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}12\\6\end{bmatrix}$. Nếu $AB=C$ hãy tìm x và y.

Bài giải

Ta có $AB = \begin{bmatrix} 1 & x & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4x+3y \\ 4-4+y \end{bmatrix} = C$. Suy ra $y = 6, x = -2$.

Tính chất: Cho các ma trận A, B, C và $\lambda, k \in \mathbb{R}$. Giả thuyết rằng các phép tính đều thực hiện được, ta có:

1. $A(BC) = (AB)C$.
2. $A(B + C) = AB + AC$.
3. $(B + C)A = BA + CA$.
4. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
5. $(AB)^T = B^T A^T$.

Nếu A là ma trận vuông cấp n thì $AI_n = I_n A = A$.

Định nghĩa: Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ và $k \in \mathbb{N}$ thì *lũy thừa bậc k của A*, kí hiệu A^k là ma trận được xác định bằng qui nạp như sau:

∗ Nếu $k = 0$ thì qui ước $A^0 = I_n$.

∗ Nếu $k = 1$ thì qui ước $A^1 = A$.

∗ Nếu $k \geq 2$ thì $A^k = A.A \dots A$ (k lần)

Ví dụ 16: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Khi đó $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Tính chất: Cho các ma trận $A, B, \theta \in M_n(\mathbb{R})$ và $k, l \in \mathbb{N}$. Khi đó

1. $\theta^k = \theta; I_n^k = I_n; A^{k+l} = A^k A^l; A^{kl} = (A^k)^l$.
2. $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.
3. Nếu $A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ thì $A^k = \operatorname{diag}(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)$.

Ví dụ 17: Tính $D = C^2 + 2C + I_3 - (AB)^T$, với A, B, C là các ma trận cho bởi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bài giải

Ta có thể tính từng giá trị một hoặc có thể nhận thấy

$$C^2 + 2C + I_3 = C^2 + CI_3 + I_3C + I_3^2 = (C + I_3)^2.$$

$$D = (C + I_3)^2 - (AB)^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -6 \\ 2 & -3 & 12 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -11 \end{bmatrix}.$$

1.1.4. Các phép biến đổi sơ cấp

Cho ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} (m \geq 2)$, ta gọi *các phép biến đổi sơ cấp dòng trên A* là một trong các dạng sau (kết quả sau khi thực hiện các phép biến đổi sơ cấp dòng trên A sẽ tạo ra một ma trận mới, giả sử là ma trận B):

∗ Phép 1: Đổi vị trí hai dòng của ma trận. Giả sử đổi chỗ dòng i và dòng j, kí hiệu

$$A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} B.$$

Ví dụ: $\begin{bmatrix}1&1&2&1\\1&2&1&3\\2&3&3&4\end{bmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{bmatrix}1&2&1&3\\1&1&2&1\\2&3&3&4\end{bmatrix}.$

∗ Phép 2: Nhân một dòng nào đó của ma trận với một số (thuộc $\mathbb{R}$) khác không. Giả sử nhân dòng i với số $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, kí hiệu

$$A \xrightarrow{d_i \to \lambda d_i} B.$$

Ví dụ: $\begin{bmatrix}1&1&2&1\\1&2&1&3\\2&3&3&4\end{bmatrix} \xrightarrow{d_1 \to 3d_1} \begin{bmatrix}3&3&6&3\\1&2&1&3\\2&3&3&4\end{bmatrix}.$

∗ Phép 3: Cộng vào một dòng nào đó của ma trận, một dòng khác đã được nhân với một số (thuộc $\mathbb{R}$). Giả sử cộng vào dòng i, dòng j nhân với $\lambda \in \mathbb{R}$, kí hiệu

$$A \xrightarrow{d_i \to d_i + \lambda d_j} B.$$

Ví dụ: $\begin{bmatrix}1&1&2&1\\1&2&1&3\\2&3&3&4\end{bmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - 2d_2} \begin{bmatrix}1&1&2&1\\1&2&1&3\\0&-1&1&-2\end{bmatrix}.$

Chú ý:

i) Ta có thể thực hiện liên tiếp nhiều phép biến đổi sơ cấp dòng trên A nhưng không được gây nhầm lẫn.

ii) Định nghĩa tương tự ta có *các phép biến đổi sơ cấp cột trên A*.

