Chương 4
Hệ phương trình tuyến tính

Ở bậc trung học cơ sở và trung học phổ thông, học sinh đã gặp các hệ phương trình tuyến tính đơn giản (là các hệ phương trình bậc nhất hai ẩn hoặc ba ẩn). Học sinh đã có thể giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn hoặc ba ẩn bằng phương pháp dùng các phép biến đổi tương đương hệ phương trình, phương pháp khử ẩn, phương pháp thay thế hoặc dùng máy tính bỏ túi để giải.

Hệ phương trình tuyến tính là hệ phương trình mà các ẩn số cần tìm ở bậc một, đây là bài toán thường gặp phải khi nghiên cứu các đối tượng có quan hệ tuyến tính. Đối với hệ phi tuyến người ta xấp xỉ bởi hệ tuyến tính. Vì vậy hệ phương trình tuyến tính có rất nhiều ứng dụng trong thực tế: chẳng hạn các bài toán kỹ thuật, phân tích thống kê trong tâm lý học, xã hội học và kinh tế học. . .

Qua Chương 4, người học sẽ biết cách giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp định thức đối với hệ Cramer, phương pháp khử Gauss có thể giải được mọi hệ với số phương trình và số ẩn không quá lớn.

Thoạt tiên ta có thể thấy rằng hình như vấn đề giải hệ phương trình tuyến tính đã cũ rồi và có thể giải quyết bằng những phương tiện tính toán sơ cấp quen biết. Tuy nhiên để giải các bài toán thực tế nêu ra ở trên ta thường phải khảo sát khoảng từ 150 đến 200 phương trình đồng thời. Tình trạng ấy trong thực hành đã gây ra nhiều khó khăn lớn đến nỗi hầu như không thể giải quyết được nếu chỉ dùng phương pháp sơ cấp. Với sự hỗ trợ của máy tính và các thuật toán mới đã khiến cho hệ phương trình tuyến tính được ứng dụng hiệu quả để giải quyết các bài toán thực tế. Mùa hè năm 1949, Giáo sư Wassily Leontief trường Đại học HarVard đã gửi đến Trung tâm tính toán của trường Đại học Mark II đề nghị giải hệ phương trình tuyến tính gồm 500 phương trình với 500 ẩn biểu diễn các chỉ tiêu kinh tế của Mỹ. Mark II là một trong những trung tâm máy tính điện tử lớn nhất thời bấy giờ cũng không giải quyết được. Leontief buộc phải rút gọn bài toán về hệ 45 phương trình với 45 ẩn. Với kết quả này Leontief nhận được giải Nobel kinh tế năm 1973, ông được xem là người mở cánh cửa vào kỷ nguyên mới về các mô hình toán học về kinh tế.

Để học tốt Chương 4, sinh viên cần phải sử dụng thành thạo công cụ là ma trận và định thức ở Chương 3. Ta lại thấy rằng giải các hệ phương trình tuyến tính là công cụ để giải quyết một số vấn đề ở Chương 2 và Chương 5 của giáo trình này.

4.1. Khái niệm hệ phương trình tuyến tính

Trong chương trình hình học giải tích ở bậc trung học phổ thông ta đã gặp các bài toán liên quan đến hệ phương trình khi tìm giao của các đường thẳng hoặc mặt phẳng.

Chẳng hạn, trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tập hợp các điểm có tọa độ (x, y, z) thỏa mãn phương trình $Ax + By + Cz = D$ là một mặt phẳng, do đó phương trình có vô số nghiệm tương ứng với vô số điểm trên mặt phẳng. Tương tự tập hợp nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases} \tag{4.1}$$

là giao của hai mặt phẳng. Vì vậy hệ phương trình có thể vô nghiệm hoặc vô số nghiệm tương ứng với hai mặt phẳng song song hoặc giao tuyến là đường thẳng hoặc hai mặt phẳng trùng nhau.

Tương tự tập hợp nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \end{cases} \tag{4.2}$$

là giao của ba mặt phẳng. Vì vậy hệ phương trình có thể vô nghiệm hoặc duy nhất nghiệm hoặc vô số nghiệm.

Khái niệm hệ phương trình tuyến tính tổng quát và phương pháp giải được xét trong các mục sau.

