BỘ CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG
HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

PGS. TS PHẠM NGỌC ANH, PGS. TS LÊ BÁ LONG

GIÁO TRÌNH

TOÁN CAO CẤP 2

Hà Nội, tháng 4 năm 2021

Lời nói đầu

Giáo trình Toán cao cấp 2 được biên soạn theo Đề cương tín chỉ học phần Toán cao cấp 2 đã được Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông ban hành năm 2012 dành cho sinh viên đại học hệ chính qui nhóm ngành kinh tế, bao gồm: Khoa Quản trị kinh doanh, Khoa Tài chính Kế toán, Khoa Đa phương tiện và Khoa Marketing của Học viện. Gần như độc lập với môn Toán cao cấp 1, nội dung môn Toán cao cấp 2 là các kiến thức cơ bản về Đại số tuyến tính nhằm cung cấp và hỗ trợ cho cho sinh viên khối ngành Kinh tế trong việc học tập, nghiên cứu, phân tích các mô hình kinh tế.

Giáo trình được thiết kế theo 5 chương tương ứng với thời lượng hai tín chỉ gồm các nội dung sau:

Chương 1: Lôgic mệnh đề, tập hợp, ánh xạ.

Chương 2: Không gian véc tơ n chiều.

Chương 3: Ma trận và định thức.

Chương 4: Hệ phương trình tuyến tính.

Chương 5: Phép biến đổi tuyến tính và dạng toàn phương trên không gian $\mathbb{R}^n$.

Nội dung của cuốn sách được tổng kết từ bài giảng của hai tác giả trong nhiều năm và có tham khảo các giáo trình của các trường đại học khác. Chính vì thế, giáo trình này cũng có thể dùng làm tài liệu học tập, tài liệu tham khảo cho sinh viên của các trường đại học và cao đẳng khối ngành Kinh tế.

Toán học ngoài vai trò là công cụ cho các ngành khoa học khác, còn cung cấp phương pháp tư duy lập luận chính xác chặt chẽ. Vì vậy việc học toán cũng giúp ta rèn luyện phương pháp tư duy. Một vài phương pháp tư duy Toán học đã được giảng dạy và cung cấp từng bước trong quá trình học tập ở phổ thông nhưng chỉ với mức độ đơn giản. Trong Chương 1 các vấn đề này được trình bày lại một cách có hệ thống. Các chương còn lại của giáo trình là đại số tuyến tính. Kiến thức của các chương liên hệ chặt chẽ với nhau, kết quả của chương này là công cụ của chương khác. Vì vậy người học cần thấy được mối liên hệ giữa các chương. Đặc điểm của môn học này là tính khái quát hoá và trừu tượng cao. Một số khái niệm được khái quát hoá từ những kết quả của Hình học giải tích ở phổ thông, vì vậy khi học ta nên liên hệ đến các kết quả đó.

Giáo trình được trình bày theo cách thích hợp đối với người tự học. Trước khi nghiên cứu các nội dung chi tiết, người đọc nên xem phần giới thiệu của mỗi chương để thấy được mục đích, ý nghĩa, yêu cầu chính của chương đó. Trong mỗi chương, mỗi nội dung, người đọc có thể tự đọc và hiểu được cặn kẽ thông qua cách diễn đạt và chứng minh rõ ràng. Đặc biệt người học nên chú ý đến các nhận xét, bình luận để hiểu sâu hơn hoặc mở rộng tổng quát hơn các kết quả. Hầu hết các bài toán được xây dựng theo lược đồ: Đặt bài toán, chứng minh sự tồn tại lời giải bằng lý thuyết và cuối cùng nêu thuật toán giải quyết bài toán này. Các ví dụ là để minh họa trực tiếp khái niệm, định lý hoặc các thuật toán, vì vậy sẽ giúp người đọc dễ dàng hơn khi tiếp thu bài học. Cuối mỗi chương đều có các bài tập sắp xếp từ dễ đến khó. Các bài tập dễ chỉ kiểm tra trực tiếp nội dung vừa học còn các bài tập khó đòi hỏi phải sử dụng các kiến thức tổng hợp. Một số nội dung của cuốn sách đã được dạy hoặc dạy một phần ở phổ thông.

