

Giáo trình
LÝ THUYẾT SAI SỐ v3

Những người biên soạn:

PGS TS. Đặng Nam Chinh (Chủ biên)

TS. Nguyễn Xuân Bắc

TS. Bùi Thị Hồng Thắm

Th. sĩ. Trần Thị Thu Trang

Th. sĩ. Ninh Thị Kim Anh

Hà Nội, tháng 11 năm 2015

MỤC LỤC

Nội dung	Trang
Mở đầu	3

Chương 1 LÝ THUYẾT SAI SỐ

1.1. Lịch sử phát triển và vai trò của môn học	5
1.2. Sai số đo và phân loại sai số đo	8
1.3. Các đặc tính của sai số ngẫu nhiên	14
1.4. Các tiêu chuẩn đánh giá độ chính xác	18
1.5. Sai số trung phương của hàm các đại lượng đo	29
1.6. Nguyên tắc ảnh hưởng bằng nhau	38
1.7. Trọng số	40
1.8. Nguyên lý bình phương nhỏ nhất	48
1.9. Trị trung bình và đánh giá độ chính xác dãy trị đo cùng một đại lượng ..	55
1.10. Đánh giá độ chính xác dãy trị đo kép	61
1.11. Đánh giá độ chính xác kết quả đo dựa vào sai số khép	67
1.12. Sai số làm tròn số và sai số tính toán	71
1.13. Bài tập chương 1	82

Chương 2 BÌNH SAI ĐIỀU KIỆN

2.1. Cơ sở lý thuyết của bình sai điều kiện	84
2.2. Các dạng phương trình điều kiện	91
2.3. Giải hệ phương trình chuẩn trên sơ đồ Gauss	113
2.4. Đánh giá độ chính xác trong bình sai điều kiện	122
2.5. Các bước của bài toán bình sai điều kiện	130
2.6. Bài tập chương 2	141

Chương 3 BÌNH SAI GIÁN TIẾP

3.1. Cơ sở lý thuyết của bình sai gián tiếp	145
3.2. Các dạng phương trình số hiệu chỉnh	151
3.3. Một số phương pháp nghịch đảo ma trận hệ số phương trình chuẩn	164
3.4. Đánh giá độ chính xác trong bình sai gián tiếp	173
3.5. Các bước của bài toán bình sai gián tiếp	182
3.6. Bài tập chương 3	203
Phụ lục: Bảng giá trị hàm tích phân xác suất	208
Tài liệu tham khảo	209

Mở đầu

Từ xa xưa con người đã thực hiện các phép đo để xác định khoảng cách, xác định diện tích đất đai hoặc quan sát thiên thể trong thiên văn đo lường vv... Liên quan đến các giá trị đo đó, những khái niệm về sai số đo cũng đã được hình thành khá sớm. Tuy nhiên, cho đến thế kỷ XVIII, môn học lý thuyết sai số hoàn chỉnh mới được P. S. Laplace và C. F. Gauss xây dựng dựa trên cơ sở của lý thuyết xác suất-thống kê. Ngược lại, môn lý thuyết sai số cũng góp phần hoàn thiện môn học lý thuyết xác suất.

Cùng với tiến trình phát triển của lĩnh vực trắc địa và bản đồ, lý thuyết sai số luôn đóng vai trò là môn học cơ sở, nó có vị trí quan trọng trong mô tả, đánh giá chất lượng đo và xử lý các kết quả đo. Vì vậy, môn học này đã không ngừng được phát triển về phương diện lý thuyết cũng như phương pháp tính toán.

Giá trị đo của một đại lượng vật lý bất kỳ không bao giờ có độ chính xác lý tưởng, tức là không có sai số, hay nói cách khác, với mọi trị đo luôn kèm theo sai số tương ứng của nó. Thực tế đó cho thấy, với một trị đo hay một tập hợp hữu hạn các trị đo, chúng ta không thể nhận được trị thực (giá trị lý thuyết) của đại lượng đo đó.

Nghiên cứu nguyên nhân của các loại sai số trong đo đạc, tính chất của chúng và các phương pháp xử lý trị đo là nội dung của môn học lý thuyết sai số.

Nắm vững lý thuyết sai số, người làm công tác đo đạc ngoại nghiệp sẽ thực hiện tốt các thao tác đo, sử dụng tốt các dụng cụ hay máy móc đo, áp dụng quy trình đo phù hợp để nhận được bộ số liệu đo tốt nhất trong điều kiện đo cụ thể.

Với kiến thức của lý thuyết sai số, người làm công tác xử lý số liệu sẽ làm tốt các nhiệm vụ phân loại, đánh giá, mô tả số liệu đo và áp dụng các thuật toán phù hợp để xử lý số liệu đo nhằm nhận được kết quả với độ tin cậy cao nhất cùng với các thông tin chuẩn xác về độ chính xác và độ tin cậy của kết quả sau xử lý.

Trong chương trình khung của ngành kỹ thuật trắc địa bản đồ (xây dựng năm 2007), môn học lý thuyết sai số là môn bắt buộc, là một trong các môn học cơ sở ngành. Môn học này đã có đề cương chi tiết và đã được Hội đồng xây dựng chương trình khung thông qua để sử dụng chung cho các cơ sở đào tạo ngành kỹ thuật trắc địa - bản đồ trên cả nước.

Để người học tiếp thu tốt nội dung môn học lý thuyết sai số, trước khi học môn học này, sinh viên cần có kiến thức về đo đạc đại cương (trắc địa phổ thông), được trang bị một số kiến thức của môn xác suất thống kê và phương pháp tính. Đây là điểm lưu ý khi sắp xếp lịch trình giảng dạy và danh mục các môn học trong điều kiện tiên quyết của môn lý thuyết sai số.

Cuốn giáo trình này được biên soạn dựa trên đề cương chi tiết của môn học trong Chương trình khung, có tham khảo một số tài liệu giáo khoa trong và ngoài nước của môn học này, đồng thời được bổ sung thêm nội dung từ kinh nghiệm giảng dạy trong nhiều năm của một số tác giả tham gia biên soạn giáo trình.

Để tạo điều kiện thuận lợi cho sinh viên lần đầu tiên tiếp xúc với môn học Lý thuyết sai số và bước đầu làm quen với một số khái niệm mới, những người biên soạn giáo trình đã cố gắng trình bày nội dung một cách rõ ràng, bảo đảm tính logic trong cách tiếp cận vấn đề. Hầu hết nội dung lý thuyết của các chương mục được làm sáng tỏ qua các ví dụ cụ thể. Trong nội dung giáo trình này có sử dụng một số ví dụ trình bày trong các tài liệu tham khảo đã dẫn trong danh mục.

Giáo trình Lý thuyết sai số được nhiều tác giả tham gia biên soạn. PGS TS Đặng Nam Chinh và TS Nguyễn Xuân Bắc biên soạn chương 1, thạc sĩ Trần Thị Thu Trang và thạc sĩ Ninh Thị Kim Anh biên soạn chương 2, TS. Bùi Thị Hồng Thắm biên soạn chương 3. PGS TS Đặng Nam Chinh là chủ biên đã rà soát và chỉnh sửa lại toàn bộ nội dung giáo trình.