4.1.1. Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

Hệ m phương trình tuyến tính với n ẩn số $(1 \leq m, n \in \mathbb{N})$ có *dạng tổng quát*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.3}$$

Hoặc viết tắt

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1, 2, \ldots, m.$$

Trong đó:

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là n ẩn số,
- a_{ij} là hệ số của ẩn thứ j trong phương trình thứ i; $a_{ij} \in \mathbb{R}$,
- b_i là hệ số vế phải của phương trình thứ i; $i = 1, \ldots, m$; $b_i \in \mathbb{R}$;
- Khi các vế phải $b_i = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ thì hệ phương trình được gọi là thuần nhất.

Mọi hệ phương trình khi cho vế sau (vế phải) bằng 0 ta có *hệ phương trình thuần nhất* tương ứng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Nghiệm của hệ phương trình là bộ gồm n số $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ sao cho khi thay $x_i = \alpha_i; i = 1, 2, \ldots, n$ vào các phương trình của hệ (4.3) hoặc hệ (4.4) ta có các đẳng thức số đúng.

Nghiệm tổng quát của hệ phương trình là nghiệm khi hệ phương trình có vô số nghiệm, phụ thuộc vào một vài tham số nhận giá trị tuỳ ý.

Nghiệm riêng của hệ phương trình là nghiệm gồm n số xác định $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_n^0)$, nhận được sau khi cho các tham số tuỳ ý của nghiệm tổng quát bởi giá trị cụ thể.

Hai hệ phương trình cùng ẩn được gọi là tương đương nếu tập hợp nghiệm của chúng bằng nhau. Vì vậy để giải một hệ phương trình ta có thể giải *hệ phương trình tương đương* của nó.

4.1.2. Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Với hệ (4.3) ta xét các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

A, X, B lần lượt được gọi là *ma trận hệ số, ma trận ẩn số và ma trận vế phải* (hoặc ma trận tự do).

Khi đó hệ phương trình (4.3) được viết lại dưới *dạng ma trận* như sau:

$$AX = B. \tag{4.5}$$

4.1.3. Dạng véc tơ của hệ phương trình tuyến tính

Nếu ta ký hiệu véc tơ $v_i = (a_{1i}, \ldots, a_{mi}) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ cột thứ i của ma trận A, và véc tơ $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ vế phải, thì hệ (4.3) được viết dưới *dạng véc tơ* như sau

$$x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n = b \tag{4.6}$$

Với cách viết này ta thấy rằng hệ phương trình (4.6) có nghiệm khi và chỉ khi

$$b \in \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}.$$

Ví dụ 4.1. Xét hệ phương trình viết dưới dạng tổng quát:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12. \end{cases}$$

Hệ phương trình trên viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Hoặc

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Ta có dạng véc tơ của hệ phương trình:

$$x_1(2,4,8) + x_2(2,3,5) + x_3(-1,-1,-3) + x_4(1,2,4) = (4,6,12).$$

Nếu ký hiệu

$$v_1 = (2,4,8), v_2 = (2,3,5), v_3 = (-1,-1,-3), v_4 = (1,2,4), b = (4,6,12)$$

thì

$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = b.$$

4.2. Định lý tồn tại nghiệm

Định lý 4.1. (Kronecker - Capelli) Hệ phương trình (4.3) có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(\overline{A})$, trong đó $\overline{A}$ là ma trận có được bằng cách bổ sung thêm vào ma trận hệ số A một cột cuối là vế phải của hệ phương trình.

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]. \tag{4.7}$$

Chứng minh. Hệ (4.3) có nghiệm khi và chỉ khi tồn tại $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ sao cho

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = b.$$

Nghĩa là $b \in \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$.

Vậy $r(v_1, \dots, v_n) = r(v_1, \dots, v_n, b)$. Do đó, $r(A) = r(\overline{A})$. $\square$

Ví dụ 4.2. Xét hệ phương trình trong Ví dụ 4.1.

Ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ có $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3.$

Ma trận bổ sung $\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \end{bmatrix}$ có $3 = r(A) \leq r(\overline{A}) \leq 3.$

$\Rightarrow r(A) = r(\overline{A}) = 3$, do đó hệ phương trình có nghiệm.

Ví dụ 4.3. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 2 \\ 2x + y + z = 4 \\ -x - 4y + 3z = 5. \end{cases}$$

Ta có $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}; \overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(A) < 3; \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 49 \Rightarrow r(\overline{A}) = 3.$

Theo định lý Kronecker – Capelli thì hệ phương trình trên vô nghiệm.

