Chương III: TÍCH PHÂN

- Nguyên hàm và tích phân bất định
- Tích phân xác định
- Tích phân suy rộng

Nguyên hàm và tích phân bất định

Cho hàm số f(x) xác định trên (a; b). Hàm số F(x) đgl một nguyên hàm của f(x) trên (a; b) nếu F'(x) = f(x)

Nếu F(x)_ nguyên hàm của hàm f(x) trên (a; b) thì F(x) + C là nguyên hàm của hàm f(x) vì [F(x) + C]' = F'(x) = f(x)

Tập hợp tất cả các nguyên hàm của hàm f(x) trên (a; b) được gọi là tích phân bất định của hàm f(x) trên (a; b), KH

$\int f(x)dx$; f(x) : hàm số dưới dấu tích phân, f(x)dx : biểu thức dưới dấu tích phân

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Tích phân một số hàm sơ cấp

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

$$\int [Af(x) + Bg(x)]dx = A\int f(x)dx + B\int g(x)dx$$

$$\int 0dx = C$$

$$\int 1dx = \int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Tích phân một số hàm sơ cấp

$$\int \cos x dx = \sin x + C \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int (1 + tg^2 x) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$\int (1 + \cot g^2 x) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot gx + C$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C = -arccotgx + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$$

Tích phân một số hàm sơ cấp

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$$

Phương pháp tính tích phân
PP đổi biến

Nếu hàm số x = φ(t) có đạo hàm liên tục và có hàm ngược t = φ^{-1}(x) thì

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(t) + C = F\left[\varphi^{-1}(x)\right] + C$$

VD 1 $\quad I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ $\quad$ Đặt t = $\sqrt{x}$ $\Rightarrow$ x = t^2 $\Rightarrow$ dx = 2tdt

$$I = 2\int \frac{tdt}{1+t} = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= 2(t - \ln(1+t)) + C = 2\left[\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})\right] + C$$

Phương pháp tính tích phân
PP đổi biến

VD 2 $$I = \int \frac{dx}{\sin x}$$

Cách 1 Đặt $t = tg\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2arctgt \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad I = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

Cách 2

$$I = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| C$$

PP tích phân từng phần

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

(1)Tính các tích phân dạng

$$I = \int P(x)e^{ax}dx;\ \ J = \int P(x)\sin ax\,dx;\ \ K = \int P(x)\cos ax\,dx$$

Đặt u = P(x) với P(x) là đa thức

(2) Tính L = $\int x^{\alpha}\ln^{k}x\,dx$; $\alpha \neq -1$, đặt u = $\ln^k x$

(3) Tính $M = \int P(x)(\arcsin x)^n dx;\ \ N = \int P(x)(\operatorname{arctg} x)^n dx$

Đặt u = arcsinx hay u = arctgx

PP tích phân từng phần

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Tính các tích phân sau:

$$I = \int x e^{2x} dx \qquad K = \int x^2 \operatorname{arctg} x \, dx$$

$$J = \int x^2 e^{2x} dx \qquad L = \int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$$

Tích phân các phân thức đơn giản

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \ln|x-a| + C & \text{khi } n = 1 \\ \dfrac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C & \text{khi } n > 1 \end{cases}$$

VD 1 $\displaystyle \int \frac{dx}{(x-1)^3} = \int (x-1)^{-3} d(x-1) = \frac{(x-1)^{-4}}{-4} + C = \frac{-1}{4(x-1)^4} + C$

VD 2 $\displaystyle \int \frac{xdx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$