Ví dụ 18:

$$A = \begin{bmatrix}1&1&2&1&5\\1&2&1&3&7\\2&3&3&4&10\end{bmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{bmatrix}1&2&1&3&7\\1&1&2&1&5\\2&3&3&4&10\end{bmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - 2d_2} \begin{bmatrix}1&2&1&3&7\\1&1&2&1&5\\0&1&-1&2&0\end{bmatrix}.$$

$$B = \begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\2&1&-3&1\\3&1&3&1\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d_3 \to d_3 - 2d_1 \\ d_4 \to d_4 - 3d_1}]{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-2&0&-2\\0&-1&-5&-1\\0&-2&0&-2\end{bmatrix}.$$

Ví dụ 19: Hãy dùng các phép biến đổi sơ cấp dòng đưa ma trận $A = \begin{bmatrix}1&2&0&2&1\\2&4&1&3&0\\3&6&2&3&1\\1&2&1&0&1\end{bmatrix}$ về dạng bậc thang.

Bài giải

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&2&1\\2&4&1&3&0\\3&6&2&3&1\\1&2&1&0&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&2&1\\0&0&1&-1&-2\\0&0&2&-3&-2\\0&0&1&-2&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&2&1\\0&0&1&-1&-2\\0&0&0&-1&2\\0&0&0&-1&2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&2&1\\0&0&1&-1&-2\\0&0&0&-1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

1.2. Định thức

1.2.1. Định nghĩa định thức

a. Ma trận con cấp k

Cho ma trận A cấp $m\times n$. Ma trận vuông cấp k lập từ các phần tử nằm trên giao của k dòng và k cột được gọi là *ma trận con vuông* cấp k của A.

b. Ma trận con ứng với một phần tử

Cho $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ là ma trận vuông cấp n, ma trận con cấp $n-1$ lập từ A bằng cách bỏ đi dòng i và cột j được gọi là ma trận con của A ứng với phần tử a_{ij}, kí hiệu M_{ij}.

Ví dụ 19: Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\1&1&-1\end{bmatrix}$.

Khi đó $M_{11}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix}, M_{12}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}, M_{23}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$.

c. Định nghĩa định thức

Cho $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ là ma trận vuông cấp n. *Định thức cấp n* (hoặc đơn giản là *định thức) của ma trận A*, kí hiệu $\det A$ hoặc $|A|$, được định nghĩa bằng qui nạp như sau:

- Với A cấp 1 ($n=1$), $A=[a_{11}]$, khi đó $\det A=a_{11}$.
- Với A cấp 2 ($n=2$), $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$, khi đó

$$\det A=a_{11}\det M_{11}-a_{12}\det M_{12}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

(chú ý a_{11},a_{12} là các phần tử nằm trên dòng 1)

- Với A cấp $n\geq 3$, khi đó

$$\det A=a_{11}\det M_{11}-a_{12}\det M_{12}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\det M_{1n}.$$

(chú ý a_{11},a_{12},a_{1n} là các phần tử nằm trên dòng 1)

Chú ý: Gọi $A_{ij}=(-1)^{i+j}\det M_{ij}$ là *phần bù đại số* của phần tử a_{ij}. Khi đó

$$\det A=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}.$$

Ví dụ 20: Tính định thức của ma trận $A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\1&1&-1\end{bmatrix}$.

Bài giải

Ta có $A_{11} = (-1)^{1+1} \det M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1.(-1) - (-1).1 = 0$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \det M_{12} = -1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(0.(-1) - (-1).1) = -1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \det M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.1 - 1.1 = -1$$

Do đó $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1.0 + (-1).(-1) + 2.(-1) = -1$.