Ví dụ sau đây chỉ ra rằng trong quá trình biến đổi đưa hệ phương trình về hệ phương trình tương đương bằng cách biến đổi theo hàng của ma trận bổ sung $\overline{A}$ ta sẽ tìm được điều kiện tồn tại nghiệm và đồng thời từ đó có thể giải ra nghiệm.

Ví dụ 4.4. Biến đổi ma trận bổ sung của hệ phương trình trong ví dụ 4.1

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[4h_1 - h_3 \to h_3]{2h_1 - h_2 \to h_2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3h_2+h_3\to h_3}\begin{bmatrix}2&2&-1&1&4\\0&1&-1&0&2\\0&0&2&0&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}h_3\to h_3]{\frac{1}{2}h_3+h_2\to h_2}\begin{bmatrix}2&2&-1&1&4\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-1\end{bmatrix}.$$

$r(A)=r(\overline{A})=3$. Vậy hệ phương trình trong Ví dụ 4.1 có nghiệm.

Ví dụ 4.5. Biến đổi ma trận bổ sung của hệ phương trình trong Ví dụ 4.3

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&-3&4&2\\2&1&1&4\\-1&-4&3&5\end{bmatrix}\xrightarrow[-2h_1+h_2\to h_2]{h_1+h_3\to h_3}\begin{bmatrix}1&-3&4&2\\0&7&-7&0\\0&-7&7&7\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-3&4&2\\0&7&-7&0\\0&0&0&7\end{bmatrix}.$$

Do đó $r(A)=2<r(\overline{A})=3$. Vậy hệ phương trình trong Ví dụ 4.3 vô nghiệm.

4.3. Một số phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

4.3.1. Phương pháp Cramer (còn gọi là phương pháp định thức)

Xét hệ n phương trình tuyến tính với n ẩn số dạng ma trận (4.5): $AX=B$.

Định nghĩa 4.1. Hệ n phương trình tuyến tính n ẩn, có ma trận hệ số A không suy biến ($\det A\neq 0$) được gọi là *hệ Cramer*.

Định lý 4.2. (**Định lý Cramer**) Mọi hệ Cramer đều tồn tại duy nhất nghiệm. Công thức nghiệm được xác định như sau:

$$x_i=\frac{\det A_i}{\det A}, i=1,2,\dots,n. \tag{4.8}$$

Trong đó A_i là ma trận vuông cấp n, có được bằng cách thay cột thứ i của ma trận hệ số A bởi cột hệ số vế phải B.

Chứng minh.

Cách 1. Do $\det A\neq 0$ nên hệ $\{v_1,\dots,v_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Do đó b được biểu diễn duy nhất thành tổ hợp tuyến tính của $\{v_1,\dots,v_n\}$. Nghĩa là tồn tại duy nhất $x_1,\dots,x_n$ sao cho $x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_nv_n=b$.

Gọi $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Khi đó

$$D_i = D_{\mathcal{B}}\{v_1, \ldots, v_{i-1}, b, v_{i+1}, \ldots, v_n\} = D_{\mathcal{B}}\left\{v_1, \ldots, v_{i-1}, \sum_{k=1}^{n} x_k v_k, v_{i+1}, \ldots, v_n\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k D_{\mathcal{B}}\{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_k, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$$

$$= x_i D_{\mathcal{B}}\{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n\} = x_i D.$$

Do đó $x_i = \dfrac{D_i}{D}, i = 1, \ldots, n$, trong đó, $D_i = \det A_i, D = \det A$. □

Cách 2. Viết hệ phương trình ở dạng ma trận $AX = B, \det A \neq 0$.

Phương trình ma trận này thỏa mãn các điều kiện của ý c) Hệ quả 6, theo Công thức (3.32) hệ có duy nhất nghiệm là $X = A^{-1}B$. Do đó

$$X = \frac{1}{\det A} C_A^t B$$

hay

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ A_{1i} & A_{2i} & \ldots & A_{ni} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Bởi vậy

$$x_i = \frac{1}{\det A}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n) = \frac{\det A_i}{\det A}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Trong đó A_{ki} là phần bù đại số của phần tử $a_{ki}, k = 1, 2, \ldots, n$ trên cột thứ i của A. □

Ví dụ 4.6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + 3y - z &= 1 \\ 3x + 5y + 2z &= 8 \\ x - 2y - 3z &= -1. \end{cases}$$

Giải. Có $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$ nên hệ đã cho là hệ Cramer.