Tài liệu này có nội dung thuần túy toán học, tuy nhiên ở mức độ có thể chúng tôi giới thiệu một số ví dụ, bài tập liên quan đến chuyên ngành nhằm minh họa và thấy được ứng dụng của Toán cao cấp 2. Mặc dù vậy nội dung vẫn ở dạng cơ bản vì đối tượng chủ yếu là sinh viên năm thứ nhất Đại học - Cao đẳng, chưa được trang bị kiến thức về chuyên ngành.

Tuy rằng tác giả đã rất cố gắng, song các thiếu sót còn tồn tại trong giáo trình là điều khó tránh khỏi. Tác giả rất mong sự đóng góp ý kiến của bạn bè đồng nghiệp, học viên xa gần và xin cám ơn vì điều đó.

Cuối cùng chúng tôi bày tỏ sự cám ơn đối với Ban Giám đốc Học viện Công nghệ Bưu Chính Viễn Thông, Khoa Cơ bản 1 và bạn bè đồng nghiệp đã khuyến khích động viên, tạo nhiều điều kiện thuận lợi để chúng tôi hoàn thành giáo trình này.

Hà nội, ngày 15 tháng 04 năm 2021.

Bảng ký hiệu

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Tập số tự nhiên, số nguyên, số hữu tỉ, số thực, số phức
$\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$	Tập số tương ứng loại trừ số 0
$a \in X$	a là phần tử của X, a thuộc X
$A \subset X$	A chứa trong X, A là tập con của X
$\forall$	lượng từ phổ biến; với mọi
$\exists$	lượng từ tồn tại; tồn tại
$f : X \to Y$	ánh xạ f từ X vào Y
$g \circ f$	hợp của ánh xạ f và ánh xạ g
$P_n[x]$	Tập hợp các đa thức biến x bậc $\leq n$
θ	Véc tơ không, ma trận không
SpanS	Không gian véc tơ con sinh bở hệ véc tơ S
$r(S), r(A)$	Hạng của hệ véc tơ S, hạng của ma trận A
dimV	Chiều của không gian véc tơ V
$(v)_{\mathcal{B}}$	Tọa độ véc tơ v trong cơ sở $\mathcal{B}$
$[v]_{\mathcal{B}}$	Ma trận cột có phần tử là tọa độ véc tơ v trong cơ sở $\mathcal{B}$
$[a_{ij}]_{m \times n}$	Ma trận cỡ $m \times n$ có phần tử a_{ij}
A^t	Ma trận chuyển vị của ma trận A
A^{-1}	Ma trận nghịch đảo của ma trận A
C_A	Ma trận phụ hợp của ma trận A
det(A), |A|	Định thức của ma trận A
$D_{\mathcal{B}}\{v_1, \ldots, v_n\}$	Định thức của hệ véc tơ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ trong cơ sở $\mathcal{B}$
Home(V, W)	Tập các ánh xạ tuyến tính từ V vào W
End(V)	Tập các phép biến đổi tuyến tính của V
$[f]_{\mathcal{B}}$	Ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong cơ sở $\mathcal{B}$
$\mathcal{P}_A(\lambda), \mathcal{P}_f(\lambda)$	Đa thức đặc trưng của ma trận A, ánh xạ f

Mục lục

Chương 1
Mở đầu về lôgic mệnh đề, tập hợp, ánh xạ

TaiLieu.vn

Toán học là một ngành khoa học lý thuyết được phát triển trên cơ sở tuân thủ nghiêm ngặt các quy luật lập luận của tư duy lôgic hình thức. Các quy luật cơ bản của lôgic hình thức đã được phát triển từ thời Aristote (Arít-xtốt) (thế kỷ thứ 3 trước công nguyên) cùng với sự phát triển rực rỡ của văn minh cổ Hy Lạp. Tuy nhiên mãi đến thế kỷ 17 với những công trình của De Morgan (Đờ Mocgan), Boole ... thì lôgic hình thức mới có một cấu trúc đại số đẹp đẽ và cùng với lý thuyết tập hợp giúp làm chính xác hoá các khái niệm toán học và thúc đẩy toán học phát triển mạnh mẽ. Việc nắm vững lôgic hình thức không những giúp sinh viên học tốt môn toán mà còn có thể vận dụng trong thực tế và biết lập luận một cách chính xác.