Các tác giả xin chân thành cảm ơn PGS TS Phan Văn Hiến, TS Nguyễn Đình Thành và PGS TS Nguyễn Quang Minh đã đọc và góp nhiều ý kiến quý báu cho nội dung và hình thức của cuốn giáo trình này.

Do trình độ có hạn, cuốn tài liệu này chắc chắn còn nhiều khiếm khuyết, rất mong các bạn đọc góp ý để chúng tôi có thêm kinh nghiệm nhằm hoàn chỉnh cuốn tài liệu này vào các lần tái bản tiếp theo.

Chúng tôi xin trân trọng cảm ơn bạn đọc.

Hà Nội, tháng 11 năm 2015
Các tác giả

Chương 1

LÝ THUYẾT SAI SỐ

Trong chương 1, sẽ trình bày những vấn đề cơ bản của lý thuyết sai số đo, gồm khái niệm về sai số đo, phân loại sai số đo và các đặc tính của chúng. Nội dung tiếp theo, sẽ giới thiệu về trọng số trị đo và trọng số của hàm các trị đo, nguyên tắc đánh giá độ chính xác kết quả đo dựa trên dãy số liệu đo, bao gồm luật truyền sai số và nguyên lý bình phương nhỏ nhất. Đây là những nội dung rất cơ bản để từ đó người học có thể tiếp thu những kiến thức chuyên sâu hơn, được trình bày trong chương 2 và chương 3 của giáo trình này cũng như trong môn học Xử lý số liệu trắc địa trong chương trình đào tạo.

Như chúng ta đã biết, sai số đo vốn đã bao hàm khái niệm khá rộng cho các lĩnh vực khoa học thực nghiệm, trong đó sử dụng kết quả của các phép đo lường hoặc số liệu quan trắc, nhưng vì giáo trình này được viết cho môn học cơ sở của ngành kỹ thuật trắc địa-bản đồ, do đó những kiến thức cũng như ví dụ trong chương này chủ yếu cũng chỉ đề cập đến sai số trong trắc địa-bản đồ mà không đề cập đến các sai số của các phép đo khác như đo lường điện, đo lường nhiệt hay các phép đo chuyên biệt trong thí nghiệm hóa học hay vật lý vv...

1.1. LỊCH SỬ PHÁT TRIỂN VÀ VAI TRÒ CỦA MÔN HỌC

Lý thuyết sai số là môn khoa học có mục tiêu xác định giá trị tin cậy nhất của các kết quả đo trong các khoa học thực nghiệm. Như vậy có thể thấy rằng, môn học này không chỉ cần thiết cho lĩnh vực đo đạc (trắc địa) mà còn cần thiết cho nhiều lĩnh vực khoa học khác có sử dụng hay liên quan đến các số liệu quan trắc, đo lường vv.... Môn học này có liên quan mật thiết với phương pháp thống kê và lý thuyết xác suất

Xét trong lịch sử phát triển khoa học kỹ thuật của nhân loại, thiên văn học và đo đạc đất đai là những lĩnh vực khoa học có lịch sử hình thành và phát triển khá lâu đời. Từ yêu cầu thực tiễn của các lĩnh vực khoa học này đã sớm hình thành nên môn học lý thuyết sai số và được phát triển dựa trên lý thuyết xác suất, nhưng ngược lại, lý thuyết sai số cũng đã góp phần hoàn thiện lý thuyết xác suất [14,15,16]. Như vậy, môn học lý thuyết sai số được hình thành và gắn liền với lĩnh vực trắc địa.

Có thể thấy rằng, xuất phát từ đặc tính ảnh hưởng của sai số ngẫu nhiên và sai số hệ thống đến kết quả quan trắc, đã hình thành nên nhiệm vụ và các phương pháp cơ sở xử lý số liệu quan trắc và mô tả chúng trong những nhiệm vụ riêng biệt. Người ta cho rằng, môn học lý thuyết sai số được hình thành từ thế kỷ XVIII,

nhưng nếu xem xét lịch sử hình thành và phát triển của nó cùng với lý thuyết xác suất thì môn học này được hình thành sớm hơn. Có thể chia thành các giai đoạn phát triển của môn học đó như sau:

Giai đoạn thứ nhất, được tính từ thời Claudius Ptolemaeus (khoảng năm 90-168 sau Công nguyên), một nhà toán học, thiên văn học, và chiêm tinh học người Ai cập (sau đó là La mã) đã thực hiện quan trắc thiên thể để tính toán quy luật chuyển động của một số thiên thể dựa trên mô hình chuyển động của thiên thể do Hypparchus (khoảng năm 190-120 trước Công nguyên) xây dựng trước đó. Ptolemaeus được coi là người đầu tiên đã sử dụng phương pháp số học để tính toán các hiện tượng biến đổi trong thiên văn. Nhờ những nghiên cứu của Ptolemaeus, ngay từ thời bấy giờ, con người đã có thể tính toán được vị trí trong quá khứ hoặc trong tương lai của các thiên thể mà con người đã quan sát được. Giai đoạn thứ nhất kéo dài trong nhiều thế kỷ cho đến thời kỳ của Tycho Brahe (1546-1601) một nhà thiên văn học người Đan Mạch, bắt đầu một giai đoạn mới, trong đó sử dụng phương pháp quan trắc thiên thể và tính toán lập lịch sao có những tiến bộ đáng kể.

Trong **giai đoạn thứ hai**, hầu hết các quan trắc, đo đạc được thực hiện dựa vào đơn vị đo lường của riêng từng quốc gia, đáp ứng cho các yêu cầu riêng của quốc gia đó, theo đó việc xử lý chúng được giữ nguyên hoặc do chủ quan mà ngay trong trường hợp tốt nhất cũng không bảo đảm độ tin cậy đầy đủ.

Giai đoạn thứ ba được bắt đầu với những phương pháp xử lý số liệu quan trắc có xét tới độ tin cậy hoặc đặc tính thống kê của kết quả cuối cùng và những đặc tính đó, sau này đã được biết đến một cách rộng rãi. Giai đoạn này bắt đầu từ thời kỳ của R. J. Boskovich (1711-1787) hoặc của một số ít nhà khoa học trước đó. Trong nửa cuối thế kỷ XVIII, người ta đã nói tới khái niệm phân bố xác suất, cơ sở sử dụng kết quả tính trung bình số học, nguyên lý xác suất cực đại và đã đề cập tới vấn đề đánh giá độ chính xác. Như vậy, có thể nói, môn học lý thuyết sai số được hình thành từ giai đoạn này, bắt đầu đề cập tới vấn đề bình sai các đại lượng đo gián tiếp dựa trên nguyên lý số bình phương nhỏ nhất.