Ta có

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 66, |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -22, |A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 44.$$

Do đó hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = 3, y = \frac{|A_2|}{|A|} = -1, z = \frac{|A_3|}{|A|} = 2$$

hay nghiệm của hệ là $(3, -1, 2)$.

Nhận xét 4.1. Phương pháp Cramer chỉ giải được hệ Cramer.

Đối với hệ có số phương trình, số ẩn lớn thì việc thực hiện rất khó khăn kể cả khi sử dụng các phần mềm để tính.

Phương pháp Cramer có một ưu điểm là với hệ phương trình Cramer thì việc giải hệ đưa về tính các định thức mà các phần mềm có thể hỗ trợ tính toán. Khi hệ Cramer với số ẩn không quá lớn thì phương pháp Cramer khá hiệu quả và có thể giải bằng máy cầm tay.

Ví dụ 4.7. Giải hệ phương trình tuyến tính trường hợp tổng quát, xét hệ 4.3.

Giả sử hệ phương trình có nghiệm và $r(A) = r(\overline{A}) = p; p \leq \min(m, n)$.

Giải. Không giảm tổng quát, giả sử p véc tơ hàng phía trên của ma trận A tạo thành hệ độc lập tuyến tính tối đại của hệ các véc tơ hàng của A.

Giả sử $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$. Vì vậy hệ (4.3) tương đương với p phương trình đầu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pp}x_p + \cdots + a_{pn}x_n = b_p. \end{cases}$$

(trường hợp khác cách giải hoàn toàn tương tự).

Hệ phương trình trên được viết lại

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 - (a_{1p+1}x_{p+1} + \cdots + a_{1n}x_n) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 - (a_{2p+1}x_{p+1} + \cdots + a_{2n}x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pp}x_p = b_p - (a_{pp+1}x_{p+1} + \cdots + a_{pn}x_n) \end{cases} \tag{4.3'}$$

Đây là hệ Cramer có vế phải phụ thuộc vào các ẩn $x_{p+1}, \ldots, x_n$. Với mỗi bộ giá trị cụ thể các ẩn ở vế phải là $x^0_{p+1}, \ldots, x^0_n$ thì hệ (4.3') trở thành một hệ Cramer, có nghiệm duy nhất $(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_p, x^0_{p+1}, \ldots, x^0_n)$, trong đó $(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_p)$ được tính theo bộ số $(x^0_{p+1}, \ldots, x^0_n)$.

Các ẩn $x_{p+1}, \ldots, x_n$ có thể nhận vô số bộ giá trị tùy ý. Vậy hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào các ẩn $x_{p+1}, \ldots, x_n$.

Ví dụ 4.8. Giải và biện luận theo tham số λ hệ phương trình

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1. \end{cases}$$

Giải.

Ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$ (Xem Ví dụ 3.46 Chương 3).

Ta có $\det A = (\lambda + 3)(\lambda - 1)^3$.

Khi $\lambda \neq -3, \lambda \neq 1$: Hệ đã cho là hệ Cramer nên có nghiệm duy nhất. Ngoài ra khi thay đổi vai trò của các ẩn trong hệ thì hệ không thay đổi, suy ra nghiệm thỏa mãn $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, do đó

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{\lambda + 3}.$$

Bởi vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1}{\lambda+3}, \frac{1}{\lambda+3}, \frac{1}{\lambda+3}, \frac{1}{\lambda+3}\right)$.

Khi $\lambda = 1 : r(A) = r(\overline{A}) = 1$, phương trình đã cho tương đương với phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Hệ phương trình có vô số nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2, x_3, x_4 \text{ nhận giá trị tùy ý thuộc } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát của hệ có dạng

$$(1 - x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4); x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Khi $\lambda = -3$: $\det A = 0$ nên $r(A) < 4$ (theo Ví dụ 3.46 $r(A) = 3$) nhưng ma trận bổ sung $\overline{A}$ có định thức con cấp 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 64 \neq 0.$$

Do đó $r(\overline{A}) = 4$ và hệ vô nghiệm.