Khái niệm tập hợp, ánh xạ là các khái niệm cơ bản: vừa là công cụ vừa là ngôn ngữ của toán học hiện đại. Vì vai trò nền tảng của nó nên khái niệm tập hợp được đưa rất sớm vào chương trình toán phổ thông (toán lớp 6). Khái niệm tập hợp được Cantor (Căng-to) đưa ra vào cuối thế kỷ 19. Sau đó được chính xác hoá bằng hệ tiên đề về tập hợp. Có thể tiếp thu lý thuyết tập hợp theo nhiều mức độ khác nhau. Chúng ta chỉ tiếp cận lý thuyết tập hợp ở mức độ trực quan kết hợp với các phép toán lôgic hình thức như "và", "hoặc", phép kéo theo, phép tương đương, lượng từ phổ biến, lượng từ tồn tại. Với các phép toán lôgic này ta có tương ứng các phép toán giao, hợp, hiệu các tập hợp con của các tập hợp.

Khái niệm ánh xạ là sự mở rộng khái niệm hàm số đã được biết. Khái niệm này giúp ta mô tả các phép tương ứng từ một tập này đến tập kia thoả mãn điều kiện rằng mỗi phần tử của tập nguồn chỉ cho ứng với một phần tử duy nhất của tập đích và mọi phần tử của tập nguồn đều được cho ứng với phần tử của tập đích. Ở đâu có tương ứng thì ta có thể mô tả được dưới ngôn ngữ ánh xạ.

Nắm vững và sử dụng một cách chính xác các luật lôgic mệnh đề, vận dụng triệt để các kiến thức về lý thuyết tập hợp, ánh xạ là một yếu tố quan trọng đối với bất kỳ sinh viên nào muốn đạt kết quả tốt trong học tập các môn toán nói riêng cũng như trong mọi lĩnh vực nghiên cứu khác.

1.1. Lôgic mệnh đề

1.1.1. Mệnh đề và các phép liên kết mệnh đề

a. Khái niệm mệnh đề

Lôgic mệnh đề là một hệ thống lôgic đơn giản nhất, với đơn vị cơ bản là các mệnh đề mang nội dung của các phán đoán, mỗi phán đoán được giả thiết là có một giá trị chân lý nhất định là đúng hoặc sai. Như vậy mệnh đề thường được phát biểu dưới dạng câu khẳng định hoặc phủ định. Câu dưới dạng nghi vấn, mệnh lệnh, yêu cầu không phải dạng mệnh đề ta xét.

Để chỉ các mệnh đề chưa xác định nào đó ta dùng các chữ cái $p, q, r, ...$ và gọi chúng là các biến mệnh đề. Nếu mệnh đề p đúng ta cho p nhận giá trị 1 và p sai ta cho nhận giá trị 0. Giá trị 1 hoặc 0 được gọi là *thể hiện* của p.

Chẳng hạn: “$7 > 9$” là mệnh đề sai, “tam giác đều là một tam giác cân”, hay “tam giác ABC là tam giác vuông tại đỉnh A khi và chỉ khi $BC^2 = AC^2 + AB^2$” là những mệnh đề đúng, “$x \vdots 3$” không phải là một mệnh đề.

Phủ định của mệnh đề p là mệnh đề được ký hiệu $\overline{p}$, đọc là *không* p . Mệnh đề $\overline{p}$ đúng khi p sai và $\overline{p}$ sai khi p đúng.

Tương tự ngôn ngữ thông thường, người ta dùng các liên từ để nối các câu đơn thành câu phức hợp, các liên từ thường gặp như “và”, “hay là”, “hoặc... hoặc..”, “nếu ... thì”...