Giai đoạn thứ tư được tính từ khi P. S. Laplace (1749-1827) và C. F. Gauss (1777-1855) xây dựng nên cơ sở của môn học lý thuyết sai số kinh điển từ cuối thế kỷ XVIII. Những ứng dụng sớm nhất của nguyên lý bình phương nhỏ nhất là sử dụng vào bình sai các kết quả quan sát thiên văn [13]. Phương pháp bình phương nhỏ nhất sau



Hình 1.1. C. F. Gauss

đó tiếp tục được hoàn thiện bởi F. R. Helmert (1843-1917). Lý thuyết sai số và nguyên lý bình phương nhỏ nhất đã trở thành một vấn đề mang tính phương pháp luận, đã được dùng để giải quyết nhiều bài toán thực nghiệm có tính khái quát và sử dụng cho đến ngày nay.

Có thể thấy rằng, P. S. Laplace và C.F. Gauss chính là những người đã xây dựng cơ sở cho phương pháp số bình phương nhỏ nhất, được coi như một công cụ thực hành quan trọng trong nhiều lĩnh vực khoa học thực nghiệm. Tuy nhiên, vào thế kỷ XVIII và XIX, hạn chế của phương pháp tính toán theo nguyên lý bình phương nhỏ nhất là phương tiện tính toán với số lượng lớn trị quan trắc.

Sang thế kỷ XX và đặc biệt là nửa sau của thế kỷ XX, nhờ sự phát triển của kỹ thuật tính toán bằng máy tính điện tử, phương pháp xử lý số liệu quan trắc theo nguyên lý bình phương nhỏ nhất được giải quyết nhanh và mang lại hiệu quả cao. Như vậy có thể nói, cho đến nay, môn học lý thuyết sai số đã được hoàn thiện về mặt lý thuyết và cả về phương diện phương pháp tính. Dựa trên cơ sở của nguyên lý bình phương nhỏ nhất, nhiều thuật toán xử lý số liệu sử dụng mô hình ngẫu nhiên được phát triển như các thuật toán lọc (Kalman, lọc hạt) dự báo, làm trơn, ước lượng, nội suy vv..

Những người làm công tác đo lường trong các lĩnh vực khoa học thực nghiệm nói chung và trong công tác trắc địa nói riêng, nếu nắm vững nội dung của môn lý thuyết sai số, sẽ có kiến thức để khai thác sử dụng tốt các thiết bị, máy móc đo, biết áp dụng phương pháp đo phù hợp nhằm giảm thiểu sai số trong kết quả đo. Môn học này còn cung cấp cho người học các phương pháp xử lý dãy số liệu đo để nhận được kết quả tin cậy nhất và tiến hành đánh giá sai số trong kết quả đo cũng như độ chính xác của kết quả sau xử lý.

Giáo trình này cung cấp cho người học cơ sở lý thuyết và phương pháp tính toán xử lý tập hợp kết quả đo theo nguyên lý bình phương nhỏ nhất. Đây là phương pháp vẫn được sử dụng để xử lý số liệu đo để nhận được kết quả tin cậy khi có trị đo thừa.

Trong tính toán xử lý số liệu đo, làm báo cáo hay lưu trữ kết quả đo, người làm công tác tính toán cũng cần nắm vững nguyên tắc làm tròn số và ảnh hưởng của nó đến kết quả tính toán. Việc làm tròn số một cách tùy tiện có thể gây ra sai số lớn trong kết quả tính toán hoặc ngược lại có thể có những con số chứa quá nhiều chữ số không chắc chắn, không cần thiết trong kết quả. Môn học lý thuyết sai số cũng cung cấp cho người học một số kiến thức về sai số làm tròn và sai số trong tính toán.

Trong thực tiễn của công tác tính toán bình sai các mạng lưới trắc địa hiện nay, người ta thường chỉ sử dụng phương pháp bình sai gián tiếp mà hầu như không

sử dụng phương pháp bình sai điều kiện vì phương pháp bình sai gián tiếp thuận tiện cho tính toán trên máy tính điện tử. Tuy vậy, trong giáo trình này vẫn giới thiệu và trình bày phương pháp bình sai điều kiện. Đây không chỉ là một vấn đề của lịch sử tính toán bình sai mà còn để cung cấp cho người học hiểu rõ tác dụng của trị đo thừa cũng như vai trò của sai số khép các phương trình điều kiện trong việc kiểm tra và đánh giá độ chính xác kết quả đo.

1.2. SAI SỐ ĐO VÀ PHÂN LOẠI SAI SỐ ĐO

1.2.1. Giá trị đo và nguyên nhân gây ra sai số đo

Khi nhận thức một sự vật để phân biệt về lượng với các sự vật khác người ta thường phải kiểm đếm hoặc đo đạc. Kiểm đếm là một quá trình đơn giản và có thể nhận được trị tuyệt đối, nhưng đo đạc lại là một quá trình phức tạp vì nó liên quan đến đơn vị đo, dụng cụ hay máy đo, điều kiện đo và người thực hiện phép đo vv... Người ta đã định nghĩa trị đo như sau: Giá trị bằng số của một đại lượng xác định bằng một phép đo gọi là giá trị đo [1].

Kết quả đo có thể được người đo đọc trực tiếp trên thang đo hoặc được hiển thị trên màn hình của máy đo hoặc lưu vào bộ nhớ của máy đo bằng một tệp (file) có định dạng riêng (đối với các máy đo công nghệ số).

Do nhiều nguyên nhân ảnh hưởng đến kết quả đo, giá trị đo nhận được chỉ là một giá trị gần với trị thực của đại lượng đo, sự khác biệt giữa trị thực với trị đo chính là sai số đo (nói chính xác đó là sai số thực). Trong trường hợp này nếu tiến hành đo lặp lại (với cùng điều kiện đo), cũng chỉ nhận được một trị đo khác có giá trị không trùng với giá trị đã đo trước đó. Đó cũng chính là tính bất định (*Uncertainty*) của giá trị đo. Như vậy có thể kết luận rằng, sai số đo là thuộc tính tất yếu của các giá trị đo. Có thể kể ra một số nguyên nhân gây nên sai số đo như do người đo, do máy móc, dụng cụ đo, do phương pháp đo và do điều kiện ngoại cảnh khi đo.

Dựa vào cách thức tiến hành để nhận được kết quả đo, người ta có thể phân biệt giữa đo trực tiếp và đo gián tiếp.

Đo trực tiếp là so sánh trực tiếp đại lượng cần đo với đại lượng dùng làm đơn vị đo và được thực hiện bởi dụng cụ đo hoặc máy đo để nhận được giá trị đo của đại lượng đó. Ví dụ như đo nhiệt độ bằng nhiệt kế; đo độ ẩm bằng ẩm kế; đo khoảng cách bằng thước thép hoặc đo góc bằng máy kinh vĩ vv...

Đo gián tiếp là xác định đại lượng hay yếu tố nào đó thông qua hàm của các giá trị đo trực tiếp của các đại lượng khác. Ví dụ xác định diện tích hay thể tích thông qua các trị đo kích thước của vật thể; xác định vận tốc âm thanh (v) trong môi trường nước thông qua các giá trị nhiệt độ (t), áp suất (p) và độ muối (s) của nước;

xác định gia số tọa độ vuông góc không gian thông qua các trị đo pha và trị đo khoảng cách giả trong công nghệ GNSS vv...