Kết luận:

Hệ có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{1}{\lambda+3}, \dfrac{1}{\lambda+3}, \dfrac{1}{\lambda+3}, \dfrac{1}{\lambda+3}\right)$ khi $\lambda \neq -3, \lambda \neq 1$;

Hệ có vô số nghiệm dạng $(1 - x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4)$ khi $\lambda = 1$;

Hệ vô nghiệm khi $\lambda = -3$.

4.3.2. Phương pháp ma trận nghịch đảo

Định lý 4.3. Hệ Cramer $AX = B$, với các ma trận tương ứng là

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

có nghiệm duy nhất

$$X = A^{-1}B. \tag{4.9}$$

Xem Công thức (3.32) Hệ quả 6. c).

Ví dụ 4.9. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = c. \end{cases}$$

Giải. Dạng ma trận của hệ là

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ có $\det A = -1 \neq 0$; $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ (xem Ví dụ 3.39). Do đó hệ đã cho là hệ Cramer có nghiệm theo Công thức (4.9):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40a + 16b + 9c \\ 13a - 5b - 3c \\ 5a - 2b - c \end{bmatrix}.$$

Vậy $\begin{cases} x_1 = -40a + 16b + 9c \\ x_2 = 13a - 5b - 3c \\ x_3 = 5a - 2b - c \end{cases}$ là nghiệm duy nhất của hệ.

Ví dụ 4.10. Một trung tâm làm dịch vụ vận chuyển hàng hóa. Cước vận chuyển được tính theo ba loại bưu kiện phụ thuộc kích cỡ: nhỏ, trung bình và lớn.

Một lô hàng có: 6 bưu kiện nhỏ, 8 bưu kiện trung bình và 9 bưu kiện lớn có cước vận chuyển là \$173,20.

Một lô hàng khác có: 7 bưu kiện nhỏ, 13 bưu kiện trung bình và 17 bưu kiện lớn với tổng cước phí là \$291,05.

Một bưu kiện lớn có cước phí cao gấp đôi so với một bưu kiện nhỏ.

Tính cước phí vận chuyển 3 bưu kiện nhỏ, 9 bưu kiện vừa và 2 bưu kiện lớn.

Giải. Gọi x, y, z lần lượt là cước phí vận chuyển bưu kiện loại nhỏ, trung bình, lớn. Từ giả thiết trên suy ra x, y, z thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6x + 8y + 9z & = 173.20 \\ 7x + 13y + 17z & = 291.05 \\ 2x - z & = 0. \end{cases}$$

Ma trận hệ số của hệ phương trình

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 7 & 13 & 17 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}; A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -13 & 8 & 19 \\ 41 & -24 & -39 \\ -26 & 16 & 22 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 173.20 \\ 291.05 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.8 \\ 7.25 \\ 9.6 \end{bmatrix}$$

Do đó cước phí vận chuyển 3 bưu kiện nhỏ, 9 bưu kiện vừa và 2 bưu kiện lớn là: $3x + 9y + 2z = \$98.85$.

Ta cũng có thể tính cước phí vận chuyển dưới dạng tích ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4.8 \\ 7.25 \\ 9.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98.85 \end{bmatrix}.$$

Nhận xét 4.2. Hai phương pháp trên chỉ dùng được đối với hệ Cramer.

4.3.3. Phương pháp khử Gauss

Xét hệ m phương trình n ẩn, dạng tổng quát (4.3).

Phương pháp khử Gauss dựa trên nguyên tắc sau.

a. Nguyên tắc

Khử bớt ẩn của các phương trình vì phương trình càng ít ẩn càng dễ tìm nghiệm.

Đưa hệ phương trình (4.3) về hệ tương đương $A'X' = B'$ dễ tìm nghiệm hơn.

Nên thực hiện khử các ẩn lần lượt theo thứ tự sau:

Nếu phương trình thứ nhất có ẩn x_1 ($a_{11} \neq 0$) ta sẽ khử x_1 ở các phương trình còn lại (từ phương trình thứ hai đến phương trình cuối);

Nếu ở phương trình thứ hai có ẩn x_2 ($a_{22} \neq 0$) ta sẽ khử x_2 ở các phương trình còn lại (từ phương trình thứ ba đến phương trình cuối);

Quá trình tiếp tục cuối cùng nhận được hệ phương trình tương đương dạng đơn giản hơn từ đó suy ra nghiệm.