Chú ý: Từ định nghĩa, bằng chứng minh qui nạp ta cũng có

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}.$$

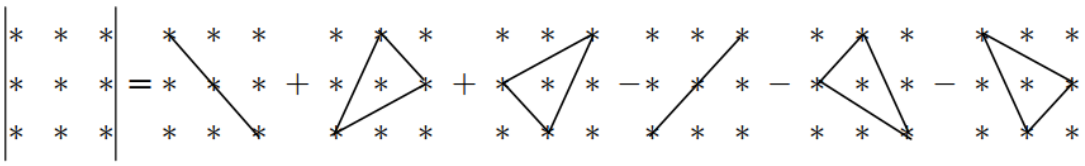
(chú ý a_{11}, a_{21}, a_{n1} là các phần tử nằm trên cột 1).

Nhận xét:

i) $\det \theta = 0$; $\det I_n = 1$; $\det \mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1.a_2 \dots a_n$.

ii) Quy tắc lấy tích đường chéo chính trừ cho tích đường chéo phụ đối với định thức cấp 2.

iii) Quy tắc sáu đường chéo (*Quy tắc Sarius*) đối với định thức cấp 3.



(ba phần tử nằm trên các đoạn nối thì nhân với nhau).

Ví dụ 21: Tính định thức của ma trận A và A^T, với $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Bài giải

Ta có $\det A = 0A_{11} + 0A_{12} + 3A_{13} + (-1)A_{14}$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \det M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -22.$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \det M_{14} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -17.$$

$\Longrightarrow \det A = 3.(-22) + (-1).(-17) = -49$ (tương tự $\det A^T = -49$).

1.2.2. Các tính chất của định thức

Cho $A = (a_{ij})_{n \times n}$ là ma trận vuông cấp n.

a. Tính chất 1

Định thức không đổi qua phép chuyển vị, tức là $\det A^T = \det A$.

b. Tính chất 2

Nếu đổi vị trí hai dòng (hay hai cột) của ma trận thì định thức đổi dấu.

Ví dụ: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

c. Tính chất 3

Định thức có hai dòng (hay hai cột) giống nhau thì bằng 0.

Ví dụ: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

d. Tính chất 4

Định thức có một dòng không (hay một cột không) thì định thức bằng 0.

Ví dụ: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 1.2.(-1).4 = -8.$$

Hệ quả: Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử trên đường chéo chính

e. Tính chất 5

Nhân tử chung của tất cả phần tử trên một dòng (cột) có thể đem ra ngoài định thức.

Ví dụ: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Chú ý: i) Tính chất trên có thể phát biểu cách khác là: nếu nhân tất cả phần tử trên một dòng (cột) cho số $\lambda \neq 0$ thì định thức tăng lên λ lần.

ii) $\det \lambda A = \lambda^n . \det A$.

f. Tính chất 6

Định thức có hai dòng (hai cột) mà các phần tử tương ứng tỉ lệ thì bằng 0.

Ví dụ: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

g. Tính chất 7

Nếu định thức có một dòng (một cột) mà mỗi phần tử là tổng của hai số hạng thì ta có thể tách thành tổng hai định thức. Vậy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+a_{21} & \cdots & a_{2n}+b_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{21} & \cdots & b_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ví dụ: $\begin{vmatrix} \cos^2\alpha & 1 & 3 \\ \sin^2\beta & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & 3 \\ \cos^2\beta & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

h. Tính chất 8

Định thức sẽ không đổi nếu ta cộng vào một dòng (hay một cột) với λ lần dòng (cột) khác ($\lambda \in K$).

Ví dụ: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[d_1 \to d_1 + 3d_2]{} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$

Nhận xét: Như vậy ta sẽ dùng tính chất này đưa định thức ban đầu về định thức của ma trận tam giác, hoặc càng tạo ra nhiều số 0 càng tốt.

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6.$$

Chú ý: Như vậy ta có phương pháp đầu tiên để tính nhanh định thức là áp dụng linh hoạt các tính chất.