Trong lĩnh vực đo ảnh (*Photogrammetry*), thay vì đo trực tiếp đối tượng cần đo, người ta tiến hành chụp ảnh đối tượng và thực hiện các phép đo trên ảnh của nó. Cũng có thể coi đó là một dạng đo gián tiếp và đã hình thành nên lĩnh vực khoa học đo ảnh và xử lý ảnh.

Dựa vào điều kiện đo ta có thể phân biệt **đo cùng độ chính xác** hoặc **đo không cùng độ chính xác**.

Phép đo được thực hiện trong những điều kiện đo như nhau như: cùng người đo; cùng dụng cụ hay máy đo; cùng phương pháp đo và tiến hành trong cùng điều kiện ngoại cảnh; do đó độ tin cậy của các kết quả đo trên đều như nhau khi đó các giá trị đo được coi là cùng độ chính xác. Ngược lại, nếu các giá trị đo nhận được trong các điều kiện đo khác nhau, độ tin cậy của các kết quả đo khác nhau, khi đó ta gọi chúng là các trị đo không cùng độ chính xác.

Đặc trưng cho độ chính xác của đại lượng đo là phương sai của trị đo hoặc sai số trung phương của nó.

Dựa vào đặc tính phụ thuộc hoặc không phụ thuộc giữa các đại lượng đo ta có thể phân biệt các **trị đo không độc lập** và các **trị đo độc lập**.

Giữa các trị đo không tồn tại bất kỳ một sự phụ thuộc nào thì chúng được gọi là các trị đo độc lập. Trường hợp ngược lại gọi là các trị đo không độc lập hoặc là các trị đo tương quan, đôi khi còn gọi là các trị đo phụ thuộc. Mức độ phụ thuộc giữa các trị đo được biểu thị qua hiệp phương sai hoặc hệ số tương quan. Ví dụ: Hai góc ngang kề nhau có chung hướng đo được tính ra từ các hướng đo độc lập, về bản chất là các trị đo phụ thuộc. Tuy vậy trong một số trường hợp, người ta vẫn có thể coi các góc đo trong lưới tam giác là những trị đo độc lập với nhau, thực chất là đã bỏ qua mối tương quan giữa chúng. Các gia số tọa độ vuông góc không gian $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ giữa các cặp điểm xác định bằng định vị GPS tương đối vừa là trị đo gián tiếp vừa là trị đo không độc lập.

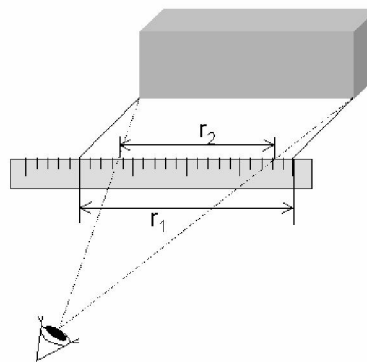
Một đặc điểm của công tác đo đạc là tiến hành đo thừa, ngay trong trường hợp chỉ cần xác định một đại lượng người ta cũng thường tiến hành đo nhiều lần (n lần) để nhận được nhiều trị đo của cùng một đại lượng đó. Trong trường hợp này chỉ có 1 trị đo cần thiết và số trị đo thừa là $n-1$. Trị trung bình số học của n lần đo là trị xác suất nhất của kết quả đo. Khi đo góc trong một hình tam giác của lưới tam giác, số lượng góc đo cần thiết trong một hình tam giác là hai, nhưng thông thường người ta đo cả ba góc để có một trị đo thừa.

Như vậy trong bất kỳ trị đo nào cũng tồn tại sai số ngẫu nhiên của phép đo ngoài ra còn có thể chứa thêm sai số hệ thống hoặc đôi khi có cả sai số do nhầm lẫn

trong quá trình đo (gọi là sai lầm, hay sai số thô). Sau đây chúng ta xem xét một số nguyên nhân gây nên sai số đo.

1. Sai số do người đo

Trong đo đạc, người đo có thể gây ra sai số đo như sai số ngắm chuẩn khi bắt mục tiêu trong đo góc. Sai số chập vạch bộ đo cực nhỏ hoặc sai số ước đọc trên thang chia vạch. hoặc trên mìa, sai số do người đo dựng mìa không thẳng đứng, sai số dọi điểm, cân bằng máy, sai số đo chiều cao anten máy thu GNSS vv... Độ lớn của các sai số này đều phụ thuộc vào bản thân người đo. Trên hình 1.2 thể hiện một trường hợp đo kích thước một đối tượng bằng thước chia vạch, có thể thấy rằng chỉ do hiệu ứng thị sai của mắt người đo mà đã gây nên sai số trong kết quả đo. Kích thước đúng của vật đo là r_1 , nhưng do thị sai nên nhận được kết quả đo là r_2 .



Hình 1.2. Hiệu ứng thị sai của mắt người đo

Người đo cũng có thể gây ra sai số rất lớn như bắt nhầm mục tiêu trong đo góc hoặc nhầm lẫn khi đọc số (đọc lộn số) trên mìa hoặc trên thước, người ghi số ghi nhầm số vào sổ đo. Sai số loại này được gọi là sai số thô (*Gross Errors*) hoặc sai lầm (*Blunders*).

Hiện nay, với các thiết bị đo đạc điện tử sử dụng công nghệ số, kết quả đo được hiển thị trên màn hình và được ghi vào thẻ nhớ sau đó được chuyển sang máy tính để xử lý, như vậy sai số do người đo đã được giảm thiểu đáng kể. Tuy nhiên vẫn không thể loại bỏ hoàn toàn sai số do người đo vì bất kỳ máy móc hay dụng cụ đo nào cũng cần đến thao tác của con người.

2. Sai số do máy móc, dụng cụ đo

Khi đo đạc, người ta phải sử dụng máy đo hoặc dụng cụ đo. Máy đo hay dụng cụ đo cho dù được chế tạo tinh xảo đến đâu cũng không thể đạt được mức hoàn hảo tuyệt đối. Những sai số do chế tạo máy móc, thiết bị và do quá trình sử dụng, sẽ ảnh hưởng trực tiếp đến kết quả đo. Sự không chuẩn xác của hệ trục máy kinh vĩ sẽ ảnh hưởng đến kết quả đo góc, khoảng chia vạch trên thước thép hoặc mìa không chính xác dẫn đến sai số trong đo chiều dài hoặc trong đo chênh cao. Trục ống thủy dài của máy thủy bình không song song với trục quang học của ống ngắm sẽ gây ra sai số trong đo hiệu độ cao, tâm pha anten máy thu GNSS không trùng với tâm hình học của máy gây ra sai số lệch tâm pha anten trong kết quả đo GNSS vv...

Các sai số do máy móc, dụng cụ đo ảnh hưởng đến kết quả đo thường mang tính hệ thống, tức là ảnh hưởng theo một quy luật nào đó. Để khắc phục các ảnh

hường của sai số do máy móc, dụng cụ đo, người ta đưa ra một số giải pháp như: kiểm định thiết bị, máy móc trước khi đo để điều chỉnh thiết bị hoặc xác định các số hiệu chỉnh vào kết quả đo; cũng có thể áp dụng quy trình đo và tính toán phù hợp để khắc phục hoặc giảm thiểu ảnh hưởng của sai số do máy móc, do dụng cụ đo.