Nhận xét 4.3. Ta có thể kiểm tra được rằng: khi thực hiện các phép biến đổi tương đương hệ phương trình thực chất là thực hiện các phép biến đổi tuyến tính lên các hàng của ma trận bổ sung $\overline{A}$ của hệ.

"Đổi chỗ hai phương trình" tương đương với "đổi chỗ hai hàng của $\overline{A}$".

"Nhân hoặc chia một số khác 0 vào cả hai vế của một phương trình" tương đương với "nhân hoặc chia một số khác 0 vào một hàng của $\overline{A}$".

"Cộng vào một phương trình một tổ hợp tuyến tính các phương trình khác" tương đương với "cộng vào một hàng của $\overline{A}$ một tổ hợp tuyến tính các hàng khác".

Sử dụng nguyên tắc trên ta có các bước thực hành tương ứng sau:

b. Thực hành: Dùng biến đổi Gauss lên ma trận bổ sung $\overline{A}$.

Giả sử $a_{11} \neq 0$. Ta khử x_1 ở các phương trình còn lại (từ phương trình thứ hai đến phương trình cuối) mà thực chất là làm cho các hệ số $a_{i1} = 0, i = 2, 3, \ldots, n$ bằng cách dùng các phép biến đổi trên ma trận $\overline{A}$:

$$\left(\frac{-a_{i1}}{a_{11}}\right) H_1 + H_i \longrightarrow H_i. \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

Tương tự khử x_2 tức là làm cho các hệ số $a'_{i2} = 0, i = 3, \ldots, n$; trong đó a'_{i2} là hệ số tương ứng với a_{i2} sau khi biến đổi.

Giả sử $a'_{22} \neq 0$. Ta thực hiện tương tự trên:

$$\left(\frac{-a'_{i2}}{a'_{22}}\right) H_2 + H_i \longrightarrow H_i. \quad (i = 3, \ldots, n)$$

Quá trình tiếp tục sau một số bước.

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận bổ sung $\overline{A}$ (có thể đổi chỗ cột của A, nhưng cần lưu ý là khi đổi cột là đổi thứ tự của ẩn tương ứng. Vì vậy nếu không chắc chắn về sự nhầm lẫn thứ tự của ẩn thì không nên biến đổi cột), đưa $\overline{A}$ về dạng bậc thang sau đây

$$\overline{A} \xrightarrow{\text{BĐTĐ}(H)} \begin{bmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1p} & \dots & b'_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & a'_{pp} & \dots & b'_p \\ 0 & \dots & 0 & \dots & b'_{p+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b'_m \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

trong đó $a'_{11}, \dots, a'_{pp} \neq 0$.

Nếu một trong các $b'_{p+1}, \dots, b'_m$ khác 0, nghĩa là $r(A) < r(\overline{A})$ thì hệ vô nghiệm.

Nếu $b'_{p+1} = \dots = b'_m = 0$ thì $r(A) = r(\overline{A}) = p$, khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với hệ p phương trình n ẩn số (chú ý là $1 \leq p \leq \min(m, n)$).

Trường hợp $p = n$ thì hệ có dạng

$$\begin{cases} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \dots + a'_{1n}x'_n = b'_1 \\ \qquad\quad + a'_{22}x'_2 + \dots + a'_{2n}x'_n = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + a'_{nn}x'_n = b'_n, \end{cases} \quad a'_{ii} \neq 0. \tag{4.11}$$

Các ẩn $x'_1, \dots, x'_n$ là các ẩn $x_1, \dots, x_n$ nhưng có thể thay đổi thứ tự chỉ số. Ta giải hệ tìm nghiệm bằng cách giải từ phương trình cuối tìm x'_n, rồi tiếp tục thay lần lượt lên các phương trình trên tìm các ẩn còn lại $x'_{n-1}, x'_{n-1}, \dots, x'_1$. Hệ phương trình có duy nhất nghiệm.