Ví dụ 22: Tính định thức sau ($m \in \mathbb{R}$)

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 2 & 2 & 2 \\ 2 & m & 2 & 2 \\ 2 & 2 & m & 2 \\ 2 & 2 & 2 & m \end{vmatrix}.$$

Bài giải

Ý tưởng đầu tiên là cộng các dòng về dòng 1, xuất hiện nhân tử chung.

$$\Delta = \begin{vmatrix} m+6 & m+6 & m+6 & m+6 \\ 2 & m & 2 & 2 \\ 2 & 2 & m & 2 \\ 2 & 2 & 2 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+6 & m+6 & m+6 & m+6 \\ 2 & m & 2 & 2 \\ 2 & 2 & m & 2 \\ 2 & 2 & 2 & m \end{vmatrix}$$

$$= (m+6)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 & 2 \\ 2 & 2 & m & 2 \\ 2 & 2 & 2 & m \end{vmatrix} = (m+6)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m-2 \end{vmatrix}$$

$$= (m+6)(m-2)^3.$$

1.2.3. Công thức khai triển định thức (khai triển Laplace)

Cho $A = \left(a_{ij}\right)_n$ là ma trận vuông cấp n. Ta có *khai triển Laplace* như sau:

- Khai triển theo dòng thứ i

$$\begin{aligned}\det A &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}\\ &= a_{i1}(-1)^{i+1}|M_{i1}| + a_{i2}(-1)^{i+2}|M_{i2}| + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}|M_{in}|.\end{aligned}$$

- Khai triển theo cột thứ j

$$\begin{aligned}\det A &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}\\ &= a_{1j}(-1)^{1+j}\left|M_{1j}\right| + a_{2j}(-1)^{2+j}\left|M_{2j}\right| + \cdots + a_{in}(-1)^{n+j}\left|M_{nj}\right|.\end{aligned}$$

Ví dụ 23: Tính định thức sau bằng hai cách, khai triển theo dòng 1 và theo cột 2

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 2 & 3\\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Hướng dẫn: Theo dòng 1: $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$

$$= 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Theo cột 2: $\Delta = 3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$

Nhận xét: Khi tính định thức, ta nên khai triển Laplace theo dòng (hay cột) có chứa nhiều phần tử 0 nhất.

Chú ý: Như vậy ta có hai phương pháp tính định thức là áp dụng các tính chất hoặc dùng khai triển Laplace. Tuy nhiên ta có thể vận dụng linh hoạt hai phương pháp này.

Ví dụ 23: Tính định thức sau: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0\\ 4 & 4 & 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

Hướng dẫn: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -5 & -3\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -5 & -3\\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

$$= -1(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} -3 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -23.$$

Định lí: Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó $\det AB = \det A . \det B$.

Ví dụ 24: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Tìm x biết $\det AB = 1$.

Hướng dẫn: $1 = \det AB = \det A . \det B = -1(-2x + 5) = 2x - 5$. Do đó $x = 3$.

Chú ý: Ma trận vuông A được gọi là *không suy biến* nếu $\det A \neq 0$.

1.3. Hạng của ma trận

1.3.1. Định nghĩa

a. Định thức con cấp k

Cho ma trận A cấp $m \times n$. Định thức của ma trận con vuông cấp k của A được gọi là *định thức con cấp* k của A.

Nhận xét: Nếu ma trận A có tất cả *các định thức con cấp* k đều bằng 0 thì các định thức con cấp cao hơn cũng bằng 0.

b. Hạng của ma trận

Cho ma trận A cấp $m \times n$. *Hạng của ma trận* A, kí hiệu $\operatorname{rank} A$ hoặc $r(A)$, là số nguyên r không âm thỏa mãn các điều kiện sau:

$*$ Nếu $A = \theta$ thì $r = 0$.

$*$ Nếu $A \neq \theta$ thì r là số nguyên dương lớn nhất sao cho A có định thức con cấp r khác không.

