Chương IV: Chuỗi

- Chuỗi số
- Chuỗi hàm

Chuỗi số

- Định nghĩa:

$$u_1 + u_2 + \ldots u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

được gọi là một chuỗi số

ký hiệu: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

- Ví dụ: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

- Định nghĩa tổng của chuỗi

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots u_n = \sum_{n=1}^{n} u_k$$

Nếu $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S$ thì chuỗi đgl hội tụ và có tổng là S

Ngược lại ta nói chuỗi phân kỳ và không có tổng

Điều kiện cần để chuỗi số hội tụ

Nếu $u_1 + u_2 + \ldots u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ

thì $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Tương đương

Nếu $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq 0$ thì chuỗi cho phân kỳ

Ví dụ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{2n-3}$ phân kỳ

Vì $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2n-3} = \frac{1}{2} \neq 0$

Ví dụ

a) $$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

Vì $$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$ nên

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] = 1$$

Vậy chuỗi cho hội tụ và có tổng là 1

Ví dụ

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1}$ với $a \neq 0$ (chuỗi số nhân)

Chuỗi trên hội tụ nếu $|q| < 1$

Chuỗi trên phân kỳ nếu $|q| \geq 1$

Ví dụ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ Phân kỳ (chuỗi số điều hòa)

Chuỗi số dương và các tiêu chuẩn hội tụ

- Định nghĩa: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ đgl chuỗi số dương nếu mọi số hạng của chuỗi đều dương

Cho $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ là hai chuỗi số dương

Tiêu chuẩn so sánh 1: Cho $u_n \le v_n$

Nếu $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ

Nếu $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ phân kỳ

Ví dụ : Xét sự hội tụ của các chuỗi sau

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}\,3^n}$$

Hội tụ

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}\,3^n} \le \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

Phân kỳ

$$\frac{1}{n} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

Tiêu chuẩn so sánh 2

$$k = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$$

Nếu $k = 0$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ

Nếu $k = \infty$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ pkỳ thì $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ pkỳ

Nếu $k > 0$ thì hai chuỗi cho có cùng tính chất

Ví dụ : Xét sự hội tụ của các chuỗi sau

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{3n^2-1}$$ Phân kỳ vì $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2n}{3n^2-1}}{\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$ Phân kỳ

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{(n+1).3^n}$$ Hội tụ vì $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2n}{(n+1)3^n}}{\frac{1}{3^n}} = 2$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$$ Hội tụ