Trường hợp $p < n$ thì hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \dots + a'_{1p}x'_p + \dots + a'_{1n}x'_n = b'_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x'_2 + \dots + a'_{2p}x'_p + \dots + a'_{2n}x'_n = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a'_{pp}x'_p + \dots + a'_{pn}x'_n = b'_p. \end{cases} \tag{4.12}$$

Các ẩn $x'_1, \dots, x'_n$ là các ẩn $x_1, \dots, x_n$ nhưng có thể thay đổi thứ tự chỉ số. Ta có thể tìm các ẩn $x'_1, \dots, x'_p$ (gọi là các ẩn chính) theo các ẩn $x'_{p+1}, \dots, x'_n$. Các ẩn $x'_{p+1}, \dots, x'_n$ gọi là các ẩn không chính hay còn gọi là ẩn tùy ý (tham biến tùy ý). Chuyển các ẩn $x'_{p+1}, \ldots, x'_n$ sang vế phải, ta nhận được

$$\begin{cases} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \cdots + a'_{1p}x'_p = b'_1 - (a'_{1p+1}x'_{p+1} + \cdots + a'_{1n}x'_n) \\ \qquad a'_{22}x'_2 + \cdots + a'_{2p}x'_p = b'_2 - (a'_{2p+1}x'_{p+1} + \cdots + a'_{2n}x'_n) \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad a'_{pp}x'_p = b'_p - (a'_{pp+1}x'_{p+1} + \cdots + a'_{pn}x'_n). \end{cases} \tag{4.13}$$

Khi gán cho $n-p$ ẩn $x'_{p+1}, \ldots, x'_n$ ở vế phải một bộ tham số $\left(x^0_{p+1}, \ldots, x^0_n\right)$ thì hệ phương trình có duy nhất một nghiệm $\left(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_p, x^0_{p+1}, \ldots, x^0_n\right)$. Trong đó $x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_p$ được tính theo $n-p$ tham số $x^0_{p+1}, \ldots, x^0_n$. Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc $n-p$ ẩn số là $n-p$ tham số nhận giá trị tùy ý.

Chú ý 4.1. Ta chỉ nên dừng quá trình biến đổi khi nhận được ma trận dạng bậc thang.

Nên chọn $a_{11} = 1, a_{22} = 1, \ldots$ để việc biến đổi ma trận bổ sung $\overline{A}$ được thuận lợi.

Các ẩn chính không nhất thiết là các ẩn $x'_1, \ldots, x'_p$. Từ phương trình có ít ẩn số nhất ta giữ lại một ẩn tùy ý với hệ số khác không, chuyển các ẩn còn lại sang vế phải, khi đó các ẩn được chuyển sang vế phải gọi là các ẩn không chính.

Ta có định lý sau.

Định lý 4.4. Với hệ phương trình tuyến tính (4.3), giả sử $r(A) = r(\overline{A}) = p, 1 \leq p \leq \min(m, n)$. Khi đó ta có các trường hợp sau:

1) Nếu $p = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất;

2) Nếu $p < n$ thì hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào $n-p$ ẩn số tùy ý.

Ví dụ 4.11. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 = c \end{cases}$$

Giải. Ma trận bổ sung $\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 5 & 3 & b \\ 1 & 0 & 8 & c \end{bmatrix}$.

Thực hiện các phép biến đổi tuyến tính lên hàng của ma trận bổ sung $\overline{A}$, ta được

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 5 & 3 & b \\ 1 & 0 & 8 & c \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & c \\ 0 & 1 & -3 & b-2a \\ 0 & 2 & -5 & a-c \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & c \\ 0 & 1 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & 5a-2b-c \end{bmatrix}.$$

Có $r(A) = r(\overline{A}) = 3$ hệ có nghiệm duy nhất với mọi a, b, c. Ta nhận được hệ phương trình tương đương với hệ đã cho là

$$\begin{cases} x_1 + \quad + 8x_3 = c \\ \qquad x_2 - 3x_3 = b - 2a \\ \qquad\qquad x_3 = 5a - 2b - c. \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} x_1 = -40a + 16b + 9c \\ x_2 = 13a - 5b - 3c \\ x_3 = 5a - 2b - c \end{cases}$ là nghiệm duy nhất của hệ.

