Chương II: ĐẠO HÀM – VI PHÂN

- Đạo hàm – vi phân
- Qui tắc L/HOPITAL
- Công thức Taylor

Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

Cho hàm số y = f(x) xác định trong (a; b) và $x_0 \in$ (a; b)

Với $x \neq x_0$, $\Delta x = x - x_0$: số gia của biến x tại x_0

$\Delta y = y - x_0$: số gia của hàm y tại x_0

Nếu tồn tại giới hạn $A = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ **hh**

thì A đgl đạo hàm của hàm số f(x) tại x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Định nghĩa đạo hàm một phía

Nếu tồn tại giới hạn $A = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ **hh**

thì A đgl đhàm bên phải của hsố f(x) tại x_0,KH f'(x_0+)

Nếu tồn tại giới hạn $A = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ **hh**

thì A đgl đhàm bên trái của hsố f(x) tại x_0 , KH f'(x_0^-)

Hàm số f(x) có đạo hàm tại x_0 $\Leftrightarrow$ f(x) có đạo hàm

bên phải, đạo hàm bên trái tại x_0 và f '(x_0+) = f '(x_0-)

Cho f(x) = $\sqrt{x}$, xét đạo hàm tại x = 1, x = 0

Tại x = 1, ta có

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}=f'(1)$$

Tại x = 0, ta có

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

$\Rightarrow$ ***f không có đạo hàm tại x = 0***

Cho f(x) = |x|, xét đạo hàm tại x = 0

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0}1=1=f^{/}(0^{+})$$

$$\neq$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0}(-1)=-1=f^{/}(0^{-})$$

Vậy f không có đạo hàm tại x = 0

Nếu f(x) liên tục tại x_0 thì không thể suy ra được

f(x) có đạo hàm tại x_0.

<u>Liên hệ giữa tính có đạo hàm và tính liên tục</u>

Nếu f(x) có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại x_0.

Định nghĩa

Hàm số f(x) có đạo hàm trong khoảng (a; b) nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a; b)$

Nếu có thêm f(x) có đạo hàm bên phải tại a và bên trái tại b thì hàm số f(x) có đạo hàm trong đoạn [a; b]

Cho hàm số y = f(x) xác định trên miền D và f'(x) tồn tại với mọi $x \in D$. Khi đó $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Với $f(x) = x^2$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x \Rightarrow f'(x) = 2x$$

Quy tắc tính đạo hàm

$u = u(x)$ có đhàm $u' = u'(x)$; $v = v(x)$ có đhàm $v' = v'(x)$

1) $[u \pm v]' = u' \pm v'$

3) $$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

2) $[uv]' = u'v + v'u$

4) $$\left(g_{o}f(x)\right)' = \left(g[f(x)]\right)' = g'[f(x)].f'(x)$$

5) Cho $y = f(x)$ có hàm ngược $x = f^{-1}(y)$: $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$

VD $$y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y\,;\ y \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow x'_y = \cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Các công thức tính đạo hàm

$(C)' = 0$

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a \quad \Rightarrow \left(e^{x}\right)' = e^{x}$$

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a} \quad \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$

$$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x$$

$$(\cot gx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot g^2 x)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\mathrm{arc}\cot gx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Thay x bởi hàm hợp u thì tính đhàm chỉ cần nhân thêm u'

Định nghĩa vi phân

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0$ khi $\Delta x \to 0$ hay khi đó Δf là VCB

Xét hsố $f(x) = x^2$ $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2$

$= 2x_0.\Delta x + (\Delta x)^2 \sim 2x_0.\Delta x$ khi $\Delta x \to 0$

f(x) đgl khả vi tại điểm x_0 nếu $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ tại điểm x_0 được viết dạng $\Delta f = A.\Delta x + o(\Delta x)$ với A ko phụ thuộc Δx và $o(\Delta x)$ là VCB bậc cao hơn VCB (Δx).

Tích số $A.\Delta x$ được gọi vi phân của hàm f(x) tại x_0. Ký hiệu : $df = A.\Delta x$ hay $dy = A.\Delta x$

Hàm số f(x) khả vi tại x_0 khi và chỉ khi f(x) có đạo hàm tại x_0 và khi đó $df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$

Với $f(x) = x$ thì $dx = 1\Delta x$ $\Rightarrow dy = df(x) = f'(x)dx$

<u>Ứng dụng của vi phân để tính gần đúng</u>

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x$ hay $df \approx \Delta f$

$$\sin 31^0 = \sin(30^0 + 1^0) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}.\frac{\pi}{180} \approx 0,5151$$