Mệnh đề phức hợp được xây dựng từ các mệnh đề đơn giản bằng các phép liên kết lôgic mệnh đề.

b. Các phép liên kết lôgic mệnh đề

1) Phép hội: *Hội* của hai mệnh đề p, q là một mệnh đề, được kí hiệu là

$p \wedge q$ (đọc là p và q). Mệnh đề $p \wedge q$ chỉ đúng khi p và q cùng đúng, sai khi ít nhất một trong hai mệnh đề p hoặc q sai. Có thể kí hiệu là $\begin{cases} p \\ q. \end{cases}$

2) Phép tuyển: *Tuyển* của hai mệnh đề p, q là một mệnh đề, được kí hiệu là $p \vee q$ (đọc là p hoặc q). Mệnh đề $p \vee q$ chỉ sai khi p và q cùng sai, đúng khi ít nhất một trong hai mệnh đề p hoặc q đúng. Có thể kí hiệu là $\left[\begin{array}{l} p \\ q. \end{array} \right.$

Ở đây "p hoặc q" không được hiểu theo nghĩa loại trừ, tách biệt trong đó cả p, q không thể cùng đúng, mà tất nhiên $p \vee q$ đúng khi cả p, q cùng đúng.

3) Phép kéo theo: Mệnh đề *p kéo theo q* , ký hiệu $p \Rightarrow q$, là mệnh đề chỉ sai khi p đúng q sai.

Chú ý 1.1.

- Nếu p sai thì mệnh đề $p \Rightarrow q$ luôn đúng. Hay "từ điều sai suy ra mọi điều tuỳ ý".
- Hai mệnh đề p, q ở đây phải thuộc cùng một vấn đề, không thể là hai mệnh đề "xa lạ" không có liên quan gì với nhau.
- Trong phép kéo theo $p \Rightarrow q$, p được gọi là giả thiết, q là kết luận.
- Phép kéo theo $q \Rightarrow p$ được gọi là *đảo* hoặc *mệnh đề đảo* của phép kéo theo $p \Rightarrow q$.

Ta còn diễn tả $p \Rightarrow q$ bằng một trong các cách sau:

- Nếu p thì q;
- Muốn có p cần có q;
- Muốn có q thì có p là đủ;
- p là một điều kiện đủ của q;
- q là một điều kiện cần của p.

Phép kéo theo là liên kết lôgic mệnh đề thường gặp nhất trong các định lý.

Ví dụ 1.1. (tính chất của tam giác đều) Nếu tam giác ABC là tam giác đều thì đó là một tam giác cân.

Ví dụ 1.2.

a) (Định lý Vi-et thuận) Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ và $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.

b) (Định lý Vi-et đảo) Nếu có hai số x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 = S, x_1x_2 = P$ và $S^2 \geq 4P$ thì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - Sx + P = 0$.

Ví dụ 1.3. (Định lý điều kiện cần về cực trị của hàm số) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D_f, a \in D_f$. Nếu hàm số khả vi tại a và đạt cực trị địa phương tại a thì $f'(a) = 0$.

Ta đều đã biết điều ngược lại của các mệnh đề trên chưa chắc đúng, nghĩa là điều kiện $f'(a) = 0$ chỉ là điều kiện cần để đạt cực trị tại a và không phải là điều kiện đủ.

4) Phép tương đương: Mệnh đề $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ được gọi là mệnh đề *p tương đương q*, ký hiệu $p \Leftrightarrow q$.

Mệnh đề tương đương còn được phát biểu dưới dạng: khi và chỉ khi, điều kiện cần và đủ, điều kiện ắt có và đủ.

Ví dụ 1.4. (Định lý Pi-ta-go) Tam giác ABC là tam giác vuông tại đỉnh A khi và chỉ khi $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

Một công thức gồm các biến mệnh đề và các phép liên kết mệnh đề được gọi là một công thức mệnh đề. Bảng liệt kê các thể hiện của công thức mệnh đề được gọi là *bảng chân trị*.

Bảng 1.1 Bảng chân trị của phép phủ định

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

Từ định nghĩa ta có bảng chân trị của các phép liên kết mệnh đề $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$ và $q \Leftrightarrow p$ như sau:

Từ bảng chân trị ta nhận thấy $p \Leftrightarrow q$ là một mệnh đề đúng khi cả hai mệnh đề p và q cùng đúng hoặc cùng sai và mệnh đề $p \Leftrightarrow q$ sai trong trường hợp ngược lại.