Ở bài toán này, ta có thể tiếp tục biến đổi ma trận bổ sung để đưa ma trận A về ma trận đơn vị khi đó ta đọc được nghiệm:

$$\overline{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & c \\ 0 & 1 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & 5a-2b-c \end{bmatrix} \xrightarrow[3h_3+h_2\to h_2]{-8h_3+h_1\to h_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40a+16b+9c \\ 0 & 1 & 0 & 13a-5b-3c \\ 0 & 0 & 1 & 5a-2b-c \end{bmatrix}.$$

Vậy ta đã tìm được hệ phương trình tương đương và nhận được nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x_1 = -40a + 16b + 9c \\ x_2 = 13a - 5b - 3c \\ x_3 = 5a - 2b - c. \end{cases}$$

Ví dụ 4.12. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss

$$\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 + x_4 - x_5 &= -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 9x_4 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 8x_4 - 4x_5 &= -2 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 - 16x_4 - 5x_5 &= -3 \\ x_1 + x_2 + \qquad + x_4 + 2x_5 &= -2. \end{cases}$$

Giải. Biến đổi sơ cấp theo hàng ma trận bổ sung của hệ

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & -9 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -8 & -4 & -2 \\ 6 & 1 & 1 & -16 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -11 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 4 & -11 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & -22 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -11 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & -22 & -2 & 14 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 22 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 22 & -22 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ma trận cuối là ma trận bậc thang hàng. Ta có $r(A) = r(\overline{A}) = 4 < 5$, do đó hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc vào một ẩn tùy ý. Tuy nhiên nên tiếp tục biến đổi để từ đó dễ dàng suy ra nghiệm:

$$\overline{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suy ra $r(A) = r(\overline{A}) = 4$. Hệ đã cho tương đương với hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một ẩn tùy ý

$$\begin{cases} x_1 & = -2 \\ x_2 - 3x_4 & = 2 \\ x_3 - 3x_4 & = 2 \\ 2x_4 + x_5 & = -1. \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát của hệ là

$$\begin{cases} x_1 & = -2 \\ x_2 & = 2 + 3x_4 \\ x_3 & = 2 + 3x_4 \\ x_5 & = -1 - 2x_4 \\ x_4 & \text{tùy ý thuộc } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Trong thực tế từ ma trận cuối cùng ta có thể viết luôn ra nghiệm mà không cần viết hệ phương trình tương đương của nó.

Ví dụ 4.13. Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + mx_4 = 2. \end{cases}$$

Giải. Biến đổi sơ cấp theo hàng của ma trận bổ sung tương tự ví dụ trên

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & m & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & m & 2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & -5 & -8 & -16 & -9 \\ 0 & 5 & 8 & m+16 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & m & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Khi $m = 0 : 2 = r(A) < r(\overline{A}) = 3$, do đó hệ vô nghiệm.

Khi $m \neq 0 : r(A) = r(\overline{A}) = 3 < 4$ nên hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 1 ẩn. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = -2 \\ \qquad 5x_2 + 8x_3 + 16x_4 = 9 \\ \qquad\qquad\qquad mx_4 = 1. \end{cases}$$

Chọn x_3 tùy ý, ta có nghiệm tổng quát của hệ

$$x_1 = -\frac{1}{5} + \frac{4}{5m} - \frac{3}{5}x_3, x_2 = \frac{9}{5} - \frac{16}{5m} - \frac{8}{5}x_3, x_4 = \frac{1}{m}; x_3 \text{ tùy ý.}$$

Ta cũng có thể biến đổi tương đương tiếp lên ma trận cuối để được ma trận dang đơn giản hơn để suy ra nghiệm:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & m & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} & \frac{16}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 & m & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Từ đây có thể đọc ra nghiệm như trên.

4.3.4. Ứng dụng hệ phương trình tuyến tính để tìm cơ sở của không gian sinh bởi một hệ véc tơ

Cho hệ véc tơ $\{v_1, \cdots, v_n\}$ của không gian véc tơ V, ta có:

$$b \in \text{Span}\{v_1, \cdots, v_n\} \Leftrightarrow \exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} : x_1v_1 + \ldots + x_nv_n = b. \tag{4.14}$$

Giả sử $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ là một cơ sở của V. Gọi $\big(b_i\big)_{\mathcal{B}}; \big(a_{ij}\big)_{\mathcal{B}}; j = 1, \ldots, n$, lần lượt là tọa độ của $b; v_j; j = 1, \ldots, n$ trong cơ sở $\mathcal{B}$. Khi đó điều kiện $b \in \text{Span}\{v_1, \cdots, v_n\}$ trong Công thức (4.14) tương đương với hệ phương trình sau có nghiệm.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$