Ví dụ 25: Tính hạng của các ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & -6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Bài giải

Ta thấy A là ma trận vuông cấp 3 nên A chỉ có một định thức con cấp 3 là $\det A$, ta tính được $\det A = 0$. Tính thử các định thức con cấp 2, ta thấy $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$. Nên theo định nghĩa ta được $r(A) = 2$.

Ma trận B không phải là ma trận vuông. Định thức con cấp lớn nhất là cấp 3, có C_4^3 định thức con cấp 3. Tính thử ta thấy

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Kiểm tra thử các định thức con cấp 2, ta thấy $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$. Nên theo định nghĩa ta được $r(B) = 2$.

Ma trận C có $r(C) = 3$ vì $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$.

Nhận xét: i) $r(A) \leq \min\{m, n\}$.

ii) Nếu A là ma trận vuông cấp n thì $r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

iii) $r(A) = r(A^T)$.

Ví dụ 26: Tìm $m \in \mathbb{R}$ để ma trận sau có hạng là 3.

$$A = \begin{bmatrix} m & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{bmatrix}.$$

Bài giải

Ta có $\det A = -2m^2 + 3m - 8 < 0, \forall m \in \mathbb{R}$. Do đó $r(A) = 3$ với $\forall m \in \mathbb{R}$.

1.3.2. Cách tìm hạng của ma trận

Để tìm hạng bằng ma trận, nếu ta lần lượt xét các định thức con đôi khi rất khó khăn. Do đó ta cần có một phương pháp khác để tính hạng của ma trận. Cơ sở của phương pháp này dựa trên hai định lí sau:

Định lí 1: Các phép biến đổi sơ cấp dòng không làm thay đổi hạng của ma trận.

Định lí 1: Hạng của ma trận bậc thang dòng bằng với số dòng khác không của nó.

Như vậy để tìm hạng của một ma trận ta sẽ dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận về dạng bậc thang. Số dòng khác không của ma trận bậc thang đó sẽ là hạng của ma trận cần tìm.

Trong **Ví dụ 25** ta tìm hạng của B bằng các phép biến đổi sơ cấp.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Do đó $r(B) = 2$.

Nhận xét: Ta có thể tìm hạng của ma trận bậc bằng các phép biến đổi sơ cấp trên cột.

Ví dụ 27: Biện luận theo $m \in \mathbb{R}$ hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} m+1 & 1 & 3 \\ 2 & m+2 & 0 \\ 2m & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Bài giải

$$\begin{bmatrix} m+1 & 1 & 3 \\ 2 & m+2 & 0 \\ 2m & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & m+1 \\ 0 & m+2 & 2 \\ 3 & 1 & 2m \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & m+1 \\ 0 & m+2 & 2 \\ 0 & 0 & m-1 \end{bmatrix}$$

Với $m = 1$ thì $r(A) = 2$.

Với $m = -2$ thì

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2.$$

Với $m \neq 1$ và $m \neq -2$ thì $r(A) = 3$.

1.4. Ma trận nghịch đảo

1.4.1. Định nghĩa, điều kiện tồn tại và công thức tính

a. Định nghĩa

Cho ma trận vuông A cấp n, nếu tồn tại ma trận vuông B cấp n sao cho $AB = BA = I_n$ thì ta nói A *khả đảo* và gọi B là *ma trận nghịch đảo* của ma trận A, kí hiệu A^{-1}.

Vậy $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

b. Điều kiện tồn tại

Ta thừa nhận định lí sau

Định lí: Ma trận vuông A có ma trận nghịch đảo (khả đảo) khi và chỉ khi A không suy biến ($\det A \neq 0$).

c. Tính chất của ma trận nghịch đảo

Cho A, B là các ma trận vuông cấp n, không suy biến. Khi đó

1. $(A^{-1})^{-1} = A; (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

d. Công thức tìm ma trận nghịch đảo

Cho $A = \left(a_{ij}\right)_n$ là ma trận vuông không suy biến cấp n. Tính các phần bù đại số $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det M_{ij}$, khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 28: Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của các ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bài giải

$*$ Ta có $\det A = 0$ nên A không có ma trận nghịch đảo.