Bảng 1.2 Bảng chân trị thể hiện giá trị các liên kết mệnh đề

p	q	$\overline{p}$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$\overline{p} \vee q$
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1

Chú ý 1.2.

- Mỗi định lý sau khi được chứng minh là một mệnh đề đúng.
- Mỗi định lý đã được chứng minh lại là căn cứ để chứng minh định lý khác.
- Có hai loại mệnh đề được sử dụng làm căn cứ để chứng minh một mệnh đề:
  1. Các mệnh đề đã được thừa nhận là đúng: đó là các định nghĩa và tiên đề.
  2. Các mệnh đề đã được chứng minh là đúng.

Một công thức mệnh đề được gọi là *hằng đúng* nếu nó luôn nhận giá trị 1 với mọi thể hiện của các biến mệnh đề có trong công thức.

1.1.2. Các tính chất (hay còn gọi là các luật lôgic)

Ta ký hiệu mệnh đề tương đương hằng đúng là "$\equiv$" đọc là "*đồng nhất bằng*" thay cho ký hiệu "$\Leftrightarrow$".

Tính chất 1.1. Dùng bảng chân trị ta dễ dàng kiểm chứng các mệnh đề hằng đúng sau:

1) Luật phủ định kép:

$$\overline{\overline{p}} \equiv p.$$

2) Luật giao hoán:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$
$$p \vee q \equiv q \vee p.$$

3) Luật kết hợp:

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$
$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r.$$

4) Luật phân phối:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

5) Luật bài trung: mệnh đề $p \vee \overline{p}$ luôn đúng ($p \vee \overline{p} \equiv 1$).

Luật mâu thuẫn: mệnh đề $p \wedge \overline{p}$ luôn sai ($p \wedge \overline{p} \equiv 0$).

6) Luật De Morgan:

$$\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q};$$
$$\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}.$$

7) $(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{p} \vee q)$

8) Luật phản chứng:

$$p \Rightarrow q \equiv \overline{q} \Rightarrow \overline{p}.$$

9) Luật lũy đẳng:

$$p \vee p \equiv p; p \wedge p \equiv p.$$

10) Luật hấp thu:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$
$$p \wedge (p \vee q) \equiv p.$$

Luật lôgic 7) cho ta biểu diễn phủ định của mệnh đề $p \Rightarrow q$ như sau:

$$\overline{p \Rightarrow q} \equiv \overline{\overline{p} \vee q} \equiv p \wedge \overline{q}.$$

Theo luật phản chứng mệnh đề $p \Rightarrow q$ và $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ tương đương hằng đúng với nhau. Vì vậy có thể sử dụng một trong hai dạng trên phụ thuộc tính trực quan dễ hiểu khi phát biểu.

Phương pháp suy luận phản chứng:

Để chứng minh mệnh đề $p \Rightarrow q$ là đúng, ta giả thiết là p đúng và q sai. Nếu ta chỉ ra được rằng từ giả thiết đó dẫn đến mâu thuẫn thì mệnh đề $p \wedge \overline{q}$ là sai. Theo Luật phủ định kép và Luật De Morgan thì $\overline{p} \vee q$ là đúng, khi đó theo Luật Lôgic 7) thì $p \Rightarrow q$ là mệnh đề đúng.

1.2. Tập hợp

1.2.1. Khái niệm tập hợp

Khái niệm tập hợp và phần tử là các khái niệm cơ bản của toán học, không thể định nghĩa qua những khái niệm đã biết (cũng giống như khái niệm điểm, đường thẳng, mặt phẳng). Các khái niệm "tập hợp", "phần tử" xét trong mối quan hệ phần tử của tập hợp trong lý thuyết tập hợp là giống với khái niệm "đường thẳng", "điểm" và quan hệ điểm thuộc đường thẳng được xét trong hình học.

