Chương V: Phương trình Vi phân

- Phương trình Vi phân cấp 1
- Phương trình Vi phân cấp 2

Phương trình vi phân cấp1

Pt vi phân cấp một là một hệ thức *f(x, y, y') = 0* hay *y'= f(x, y) hay*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (*)$$

Hàm số $y = \varphi(x, C)$ thỏa pt (*) với mọi C đgl nghiệm tổng quát của pt cho.Từ nghiệm tổng quát cho $C = C_0$ suy ra $y = \varphi(x, C_0)$ đgl nghiệm riêng của pt cho

Nếu nghiệm tổng quát được cho dưới dạng hàm ẩn $\varphi(x,y,C) = 0$ thì đgl tích phân tổng quát của pt.

Còn nếu có nghiệm $\varphi(x,y,C_0) = 0$ thì đgl tích phân riêng

Các dạng phương trình vi phân cấp 1

- Pt có biến phân ly
- Pt tuyến tính cấp 1

  Pt ttính thuần nhất

  Pt ttính không thuần nhất

Phương trình có biến phân ly

Dạng 1 : $f(x)dx = g(y)dy$. Cách giải: $\int f(x)dx = \int g(x)dx$

Dạng 2 : $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$. Cách giải :

+ Nếu $g_1(y)f_2(x) \neq 0$. Chia 2 vế pt (2) cho $g_1(y)f_2(x)$, đưa về dạng 1

+ Nếu $g_1(y)f_2(x) = 0 \Rightarrow g_1(y) = 0$ hay $f_2(x) = 0 \Rightarrow y = a$ or $x = b$ là các nghiệm riêng của pt cho

Vd1 T 90

$$a)\ \frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2+1}(y^2+1) \quad \Rightarrow dy = \frac{x}{x^2+1}(y^2+1)dx$$

$$\frac{dy}{y^2+1} = \frac{xdx}{x^2+1} \Rightarrow \text{arctgy} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C \Rightarrow y = tg\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C\right)$$

b) Giải $y' = 3x^2$ (1) với đk ban đầu $y\big|_{x=1} = 1$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dy = 3x^2 dx \Rightarrow y = x^3 + C$$ là ntquát

Thay x = 1, y = 1 ta có C = 0. Vậy nriêng của (1) là $y = x^3$

Vd 2 T 90 a) $(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0\ (1)$

$$+ \quad xy \neq 0: \quad (1) \Leftrightarrow \frac{1+x}{x}dx = \frac{y-1}{y}dy \Leftrightarrow (\frac{1}{x} + 1)dx = (1 - \frac{1}{y})dy$$

$$\Rightarrow \int (\frac{1}{x} + 1)dx = \int (1 - \frac{1}{y})dy \Rightarrow (\ln x + x) = y - \ln y + C$$

$$\Rightarrow \ln xy + x - y = C$$ là tích phân tquát của (1)

$+ \quad xy = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \text{ v } y = 0$ là các nriêng của pt cho (1)

Vd T 90 c) $xdx + (y+1)dy = 0$ (1) thỏa y(0) = 0

$$(1) \Leftrightarrow xdx = -(y+1)dy \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{-(y+1)^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 2C$$ là tích phân tquát của (1)

Vì y(0) = 0 $\Rightarrow C = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 1$ là tích phân riêng của (1)

Phương trình tuyến tính cấp 1

Dạng TQ: $y' + p(x)y = q(x)$ (1), với $p(x), q(x)$ là những hàm liên tục. $q(x) = 0$: (1) đgl pt tuyến tính thuần nhất

$q(x) \neq 0$: (1) đgl pt tuyến tính không thuần nhất

<u>Cách giải:</u>

Bước 1 : Giải $y' + p(x)y = 0$ (2)

+ Nếu $y \neq 0$ $\quad (2) \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|$

$\Rightarrow$NTQ của (2) $\quad y = Ce^{-\int p(x)dx}$

+ Ta có $y = 0$ là một nghiệm riêng của (2) ứng với $C = 0$.

Pt y' + p(x)y = q(x)   (1)

Bước 2 :   Từ NTQ $y = Ce^{-\int p(x)dx}$ Cho C biến thiên, C = C(x). Tìm C(x)

sao cho y thỏa (1)

$$\frac{dy}{dx} = e^{-\int p(x)dx}\frac{dC}{dx} - Cp(x)e^{-\int p(x)dx}$$

$$(1) \Leftrightarrow e^{-\int p(x)dx}\frac{dC}{dx} - Cp(x)e^{-\int p(x)dx} + Cp(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$dC = q(x)e^{\int p(x)dx}dx \Rightarrow C = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + \lambda$$

B 3 : NTQ của (1) $y = e^{-\int p(x)dx}.\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + \lambda\right]$

Vd trang 92 $y' - \frac{2}{x}y = x^3$

Có $p(x) = -\frac{2}{x}$ và $q(x) = x^3$

NTQ $$y = e^{-\int p(x)dx}.\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + \lambda\right]$$

$$y = e^{-\int \frac{-2}{x}dx}.\left[\int x^3 e^{\int \frac{-2}{x}dx}dx + \lambda\right]$$

$$= e^{2\ln|x|}.\left[\int x^3 e^{-2\ln|x|}dx + \lambda\right]$$

$$= x^2\left(\int x^3 \frac{1}{x^2}dx + \lambda\right) = x^2\left(\frac{x^2}{2} + \lambda\right)$$

Phương trình vi phân cấp 2

Pt vi phân cấp hai là một hệ thức f(x, y, y', y") = 0 hay y"= f(x, y, y')(*). VD: $x^2y'' - xy' - 3y = 0$

Hàm số $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ thỏa pt (*) với mọi C_1, C_2 đgl NTQ của pt(*).Từ NTQ cho $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$ thì $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ đgl nghiệm riêng của pt cho

Nếu nghiệm tổng quát được cho dưới dạng hàm ẩn $\phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ thì đgl tích phân tổng quát của pt.

Còn nếu có nghiệm $\phi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$ thì đgl TP riêng