3. Sai số do điều kiện ngoại cảnh

Điều kiện ngoại cảnh như nhiệt độ, áp suất không khí, độ ẩm, cấp gió, sương mù vv... luôn ảnh hưởng đến kết quả đo đạc. Hiện tượng chiết quang tia ngắm do sự không đồng nhất của các lớp khí quyển sẽ gây ra sai số trong đo góc ngang hoặc góc đứng. Hiện tượng mìa lún và máy lún gây ra sai số trong đo cao hình học chính xác. Khi đo khoảng cách bằng máy đo khoảng cách điện tử, kết quả đo luôn phụ thuộc vào nhiệt độ, áp suất và độ ẩm không khí. Trong kết quả đo GNSS luôn chứa sai số do ảnh hưởng của mật độ điện tử tự do trong tầng điện ly và tình trạng hơi nước trong tầng đối lưu.

Đặc điểm của sai số do ngoại cảnh thường mang tính chất hệ thống và trong một vài trường hợp cụ thể có thể mang tính chất ngẫu nhiên (khi tác động của môi trường đo thay đổi liên tục, không quy luật). Nói chung khó có thể khắc phục hoàn toàn ảnh hưởng của sai số do điều kiện ngoại cảnh đến kết quả đo. Để giảm thiểu ảnh hưởng của điều kiện ngoại cảnh đến kết quả đo, người ta quy định không được tiến hành đo đạc trong những điều kiện bất lợi (như khi gió to, sóng lớn vv...)

1.2.2. Phân loại sai số đo

Có thể phân loại sai số đo thành ba thành phần là: sai số ngẫu nhiên, sai số hệ thống và sai lầm (hay sai số thô). Tuy vậy có một số tài liệu, trong đó chỉ xét tới hai loại sai số đo là sai số ngẫu nhiên và sai số hệ thống mà không đề cập tới sai lầm và không coi đó là sai số đo [15,16]. Cũng có tài liệu còn đưa thêm sai số mang tính chu kỳ, ngoài khái niệm sai số hệ thống [17].

1. Sai số ngẫu nhiên

Sai số ngẫu nhiên (*Random Errors*) là một thành phần của sai số đo mang đặc tính thay đổi và không thể biết trước trong các trị đo lặp lại nhưng các sai số ngẫu nhiên lại tuân theo quy luật phân bố về giá trị của chúng, đó là phản ánh tính chất phân bố của các kết quả đo quanh giá trị trung bình của tập hợp trị đo và có thể có giá trị lớn hơn hoặc nhỏ hơn. Độ lớn trị tuyệt đối của sai số ngẫu nhiên phụ thuộc vào điều kiện đo như máy đo, phương pháp đo, người đo và điều kiện ngoại cảnh khi đo vv...

Như vậy, các sai số ngẫu nhiên đặc trưng trong sự lặp lại của các trị đo, và do đó thể hiện độ chính xác (*precision*) của các trị đo. Các nguyên nhân gây nên sai số ngẫu nhiên trong trị đo có thể là:

- Kỹ thuật đo và điều kiện đo (máy móc đo, phương pháp đo, người đo, nhiều....)

- Thuộc tính của đối tượng đo (như tính không đồng nhất, bất định) vv...

Trên thực tế, không thể loại bỏ hoàn toàn sai số ngẫu nhiên mà chỉ có thể giảm thiểu chúng và đánh giá chúng theo phương pháp thống kê. Phương pháp bình sai dựa trên nguyên lý bình phương nhỏ nhất vẫn thường được áp dụng để xử lý sai số ngẫu nhiên trong kết quả đo. Phương pháp phân tích thống kê, xác định phương sai (*variance*), hiệp phương sai (*covariance*) hay bán phương sai (*semivariance*) được áp dụng cho các tập hợp dữ liệu chứa sai số ngẫu nhiên.

2. Sai số hệ thống

Sai số hệ thống (*Systematic Errors*) làm dịch chuyển các kết quả đo về một phía, làm cho kết quả đo có xu thế lớn hơn hoặc nhỏ hơn, dẫn đến sai lệch kết quả đo. Như vậy, sai số hệ thống cũng được thể hiện bởi đặc trưng độ chính xác (*trueness*), nhưng được định nghĩa là mức độ gần (*closeness*) giữa kỳ vọng của kết quả lấy mẫu hay kết quả đo với giá trị thực của nó [16].

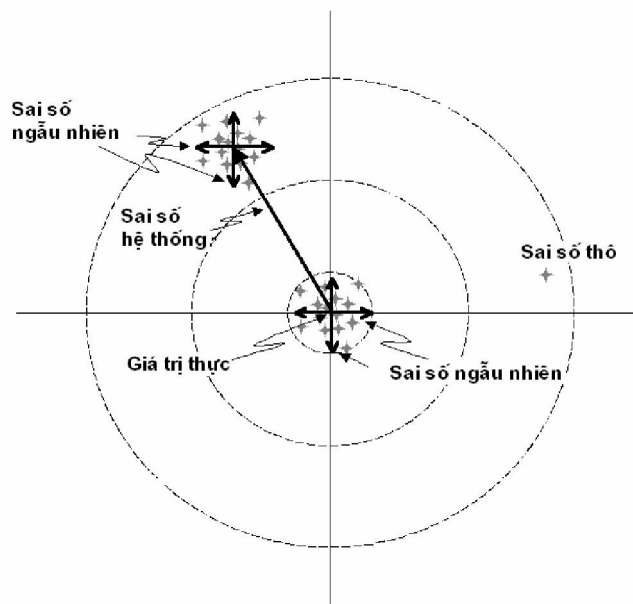
Với cùng một điều kiện đo, khi tăng số lần đo để lấy trị trung bình cũng không loại bỏ hoặc giảm thiểu được sai số hệ thống, đó là một đặc tính của sai số hệ thống cần lưu ý trong đo đạc. Nguyên nhân của sai số hệ thống thường là do thiết bị, máy đo đặc gây ra, cũng có thể do điều kiện ngoại cảnh.

Ví dụ khi đo chiều dài bằng thước thép chưa kiểm định, kết quả đo có thể lớn hơn hoặc nhỏ hơn so với giá trị thực do thước thép có chứa sai số hệ thống, có tiến hành đo chiều dài nhiều lần bằng chính thước đó cũng không thể khắc phục được sai số hệ thống. Sai số do cài đặt không đúng hằng số gương của máy đo khoảng cách điện tử cũng là một loại sai số hệ thống cố định. Trong đo cao hình học, người dựng mia không thẳng đứng gây ra sai số hệ thống trong số đọc trên mia. Sai số vạch khắc bàn độ của máy kinh vĩ gây nên sai số hệ thống có tính chu kỳ trong đo góc. Để khắc phục sai số này, người ta quy định phải đo góc theo nhiều vòng đo, mỗi vòng đo phải thay đổi bàn độ một giá trị bằng $180^\circ/n$, với n là số vòng đo. Một máy kinh vĩ có trục ngắm không vuông góc với trục ngang sẽ gây nên sai số $2C$, đó cũng là một loại sai số hệ thống. Để loại bỏ sai số $2C$ trong kết quả đo hướng hoặc đo góc ngang, người ta quy định phải đọc số ở hai vị trí bàn độ (trái và phải) của máy kinh vĩ. Ảnh hưởng của tầng điện ly đến kết quả đo khoảng cách giả trong định vị vệ tinh cũng mang tính chất của sai số hệ thống vv...