Một cách trực quan, ta có thể xem tập hợp như một sự tụ tập các vật, các đối tượng nào đó mà mỗi vật hay đối tượng là một phần tử của tập hợp. Tập hợp được đặc trưng bởi tính chất rằng một phần tử bất kỳ chỉ có thể hoặc thuộc hoặc không thuộc tập hợp. Có thể lấy ví dụ về các tập hợp có nội dung toán học hoặc không toán học. Chẳng hạn: tập hợp các số tự nhiên là tập hợp mà các phần tử của nó là các số 0, 1, 2, 3, ... còn tập hợp các cuốn sách trong thư viện của Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông là tập hợp mà các phần tử của nó là các cuốn sách có đóng dấu thư viện.

Thường ký hiệu các tập hợp bởi các chữ in $A, B, ..., X, Y, ...$ và các phần tử bởi các chữ thường $x, y, ...$ Nếu phần tử x thuộc A ta ký hiệu $x \in A$, nếu x không thuộc A ta ký hiệu $x \notin A$. Ta cũng nói tắt "tập" thay cho thuật ngữ "tập hợp".

Tập rỗng là tập không chứa phần tử nào, ký hiệu $\emptyset$. Chẳng hạn tập nghiệm thực của phương trình $x^2 + 1 = 0$ là tập rỗng.

Một số cách biểu diễn tập hợp

1. Liệt kê các phần tử của tập hợp trong dấu ngoặc nhọn

Trường hợp tập hợp có hữu hạn phần tử hoặc các phần tử của tập hợp có thể biểu diễn theo một quy luật dễ nhận biết thì ta có thể liệt kê các phần tử trong dấu ngoặc nhọn.

Ví dụ 1.5.

- Mỗi tập thể lớp sinh viên Học viện là một tập hợp và có thể liệt kê theo danh sách lớp.
- Bộ ba cán bộ lớp: lớp trưởng, lớp phó, bí thư chi đoàn của một lớp cụ thể là một tập hợp, có thể liêt kê theo tên.
- Tập các số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 10 là $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

- Tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 - 1 = 0$ là $\{-1, 1\}$.

2. Nêu đặc trưng tính chất của các phần tử tạo thành tập hợp

Có những tập hợp không thể liệt kê các phần tử của chúng, khi đó ta mô tả tập hợp này bằng cách đặc trưng các tính chất của phần tử tạo nên tập hợp.

Ví dụ 1.6.

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$. Tập hợp các nghiệm thực của phương trình $x^2 + 1 = 0$ là tập rỗng.
- $W = \{x, y, z \in \mathbb{R} \mid x + y + z = 0\}$ là tập hợp các số thực thỏa mãn $x + y + z = 0$ hoặc tập hợp những điểm (x, y, z) thỏa mãn phương trình $x + y + z = 0$, đó là mặt phẳng qua gốc O có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1, 1, 1)$.
- Ký hiệu $C_{[a,b]}$ là tập hợp các hàm số liên tục trên $[a, b]$.

Các tập hợp số thường gặp:

- Tập các số tự nhiên $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$;
- Tập các số nguyên $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$;
- Tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{p}{q} \mid q \neq 0, p, q \in \mathbb{Z}\right\}$;
- Tập các số thực $\mathbb{R}$;
- Tập các số phức $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$.

Ví dụ 1.7.

a) $2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, \ldots\}$ là tập các số tự nhiên chẵn. Trường hợp này ta có thể biểu diễn tập hợp bằng cách liệt kê một số phần tử ban đầu của tập hợp, các phần tử tiếp theo dễ dàng nhận được theo quy luật hình thành các phần tử của tập hợp, chẳng hạn tiếp sau 4 là 6 ...;

b) $P = \left\{p \in \mathbb{Q} \mid p = \dfrac{n^3 - 1}{3n^2 + 1}; n \in \mathbb{N}\right\}$ là tập các số hữu tỷ có dạng $p = \dfrac{n^3 - 1}{3n^2 + 1}$ trong đó n là số tự nhiên. Trường hợp này tập hợp được đặc trưng bởi tính chất tạo nên phần tử của tập hợp.