$*$ Ta có $\det B = 2$ nên B khả nghịch. Ta tính các phần bù đại số

$B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 1, B_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 1, B_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -1$

$B_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} = -4, B_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 2, B_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 0$

$B_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 1, B_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} = -1, B_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1$

Vậy $B^{-1} = \frac{1}{\det B}\begin{bmatrix}B_{11} & B_{21} & B_{31}\\ B_{12} & B_{22} & B_{32}\\ B_{13} & B_{23} & B_{33}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -4 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2 & -2 & 1/2\\ 1/2 & 1 & -1/2\\ -1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$

$*$ $\det C = -3$. Việc tìm ma trận nghịch đảo của C xin giành cho các bạn độc giả.

1.4.2. Tìm ma trận nghịch đảo bằng các phép biến đổi sơ cấp dòng

Cho A là ma trận vuông cấp n, không suy biến. Để tìm A^{-1} ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp dòng. Cụ thể ta có quy tắc thực hàng như sau:

Quy tắc thực hành

Lập *ma trận ghép* $[A|I_n]$ (có cấp $n \times 2n$)

$$[A|I_n] = \left[\begin{array}{cccc|cccc}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{21} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{array}\right].$$

Sau đó dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận $[A|I_n]$ về dạng $[I_n|B]$. Khi đó B chính là ma trận nghịch đảo của A, $A^{-1} = B$.

Xét **Ví dụ 28** ta tìm ma trận nghịch đảo của ma trận C. Ta có

$$[C|I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc}0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc}3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & 1 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & 1 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 & -1/3\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 2/3 & -1/3\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1/3 & -1/3 & -1/3 & 2/3\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3\end{array}\right] \Longrightarrow C^{-1} = \begin{bmatrix}-2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3\end{bmatrix}.$$

Ứng dụng của ma trận nghịch đảo giải phương trình ma trận

Xét phương trình ma trận $AX = B$ hoặc $(XA = B)$. Nếu A khả nghịch thì

$$X = A^{-1}B (X = BA^{-1}).$$

Ví dụ 29: Tìm ma trận X thỏa $AX - B = 0$ trong đó $A = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$.

Bài giải

Ta có $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. Do đó $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -16 & 29 & -58 \\ -9 & 17 & -32 \end{bmatrix}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG 1

Chọn câu trả lời đúng nhất cho các câu hỏi dưới đây.

Dạng toán: Ma trận và các phép toán

1. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Khẳng định nào đúng?

A. $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ B. $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

C. $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ D. $A + B$ không tồn tại

2. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Khẳng định nào đúng?

A. $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ B. $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

C. $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ D. $A + B$ không tồn tại

3. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Khẳng định nào KHÔNG đúng?

A. $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ B. $AB = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

C. $A - B$ không tồn tại D. $A + B$ không tồn tại

4. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Khẳng định nào đúng

A. $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ B. $AB = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

C. $A - B$ không tồn tại D. $A + B$ không tồn tại

5. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $AB = BA$ B. AB xác định nhưng BA không xác định

C. $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ D. $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Khẳng định nào đúng

A. AB và BA đều không xác định B. AB xác định nhưng BA không xác định

C. BA xác định nhưng AB không xác định D. AB và BA đều xác định

7. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Khẳng định nào đúng

A. AB và BA đều không xác định B. AB xác định nhưng BA không xác định

C. BA xác định nhưng AB không xác định D. AB và BA đều xác định

8. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Khẳng định nào là đúng

A. $AB = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ B. $AB = \begin{bmatrix} 5 & 9 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C. $AB = \begin{bmatrix} 5 & 9 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ D. BA xác định nhưng AB không xác định

9. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ và ma trận $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Kết quả của phép tính $A.B^T$ là

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

10. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Kết quả của phép tính $A + A.B^T$ là

A. $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 5 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 5 \\ -4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 5 \\ -4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ D. Một kết quả khác

11. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Khi đó ma trận A^2 là kết quả nào sau đây

A. $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$