Để phân biệt tính chất của sai số ngẫu nhiên và sai số hệ thống, hãy xem hình 1.3. trên đó thể hiện vị trí các phát súng vào mục tiêu (bia) trong trường hợp chỉ có

sai số ngẫu nhiên và trường hợp có cả sai số ngẫu nhiên và sai số hệ thống. Do sai số hệ thống mà tất cả các phát súng đều bị lệch về một phía.

Để loại bỏ hoặc giảm thiểu sai số hệ thống trong kết quả đo, người ta thường tiến hành kiểm định và hiệu chỉnh thiết bị, máy móc đo đạc trước khi đo. Cũng có thể loại bỏ hoặc giảm thiểu sai số hệ thống bằng biện pháp tính toán cải chính vào kết quả đo hoặc áp dụng một quy trình đo hợp lý.



Hình 1.3. Sai số ngẫu nhiên và sai số hệ thống

3. Sai số thô

Sai số thô (*Gross Errors*) là sai số do sự bất cẩn của con người trong đo đạc và cũng có thể là do thiết bị máy móc hoặc trong quá trình nhập số liệu để xử lý số liệu đo. Ví dụ, trong đo góc ngang, người đo bắt nhầm mục tiêu, trong đo cao hình học chính xác, người dựng mìa quên không đặt mìa lên “cọc” mìa, hoặc do sự nhầm lẫn của người ghi số đo vv..

Nói chung, đặc điểm của sai số thô thường có giá trị tuyệt đối rất lớn, không có quy luật, làm cho kết quả đo ngấm sai lệch nhiều so với giá trị thực của nó (hình 1.3).

Hiện tượng trượt chu kỳ (*Cycle Slip*) trị đo pha trong công nghệ định vị vệ tinh do quá trình anten máy thu theo dõi tín hiệu vệ tinh không được liên tục, làm thay đổi số nguyên đa trị N , thực chất là sai số thô. Để khắc phục loại sai số thô này người ta phải đưa ra các giải pháp (thuật toán) phát hiện và hiệu chỉnh trượt chu kỳ [5].

Trong một số tài liệu, sai số thô được gọi là sai lầm (*Blunders*) [17]. Sai số thô có thể loại bỏ nếu có biện pháp kiểm tra trong hoặc sau quá trình đo. Để khắc phục

sai số thô cần tuân thủ nghiêm túc quy trình đo và công tác kiểm tra kết quả đo. Người làm công tác đo đạc phải cẩn thận và trung thực. Nói chung, trong bất kỳ trường hợp nào cũng phải tìm và loại bỏ sai số thô trong tập hợp các kết quả đo. Ý nghĩa quan trọng của các trị đo thừa trong các mạng lưới trắc địa cũng chính là để thực hiện được mục tiêu đó.

1.3. CÁC ĐẶC TÍNH CỦA SAI SỐ NGẪU NHIÊN

Như đã nêu ở trên, sai số ngẫu nhiên là loại sai số không thể tránh khỏi trong mỗi phép đo, do đó nó luôn tồn tại trong kết quả đo. Bằng các máy đo tốt (chất lượng cao) và áp dụng phương pháp (quy trình) đo hợp lý chúng ta có thể giảm được độ lớn của sai số ngẫu nhiên nhưng không thể loại bỏ hoàn toàn sai số ngẫu nhiên trong kết quả đo.

Sai số ngẫu nhiên không tuân theo quy luật hàm số, nghĩa là không thể dựa vào một sai số ngẫu nhiên đầu tiên để dự đoán về dấu và trị số của sai số ngẫu nhiên tiếp theo [1]. Nhưng khi ta quan sát một dãy sai số ngẫu nhiên xuất hiện trong cùng điều kiện đo thì chúng lại có quy luật về phân phối.

Để làm rõ quy luật ấy, chúng ta có thể khảo sát một trường hợp sau đây [1]: Trong cùng điều kiện đo, người ta đo toàn bộ các góc A, B, C của 162 hình tam giác hạng I nhà nước, từ đó tính được 162 giá trị sai số khép hình tam giác w theo công thức:

$$w_i = A_i + B_i + C_i - 180^\circ \quad (i = 1, 2, \dots, 162) \quad (1.3.1)$$

Do các góc đo A_i, B_i, C_i (đã tính chuyển về mặt phẳng) có chứa sai số ngẫu nhiên cho nên tổng ba góc không bằng 180° (là trị lý thuyết của tổng ba góc trong tam giác phẳng) và sai số khép w_i không bằng 0. Trong trường hợp này sai số khép hình w_i đóng vai trò là sai số thực ngẫu nhiên. Số liệu thống kê giá trị của 162 sai số khép tam giác theo 9 khoảng giá trị tuyệt đối và theo dấu (-) (+) của sai số khép được trình bày trong bảng 1.1.

Bảng 1.1. Tổng hợp sai số khép hình tam giác (trích trong [1])

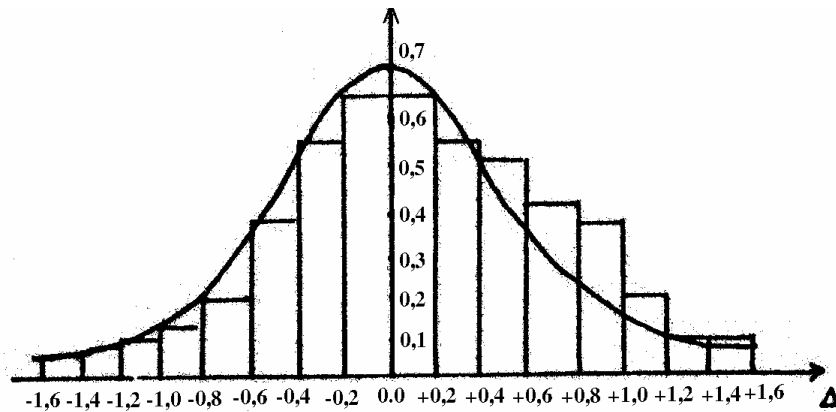
TT	Trị tuyệt đối sai số khép w_i trong khoảng	Sai số khép có dấu âm ($w_i < 0$)		Sai số khép có dấu dương ($w_i > 0$)		Tổng số	
		Số lượng	%	Số lượng	%	S. L	%
1	từ 0'' đến 0''.20	21	13,0	21	13,0	42	26,0
2	từ 0,20 đến 0,40	19	11,7	19	11,7	38	23,4
3	từ 0,40 đến 0,60	11	6,8	16	9,9	27	16,7
4	từ 0,60 đến 0,80	8	5,0	13	8,0	21	13,0