3. Giản đồ Venn:

Để có hình ảnh trực quan về tập hợp, người ta thường biểu diễn tập hợp như là miền phẳng giới hạn bởi đường cong khép kín không tự cắt được gọi là *giản đồ Venn*.

Giản đồ Venn của tập A là hình ảnh minh họa cho A và không phải chính tập A (điều này cũng giống như không thể lấy bức ảnh của anh A thay cho anh A). Vì vậy khi chứng minh ta chỉ sử dụng giản đồ Venn như hình ảnh minh họa.

1.2.2. Tập con

Định nghĩa 1.1. Tập A được gọi là *tập con* của B nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B, khi đó ta ký hiệu $A \subset B$ hay $B \supset A$.

Khi A là tập con của B ta còn nói A bao hàm trong B , hay B bao hàm A, hay B chứa A.

Ta có $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Một cách hình thức ta có thể xem tập rỗng là tập con của mọi tập hợp, nghĩa là với mọi tập $X : \emptyset \subset X$.

Tập hợp tất cả các tập con của X được ký hiệu là $\mathcal{P}(X)$. Vậy

$$A \in \mathcal{P}(X) \text{ khi và chỉ khi } A \subset X.$$

Tập $X \subset X$ là tập con của chính nó nên là phần tử lớn nhất, còn $\emptyset$ là phần tử nhỏ nhất trong $\mathcal{P}(X)$.

Ví dụ 1.8. Cho $X = \{a, b, c\}$. Ta có

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, X\}.$$

Ta thấy X có 3 phần tử thì $\mathcal{P}(X)$ có $2^3 = 8$ phần tử.

Ta có thể chứng minh tổng quát rằng nếu X có n phần tử thì $\mathcal{P}(X)$ có 2^n phần tử.

Định nghĩa 1.2. Hai tập A, B bằng nhau, kí hiệu $A = B$, khi và chỉ khi $A \subset B$ và $B \subset A$

Để chứng minh $A \subset B$ ta chỉ cần chứng minh $x \in A \Rightarrow x \in B$ và vì vậy khi chứng minh $A = B$ ta cần chứng minh $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

1.2.3. Các phép toán trên các tập hợp

a. Phép hợp *Hợp của hai tập* A và B, ký hiệu $A \cup B$, là tập hợp gồm các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp A, B. Nghĩa là

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Vậy $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$ hay $x \in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B. \end{array}\right.$

b. Phép giao: *Giao của hai tập* A và B, ký hiệu $A \cap B$, là tập hợp gồm các phần tử thuộc đồng thời hai tập hợp A, B. Nghĩa là

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

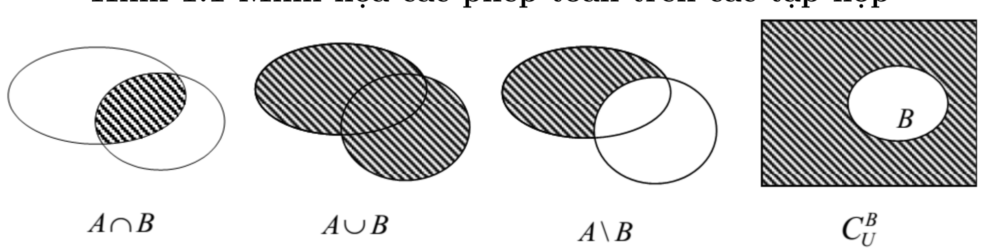
Vậy $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$ hay $x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B. \end{cases}$

c. Hiệu hai tập: *Hiệu của hai tập* A và B, ký hiệu $A \setminus B$, là tập hợp gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B. Nghĩa là

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Vậy $x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)$ hay $x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B. \end{cases}$

Hình 1.1 Minh họa các phép toán trên các tập hợp



Chú ý 1.3.

- Phép hợp, phép giao còn được mở rộng cho một họ các tập hợp:

  $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ hoặc $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ là tập các phần tử thuộc ít nhất một trong các tập A_k.

$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ hoặc $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ là tập các phần tử thuộc đồng thời tất cả các tập A_k.