5	từ 0,80 đến 1,00	7	4,3	9	5,6	16	9,9
6	từ 1,00 đến 1,20	6	3,7	5	3,1	11	6,8
7	từ 1,20 đến 1,40	3	1,8	1	0,6	4	2,4
8	từ 1,40 đến 1,60	2	1,2	1	0,6	3	1,6
9	từ 1,60 trở lên	0	0	0	0	0	0

Từ số liệu thống kê trong bảng trên, có thể nhận thấy rằng số lượng sai số kép có dấu âm và sai số kép có dấu dương xấp xỉ bằng nhau. Sai số kép có trị tuyệt đối nhỏ nhiều hơn sai số kép có trị tuyệt đối lớn. Chúng ta có thể vẽ đồ thị biểu thị số lượng sai số kép trên hình 1.4. trong đó trục hoành biểu diễn các khoảng sai số kép tương ứng với bảng 1.1 còn trục tung biểu diễn số lượng (phần trăm) sai số kép trong các khoảng tương ứng. Tỷ lệ (độ cao) trên trục tung được tính:

$$d = \frac{x\%}{100x0,2} \quad (1.3.2)$$

Có thể nhận thấy rằng, nếu nối các điểm giữa cạnh phía trên của các hình chữ nhật sẽ được một đường gãy khúc rất gần với đường cong hình “chuông úp”, đối xứng qua trục tung và tiệm cận với trục hoành.



Hình 1.4. Đồ thị phân bố sai số kép tam giác

Thực tế cho thấy nếu số lượng các sai số càng lớn và lấy khoảng chia càng nhỏ thì đường gãy khúc nói trên sẽ càng gần với đường cong biểu diễn sự phân bố sai số ngẫu nhiên đã được chứng minh trong lý thuyết xác suất, đó là đường cong phân bố chuẩn hay phân bố Gauss, được biểu thị bởi hàm mật độ:

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \quad (1.3.3)$$

trong đó h là tham số đặc trưng cho độ chính xác, tức là đặc trưng cho điều kiện đo.

Giữa giá trị tham số h với phương sai σ^2 được biểu thị bởi quan hệ sau:

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \quad (1.3.4)$$

Với quan hệ (1.3.4), hàm mật độ (1.3.3) được viết:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}} \quad (1.3.5)$$

Có thể thấy rằng, hàm mật độ (1.3.5) là hàm không âm ($f(x) \geq 0$) và có giá trị cực đại là $f(x)_{max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ tại $x = 0$.

Từ hàm mật độ $f(x)$ chúng ta tính được xác suất để sai số x_i nằm trong khoảng x_1 và x_2 là tích phân:

$$P(x_1 < x_i \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}} dx \quad (1.3.6)$$

Tích phân trên có tính chất:

$$P(-\infty < x_i \leq +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad (1.3.7)$$

Trong công thức (1.3.6) chúng ta đổi biến x sang t với quan hệ:

$$t = \frac{x}{\sigma} \quad \text{hay} \quad x = t \cdot \sigma \quad (1.3.8)$$

Biến mới t gọi là biến ngẫu nhiên chuẩn hóa.

Theo quan hệ (1.3.8) ta có công thức vi phân tương ứng là:

$$dt = \frac{dx}{\sigma} \quad (1.3.9)$$

Sau khi đổi biến, biểu thức (1.3.6) được viết:

$$P(x_1 < x_i \leq x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (1.3.10)$$

Vì hàm mật độ là hàm chẵn, có đồ thị đối xứng qua trục tung cho nên người ta ký hiệu hàm tích phân xác suất là:

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (1.3.11)$$

Giá trị hàm $\Phi(t)$ được tính toán và lập thành bảng tra có dạng trình bày ở phần phụ lục. Nhờ giá trị tích phân xác suất $\Phi(t)$ chúng ta biết được xác suất xuất hiện của sai số ngẫu nhiên trong các khoảng nào đó.

Trong bảng 1.2 trích một số giá trị của hàm tích phân xác suất $\Phi(t)$:

Bảng 1.2. Một số giá trị của hàm tích phân xác suất

t	$\Phi(t)$
0.00	0.0000
0.25	0.1974
0.50	0.3829
0.75	0.5467
1.00	0.6827
1.25	0.7887
1.50	0.8664
1.75	0.9199
2.00	0.9545
2.25	0.9756
2.50	0.9876
2.75	0.9940
3.00	0.9973
3.50	0.9995
4.00	0.9999

Từ lý thuyết xác suất và qua khảo sát các dãy sai số ngẫu nhiên trong những điều kiện đo nhất định, người ta thấy sai số ngẫu nhiên có các đặc tính sau đây:

1. Trị tuyệt đối của sai số ngẫu nhiên không vượt quá một giới hạn nhất định, trị số giới hạn này phụ thuộc vào điều kiện đo.
2. Những sai số ngẫu nhiên có trị tuyệt đối nhỏ có khả năng xuất hiện nhiều hơn những sai số có trị tuyệt đối lớn.
3. Các sai số ngẫu nhiên âm và dương có trị tuyệt đối bằng nhau có khả năng xuất hiện như nhau.
4. Khi số lần đo (n) tăng lên vô hạn thì trị trung bình cộng của các sai số ngẫu nhiên ε_i sẽ tiến đến 0, tức là:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\varepsilon]}{n} = 0 \quad (1.3.12)$$

trong đó $[\varepsilon]$ là ký hiệu tổng đại số của sai số ngẫu nhiên.

Đặc tính thứ nhất của dãy sai số ngẫu nhiên đặc trưng cho điều kiện đo. Giá trị của sai số giới hạn càng nhỏ chứng tỏ điều kiện đo càng tốt (máy tốt, người đo thành thạo, điều kiện ngoại cảnh thuận lợi ...). Đặc tính thứ hai thể hiện rõ quy luật về giá trị của sai số ngẫu nhiên. Đặc tính thứ ba nói lên quy luật về dấu của sai số ngẫu nhiên. Đặc tính thứ tư là hệ quả của ba đặc tính trên.

Cần lưu ý rằng, các đặc tính nêu trên là của dãy sai số ngẫu nhiên với số lượng rất lớn và tuân theo quy luật phân bố chuẩn [1]. Người ta dựa trên đặc tính thứ nhất của sai số ngẫu nhiên để xác định sai số giới hạn của dãy trị đo hoặc xác định sai số khép giới hạn cho các phương trình điều kiện trong lưới trắc địa, nhờ đó có thể phát hiện và loại bỏ các sai số thô hoặc sai số hệ thống chứa trong các trị đo của mạng lưới trắc địa trước khi bình sai mạng lưới.

1.4. CÁC TIÊU CHUẨN ĐÁNH GIÁ ĐỘ CHÍNH XÁC

Mỗi phép đo thực hiện trong một điều kiện đo nào đó luôn kèm theo sai số đo, do đó kết quả đo không đúng với giá trị thực của đại lượng cần đo. Nếu ký hiệu X là giá trị thực của đại lượng đo và x_i là các giá trị đo thì sai số thực được tính theo công thức:

$$\varepsilon_i = x_i - X \quad (1.4.1)$$

Trên thực tế không thể biết được giá trị thực của đại lượng đo và nếu đã biết trị thực thì cũng không có nhu cầu đo. Như vậy, không thể sử dụng sai số thực để làm tiêu chuẩn đánh giá độ chính xác của trị đo. Ngay với một dãy trị đo cùng độ chính xác, sai số thực của dãy trị đo đó cũng rất khác nhau về trị tuyệt đối và về dấu. Điều này có thể nhận thấy qua sai số khép của 162 hình tam giác đã nêu trong bảng 1.1.

Như vậy, khái niệm về độ chính xác không phải ở trị số riêng rẽ của trị đo mà nó đặc trưng cho điều kiện đo. Mặt khác điều kiện đo lại ảnh hưởng trực tiếp đến sự phân bố sai số của dãy trị đo. Điều kiện đo càng tốt thì sai số có trị tuyệt đối nhỏ xuất hiện càng nhiều, tức sự phân bố của sai số càng tập trung. Ngược lại, điều kiện đo càng xấu thì các sai số có trị tuyệt đối lớn xuất hiện càng nhiều, sự phân bố sai số đo càng tản mạn (không tập trung).

Để đặc trưng cho độ chính xác trị đo, người ta sử dụng các đại lượng đặc trưng sâu đây:

1.4.1. Phương sai và sai số trung phương

Theo lý thuyết xác suất, sai số đo ε của đại lượng đo X trong công thức (1.4.1) là biến ngẫu nhiên. Đặc trưng cho độ phân tán của biến ngẫu nhiên đó là phương sai là σ_x^2 hoặc độ lệch tiêu chuẩn σ_x . Phương sai (*variance*) được định nghĩa là mô men cấp hai của biến ngẫu nhiên và được biểu thị bởi công thức:

$$\sigma_x^2 = D(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1.4.2)$$

trong đó $f(\varepsilon)$ là hàm mật độ

$$f(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \quad (1.4.3)$$

Phương sai theo công thức (1.4.2) còn được viết ở dạng:

$$\text{var}(x) = \sigma_x^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} \quad (1.4.4)$$

Độ lệch tiêu chuẩn σ_x còn gọi là sai số trung phương m_x là căn bậc hai của phương sai tức là:

$$\sigma_x = m_x = \sqrt{E(\varepsilon^2)} \quad (1.4.5)$$

Trên thực tế số lần đo một đại lượng nào đó không thể tăng lên vô hạn mà chỉ là số hữu hạn, vì vậy người ta thường tính sai số trung phương theo công thức gần đúng (ước lượng) sau đây:

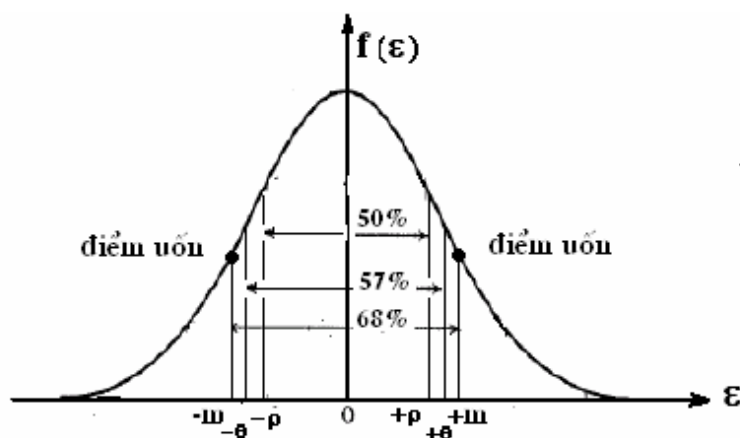
$$m_x \approx \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \quad (1.4.6)$$

Sai số trung phương là chỉ tiêu quan trọng để đánh giá độ chính xác kết quả đo, nó đặc trưng cho độ phân tán của kết quả đo so với trị thực (hoặc trị trung bình) của nó.

Công thức tính sai số trung phương theo sai số thực (1.4.6) được gọi là công thức Gauss. Nói chung, với số lượng trị đo khá lớn thì giá trị sai số trung phương tính theo công thức (1.4.6) có độ tin cậy cao. Cũng cần lưu ý rằng, công thức tính sai số trung phương (1.4.6) cũng chỉ có ý nghĩa lý thuyết vì hầu hết các trường hợp đo đạc đều không thể biết một cách chính xác giá trị thực của đại lượng cần đo. Tuy nhiên, tùy trường hợp cụ thể người ta có thể coi kết quả đo đạc với độ chính xác cao đóng vai trò như “trị thực” để đánh giá độ chính xác theo dãy trị đo có độ chính xác thấp hơn hoặc sử dụng trị trung bình để đánh giá độ chính xác kết quả đo nhiều lần một đại lượng.

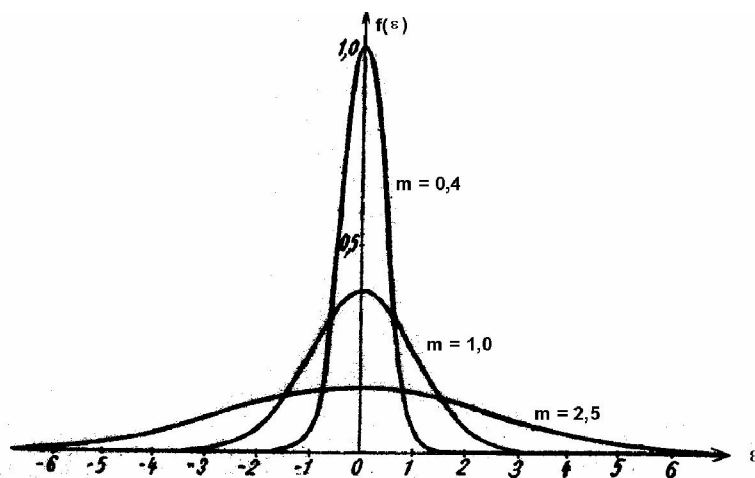
Công thức tính sai số trung phương của dãy trị đo dựa trên độ lệch giữa trị đo với trị trung bình được trình bày trong mục 1.9.1.

Trong lý thuyết xác suất, người ta đã chứng minh rằng, số lượng sai số xuất hiện trong khoảng từ $-m$ đến $+m$ chiếm 68,26% tổng số lượng các sai số có thể xuất hiện và trị số $-m$ và $+m$ chính là hai điểm uốn của đường cong hàm mật độ phân bố chuẩn (1.3.3) thể hiện trên hình 1.5.



Hình 1.5. Đường cong hàm mật độ phân bố chuẩn của sai số đo

Trên hình 1.6 thể hiện một số dạng đường cong hàm mật độ phân bố chuẩn tương ứng với các giá trị sai số trung phương (m) khác nhau. Có thể nhận thấy rằng, mật độ phân bố sai số càng chụm hay càng tập trung thì sai số trung phương càng nhỏ và ngược lại, mật độ phân bố sai số càng phân tán thì sai số trung phương càng lớn. Tính đối xứng của các giá trị sai số ε qua trục tung ($f(\varepsilon)$) cũng là một đặc trưng quan trọng của dãy sai số đo.



Hình 1.6. Đường cong mật độ ứng với $m = 0,4$; $m = 1$ và $m = 2,5$