Vậy

$$x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k \Leftrightarrow \exists k_0 : x \in A_{k_0};\ k_0 \in \{1, \ldots, n\}.$$

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k \Leftrightarrow x \in A_k; \forall k \in \{1, \ldots, n\}.$$

- Trường hợp $B \subset U$ thì tập $U \setminus B$ được gọi là phần bù của B trong U, ký hiệu là C_U^B. Khi U đã xác định (không sợ nhầm lẫn) thì ta ký hiệu tắt $\overline{B}$ thay cho C_U^B.

Áp dụng lôgic mệnh đề ta dễ dàng kiểm chứng lại các tính chất sau đúng với mọi tập con của tập U nào đó.

1. $A \cup A = A, A \cap A = A$ (tính lũy đẳng);

2. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ (tính giao hoán);

3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (tính kết hợp);

4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (tính phân bố);

5. $\overline{\overline{A}} = A, A \cup \emptyset = A, A \cap U = A$;

6. $A \cup \overline{A} = U, A \cap \overline{A} = \emptyset$;

7. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (luật De Morgan);

8. $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A \cap (\overline{A \cap B}) = A \setminus (A \cap B) = C_A^{A \cap B}$;

9. $A \cap B \subset A \subset A \cup B, A \cap B \subset B \subset A \cup B$;

10. $\begin{cases} A \subset C \\ B \subset C \end{cases} \Rightarrow A \cup B \subset C; \begin{cases} D \subset A \\ D \subset B \end{cases} \Rightarrow D \subset A \cap B.$

1.2.4. Hàm mệnh đề, lượng từ phổ biến và lượng từ tồn tại

a. Hàm mệnh đề

Một mệnh đề phụ thuộc vào biến $x \in D$, ký hiệu $S(x)$, được gọi là hàm mệnh đề xác định trên tập hợp D. Khi cho biến x một giá trị cụ thể thì ta được mệnh đề.

Ta gọi tập $D_{S(x)} := \{x \in D \mid S(x)\}$ là miền đúng của mệnh đề $S(x)$.

Ví dụ 1.9.

- $S(x) : x^2 - 1 = 0, x \in \mathbb{R}$ thì $D_{S(x)} = \{-1, 1\}$;
- $S(x) : x^2 - 5x + 6 \leq 0, x \in \mathbb{R}$ thì $D_{S(x)} = [2, 3]$.

b. Lượng từ phổ biến và lượng từ tồn tại

Ký hiệu $\forall$ (đọc là với mọi) được gọi là *lượng từ phổ biến.*

Ký hiệu $\exists$ (đọc là tồn tại) được gọi là *lượng từ tồn tại.*

Cho $S(x)$ là một *hàm mệnh đề* xác định trên tập hợp D. Khi đó:

- Mệnh đề $(\forall x \in D)S(x)$ (đọc là với mọi $x \in D, S(x)$) là một mệnh đề đúng nếu $D_{S(x)} = D$ và sai trong trường hợp ngược lại. Khi D đã xác định thì ta thường viết tắt $\forall x, S(x)$ hay $(\forall x), S(x)$.
- Mệnh đề $(\exists x \in D)S(x)$ (đọc là tồn tại $x \in D, S(x)$) là một mệnh đề đúng nếu $D_{S(x)} \neq \emptyset$ và sai trong trường hợp ngược lại.
- Để chứng minh một mệnh đề với lượng từ phổ biến là đúng thì ta phải chứng minh mệnh đề đúng trong mọi trường hợp, còn với mệnh đề tồn tại đúng ta chỉ cần chứng minh ít nhất một trường hợp đúng là đủ.
- Trường hợp $D_{S(x)}$ chỉ có đúng một phần tử thì lượng từ tồn tại tương ứng được ký hiệu là $(\exists!\ x \in D, S(x))$ và đọc tồn tại duy nhất $x \in D, S(x)$.
- Phép phủ định lượng từ

$$\overline{\forall\ x \in D, S(x)} \equiv \left(\exists x \in D, \overline{S(x)}\right);$$
$$\overline{\exists\ x \in D, S(x)} \equiv \left(\forall x \in D, \overline{S(x)}\right).$$

Ví dụ 1.10.